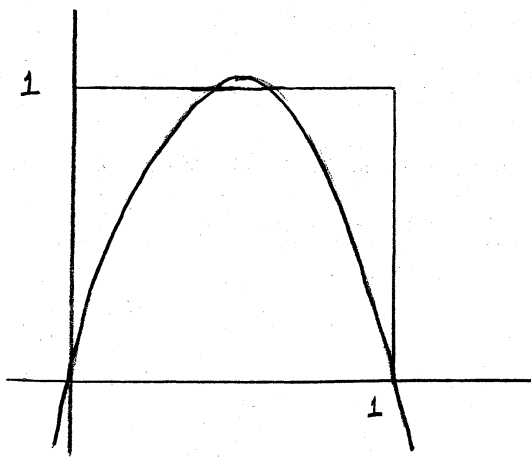


ある種の極小集合の測度

日大 理工 松元重則

1° 1次元カス係 $f(x) = 4\mu x(1-x)$ に
パラメーター μ の値が 1 を超えた場合を考える。



いま, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f^n(x) \in [0, 1], \forall n \geq 0\}$

とおけば, C は f -不変である。 μ が十分大きければ,

f は C 上双曲的、すなわち、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |Df^n| \leq \lambda < 1$ を
みたし、従って C は、Cantor 集合と同相である。

このとき, C の各点の f^{-1} -軌道は C の中で稠密であり、さらに
 $\mu(C) = 0$ になりたつ。(μ は Lebesgue 測度) それ

では, μ の値が 1 に非常に近いとき, どの程度の μ と
が, いえるか。これを調べるのは大変興味深いことと
思われるが, これに関しひとつの知見をつけ加えるのが

本稿の目的である。我々の得た結論は、「 C が内点をもたねば」 $\mu(C)=0$ である」ということである。

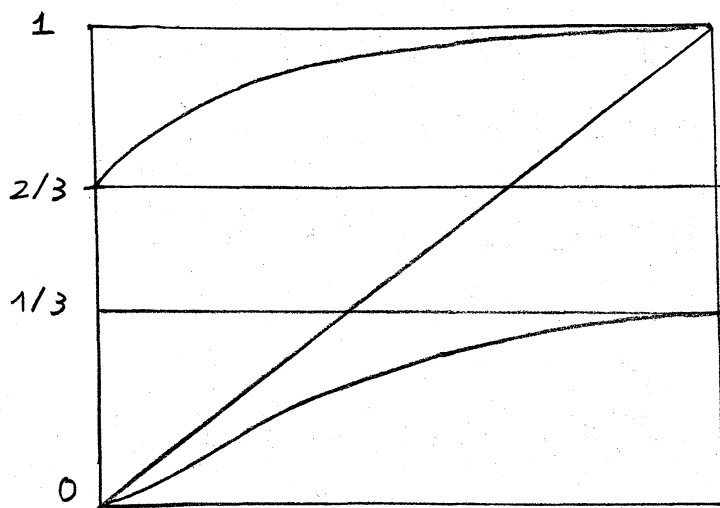
今、簡単のため、2次関数を例にひいて話を進めたが、実際には我々の取り扱うものは、一般の C^2 級の関数である。また先の例では、graphの一部が、 $f' < 0$ となっており、このことは、議論を複雑化させる。

よって次のようなものを考えよう。

(1) f_0, f_1 は、 $I=[0, 1]$ で定義された C^2 級関数で、 $f_i' > 0$ かつ $f_0(I)=[0, 1/3]$, $f_1(I)=[2/3, 1]$

(2) 任意の $0, 1$ -値系列 $(i_0, i_1, i_2, \dots)$ に対し

$\bigcap_n f_{i_1} \dots f_{i_n}(I)$ は 1点のみから成る。



さて (2) のとき、そのような点の全体は Cantor 集合を成すが、これを、 C で表わすこととしよう。

定理 1 (1), (2) のとき $\mu(C) = 0$

(注意 1) f_i の値域は, 話をきめるため $1/3, 2/3$ まで切ったが, 他の値でも同様である。

(注意 2) C^2 級という条件は本質的である。

Denjoy 流れの構成を模倣して, C^1 級の反例をつくることができる。(東工大土曜セミナー: とくに, 矢野公一氏)

(注意 3) $f'_i < 0$ でも話は, 同じ。

2° 定理 1 の証明のあらましを述べよう。いま, $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_m}$ を調べるのであるが,

$$(3) \quad g_k = f_{i_m-k+1}, \quad h_k = g_k \circ \dots \circ g_1$$

と書くことにしよう。

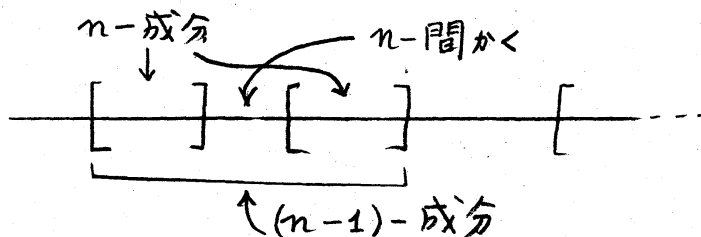
命題 2 (Denjoy 不等式) $n \geq 0, x, y \in I$

$$\log(h'_n(x)/h'_n(y)) \leq \theta \sum_{j=1}^n |h_{j-1}(x) - h_{j-1}(y)|$$

この証明は, まず, $h'_n(x), h'_n(y)$ を, チェイン規則で書き下し, 次に左辺を平均値の定理により評価することにより

与えられる。

52. "2" 定理1の証明の大体のイメージを得るために
 $\tau = \sup\{f_0', f_1'\} < 1$ なる特別の場合の証明を試みよう。
 f_j 達の n 回合成による I の像を C の n -成分, $(n-1)$
 回合成による $(1/3, 2/3)$ の像を C の n -間かくと呼ぼう。



