

Thurston's Formulation and Proof of Andreev's Theorem

東京電機大学 理工学部 相馬 輝彦 (Teruhiko Soma)

S を closed, connected orientable surface とし, S 上には幾何的構造が定義されているとする. すなわち, $\text{Isom}^+(X)$ のある離散部分群 Γ によって, $S = X/\Gamma$ と表せる. ただし, X は S^2, E^2 または H^2 の何れかであるとする. T を S の (位相的) 三角形分割とする. 実際, 我々が必要としているのは, 2-simplices からなる S の胞体分割である. 従って, 2-simplex の 2 つの vertices が S 上の同じ点になってもよい. より正確には, この論説で言うところの三角形分割とは S 上の胞体分割で, それを普遍被覆 X に引き戻した分割が (通常の意味での) 三角形分割になっているものを意味する. $\mathcal{E}, \mathcal{V}, \mathcal{F}$ を T の edges, vertices および faces (2-simplices) の集合とし, 写像 $\Theta: \mathcal{E} \rightarrow [0, \pi/2]$ が与えられているとする. $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ に 1 対 1 に対応する S 上の (geometric) circles の集合 $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ が次の (i), (ii) をみたすとき, data T, Θ を実現する *circle pattern* であると言う.

(i) $C_1, \dots, C_n$ 間の nerves による S 上の分割 $\bar{T}$ は T に ambient isotopic であり, その対応は各円 C_i の中心 $\bar{v}_i$ を v_i に写す.

(ii) $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ である任意の組 C_i, C_j に対し, C_i の中心と C_j の中心を結ぶ nerve $\bar{e}$ が, この ambient isotopy で, v_i と v_j を結ぶ edge e に写されるならば, C_i と C_j の intersection angle は $\Theta(e)$ に一致する (図 1 参照).

特に, $\Theta \equiv 0$ であるとき, $\mathcal{C}$ を三角形分割 T に対応する *circle packing* という.

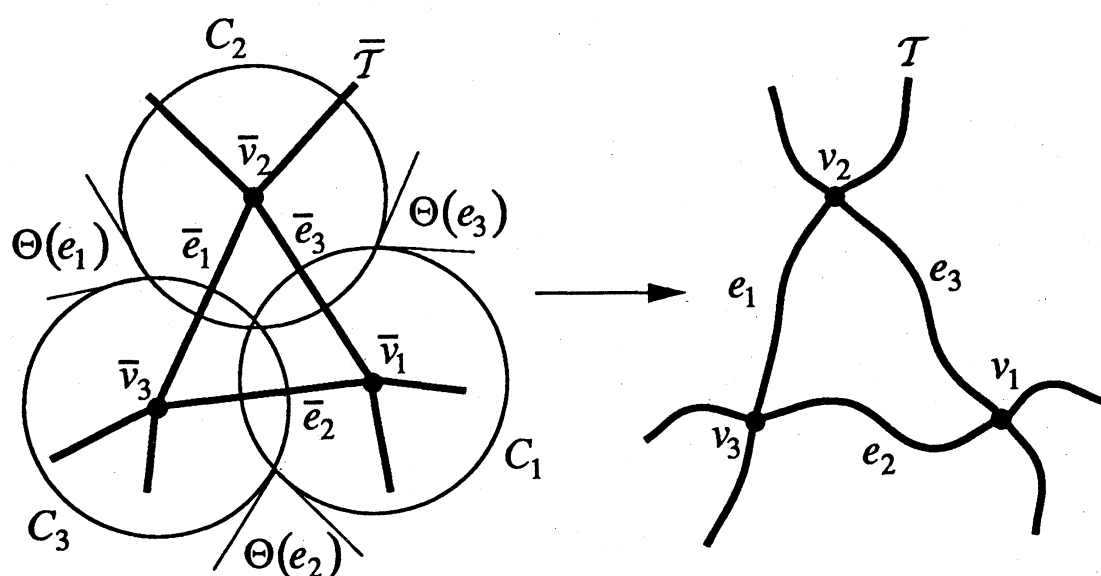


図 1.

この講究録では、適当な条件のもとで $\text{data } \mathcal{T}, \Theta$ を実現する、 S 上の幾何的構造と circle pattern の対が一意的に存在することを証明する。この定理は Andreev [1], [2] および Thurston [4, Chapter 13] によって証明された。Andreev は $\chi(S) > 0$ の場合 (S^2 -case), Thurston は $\chi(S) \leq 0$ の場合 (E^2, H^2 -case) を扱っている。後に, Rodin-Marden [3] は, $\chi(S) > 0$ の場合の主張も, Thurston 流の方法で証明できることを示した。ここでは, まず Thurston の証明を紹介する。[4] の証明には明らかな見落としがあるので, それも補足しておく。次に, Rodin-Marden の証明の概略を述べる。彼らの証明は Thurston の証明の E^2 -case を真似したものなので, 証明の異なるところだけ説明すれば充分であろう。

§1. $\chi(S) \leq 0$ の場合

これ以後, $S, \mathcal{T}$ は常に, 上で挙げた条件をみたすものとする。

定理 1. (E^2, H^2 -case) $\chi(S) \leq 0$ であり, かつ写像 $\Theta: \mathcal{E} \rightarrow [0, \pi/2]$ は次の 2 条件 (i), (ii) をみたすとする。

- (i) $e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{E}$ を $e_1 + e_2 + e_3$ が S 内の null-homotopic loop を表すような任意の 3 組とする。もし $\sum_{i=1}^3 \Theta(e_i) \geq \pi$ であれば, $e_1 + e_2 + e_3$ は 1 つの $f \in \mathcal{F}$ の境界となる (図 2(a) 参照)。
- (ii) $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathcal{E}$ を $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ が S 内の null-homotopic loop を表すような任意の 4 組とする。もし $\sum_{i=1}^4 \Theta(e_i) = 2\pi$ であれば, $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ は 2 つの $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ の和集合の作る四角形の境界となる (図 2(b) 参照)。

このとき, $\text{data } \mathcal{T}, \Theta$ を実現するような, S 上唯一つ ($\chi(S) = 0$ の場合はスカラー倍を除いて唯一つ) の幾何的構造と circle pattern $\mathcal{C}$ の対が存在する。

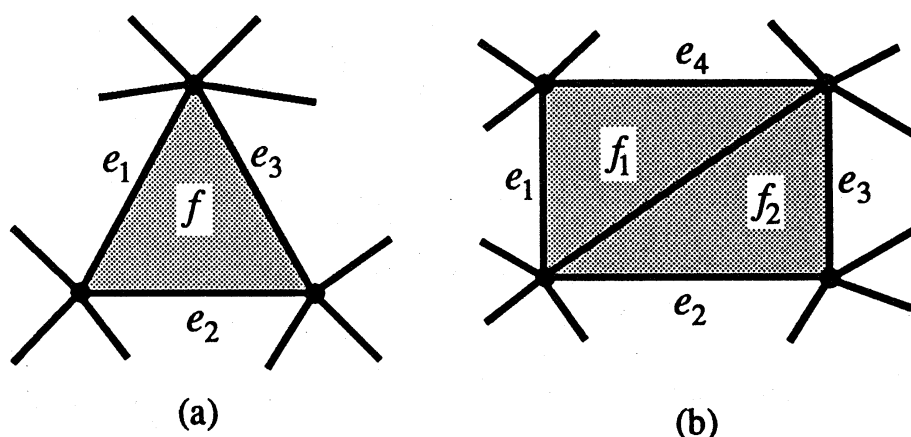


図 2.