A を, ある n -成分, B をその隣りの n -間かくとすれば
 命題2により

$$\log(\mu(A)/\mu(B)) \leq \theta \sum_{j=1}^{n-1} h_{j-1}(I) < \frac{\theta}{1-\tau} = \log \kappa$$

==に, h_j は (3) により B を定義する系より定まるもの。

このとき, $\mu(C_n)/\mu(C_{n-1}) < 2\kappa/(2\kappa+1) < 1$

==に C_n とは n -成分全体の和。 ==より $\mu(C) = 0$
 が従う。

一般に, $\tau < 1$ を仮定しない場合, もはや
 $\mu(A)/\mu(B)$ の評価を一般に得ることはできない。

しかレ C の点のうち λ の定義系 $(i_1, i_2, \dots)$ をさかの
 ぼれば 点 $2/3$ の近くを, 無限回通過したようなものに
 ついては, ==と同様のことが成り立つ。

命題3 . 正数 δ が存在し、十分大きい N_1 に対し A を N -成分、 B をその隣りの N -間かくで、ともに、 $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \delta)$ に含まれるものとするば、 $\mu(h_n(A))/\mu(h_n(B)) \leq \pi < 1$

(注意) δ は、 n および $h_n = f_{i_1} \cdots f_{i_n}$ のとり方によらずまゐる。しかもそうたが、 π は N_1 には依存する。

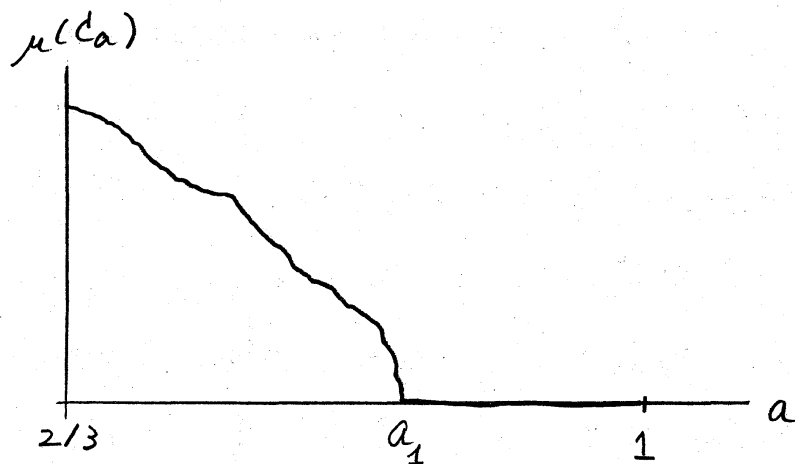
命題3の証明のあらましは次のとおり。まず $(1/3, 2/3)$ の $h_1, \dots, h_m$ による像が交わらないことがポイントであり、これより命題2を用いて、 $\sum_{j=0}^n h_j(2/3)$ を一定値以下に抑えることができる。次に、再び命題2より帰納的に $|x - \frac{2}{3}| < \delta \Rightarrow h_k(x) \leq 2h_k(2/3)$ なる δ の存在がいえる。これから、命題3が導かれる。

3° さて C はふたつの部分集合 X と Y' の和に分けられる。 X は、それを定義する系列 $(i_1, i_2, \dots)$ を2かのいづれが、命題3にいう、 A のような形の集合を無限回通ってきた点である。命題3より、 $\mu(X) = 0$ が示されるわけである。さて、 X の補集合 Y' は、 A のようなところを一度もとおらなかった点のつく集合 Y の連続像の可算和であり、従って、 $\mu(C) = 0$ のためには、 $\mu(Y) = 0$ をいえばよい。

いま、 $2/3 < a < 1$ に対し

$$C_a = C \setminus \bigcup f_{i_1} \cdots f_{i_n} [2/3, a) \text{ とおけば}$$

γ は C_a の形である。(定義中 $\cup$ は、任意長さの系列 $(i_1 \dots i_n)$ に渉るもの) さて、実際の定理1の証明は、背理法に依る。いま、もしも $\mu(C) > 0$ と仮定すれば、 $2/3 < a < 1$ に対し、 $\mu(C_a)$ は a の単調減少関数であり、 a が 1 に十分近ければ値は 0 である。



先程 命題3より、 $\mu(X) = 0$ を導びいたが、これを上のグラフによっていいかえると、 $\mu(C) > 0$ ならば、 $\mu(C_{2/3+\delta}) > 0$ がいえるという事である。 $X = \gamma$ の議論を a_1 に近い値に対して行えば、矛盾を生じさせる事ができるのである。そのためには、命題3を特定の点 $2/3$ から解放し、形式的に一般の形にしておく必要がある。以上が、定理1の証明のあらましである。