注意. circle packing の場合は任意の $\{e_i\} \subset \mathcal{E}$ に対して, $\sum \Theta(e_i) = 0$ であるので, 定理 1 の条件 (i), (ii) は自動的にみたされる。したがって, 三角形分割 $\mathcal{T}$ に対応するような circle packing はつねに存在する。

まずは各 2-simplex $f \in \mathcal{F}$ ごとに、与えられた intersection angles を持つ circles の 3 対が存在することを示す。

補題 1. 任意の $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, \pi/2]$ および任意の正数 r_1, r_2, r_3 に対し、 r_1, r_2, r_3 を半径にもつ E^2 または H^2 内の円 C_1, C_2, C_3 でその intersection angles が $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ となるものが (up to isometry) で唯一つ存在する (図 3 参照)。

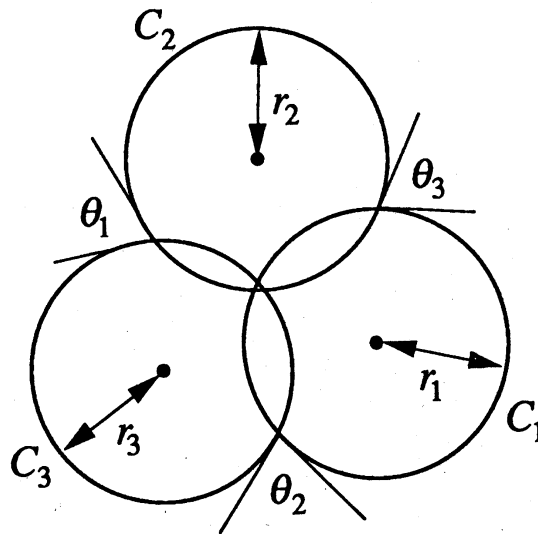


図 3.

証明. $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ とする. C_i と C_j が角度 θ_k で交わるときの中心間の距離を l_k とする (図 4 参照)。

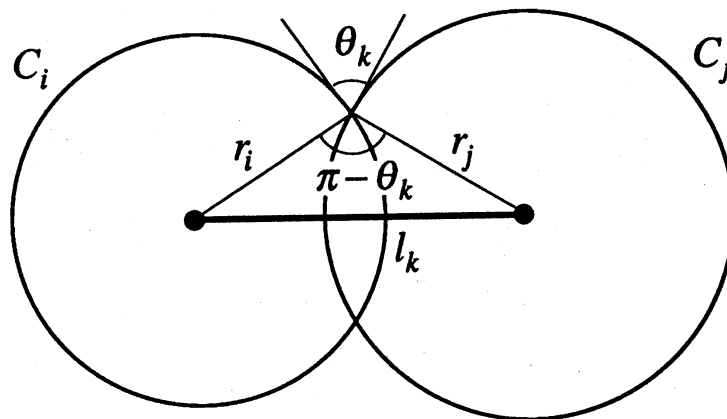


図 4.

このとき、 $\pi - \theta_k \geq \pi/2$ であるから、 $l_k > \max\{r_i, r_j\}$ であり、 l_1, l_2, l_3 が三角不等式をみ

たすことが分かる. 実際, 図 4 の三角形に関する三角不等式から $l_k \leq r_i + r_j$ であり, また $r_i \leq \max\{r_i, r_k\} < l_j$, $r_j \leq \max\{r_j, r_k\} < l_i$ であるから, $l_k < l_i + l_j$ となる. C_1, C_2, C_3 の中心として, 3 辺の長さが l_1, l_2, l_3 の三角形 f の頂点をとれば, この補題で求めている 3 組の円ができる (図 5 参照).

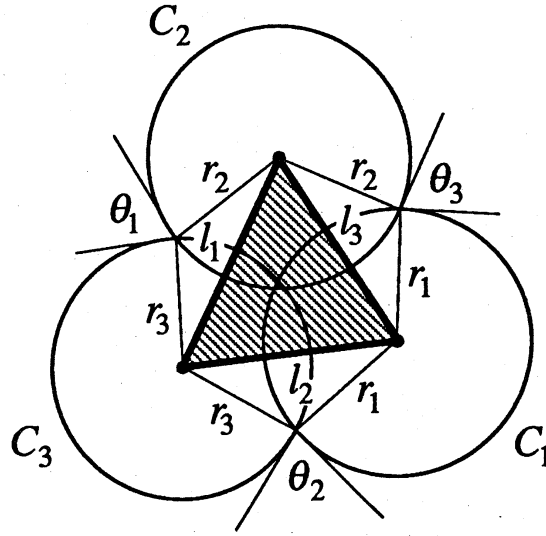


図 5.

一意性は f の構成の仕方から明かである. $\square$

$\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ とおく. $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ を $\mathbf{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_i > 0 (i = 1, \dots, n)\}$ の任意の元とする. 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対し, その頂点を v_i, v_j, v_k , 辺を e_p, e_q, e_r とおく. 補題 1 の証明で与えたような, r_i, r_j, r_k と $\Theta(e_p), \Theta(e_q), \Theta(e_r)$ から決まる E^2 または H^2 内の (geometric) 2-simplex を $f_{\mathbf{r}}$ とする. $\{f_{\mathbf{r}}; f \in \mathcal{F}\}$ を $\mathcal{T}$ と同じ combinatorial type を持つように貼り合わせて出来た「距離空間」を $S_{\mathbf{r}}$ とする. $\mathcal{T}$ の vertex v_i と対応する $S_{\mathbf{r}}$ 内の点 (これも v_i で表す) を中心とする半径 r_i の「円」を C_i とする. 補題 1 より, $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ は data $\mathcal{T}, \Theta$ を実現する「circle pattern」である. これで, 定理 1 の証明が終わったと思うのは, 錯覚である. 問題なのは $S_{\mathbf{r}}$ 上の幾何的構造である. 各 $f_{\mathbf{r}}$ の辺は全て geodesic segments であらう, 各 $f_{\mathbf{r}}$ 上の幾何的構造は $S_{\mathbf{r}}$ 上の「幾何的構造」へと拡張される. しかし一般に, $S_{\mathbf{r}}$ は $\mathcal{V}$ において cone-type singularity を持つので, 通常の意味での幾何的構造を持つとは言えない. $v_i \in \mathcal{V}$ を頂点にもつ $S_{\mathbf{r}}$ 内の 2-simplices を $(f_{i1})_{\mathbf{r}}, \dots, (f_{il})_{\mathbf{r}}$, 各 $(f_{ij})_{\mathbf{r}}$ の v_i における角度を θ_{ij} とする. これらの角度の総和 $\theta_{i1} + \dots + \theta_{il}$ を $S_{\mathbf{r}}$ の点 v_i における cone-angle といい, 2π と cone-angle との差:

$$\kappa_{\mathbf{r}}(v_i) = 2\pi - (\theta_{i1} + \dots + \theta_{il})$$

を点 v_i における $S_{\mathbf{r}}$ の curvature と言う. 明らかに, $S_{\mathbf{r}}$ が幾何的構造を持つことと, $\kappa_{\mathbf{r}}(v_1) =$

$\dots = \kappa_{\mathbf{r}}(v_n) = 0$ は同値である。連続写像

$$(1.1) \quad F: \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

を $F(\mathbf{r}) = (\kappa_{\mathbf{r}}(v_1), \dots, \kappa_{\mathbf{r}}(v_n))$ で定義すると、今までの議論より次が言える。

(1.2) 定理 1 の主張は $F(\mathbf{r}) = (0, \dots, 0)$ をみたす $\mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$ が唯一つ (E^2 -case ではスカラー倍を除いて唯一つ) 存在することと同値である。

補題 2. C_1, C_2, C_3 を図 3 にあるように intersection angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ で交わる半径 r_1, r_2, r_3 の円とする。 C_1, C_2, C_3 の中心 v_1, v_2, v_3 で張られる E^2 または H^2 内の 2-simplex を f とし、 v_i における f の角度を α_i とする。もし C_1 をより小さい半径 r'_1 をもつ円 C'_1 で置き換え、その他の円の半径や intersection angles 等はそのままであるとすると、 C'_1 の中心 v'_1 は $\text{int} f$ に含まれる。特に、 v'_1, v_2, v_3 の張る 2-simplex の角度を α'_i ($i = 1, 2, 3$) とすると、 $\alpha_1 < \alpha'_1, \alpha_2 > \alpha'_2, \alpha_3 > \alpha'_3$ が成り立つ (図 6 参照)。

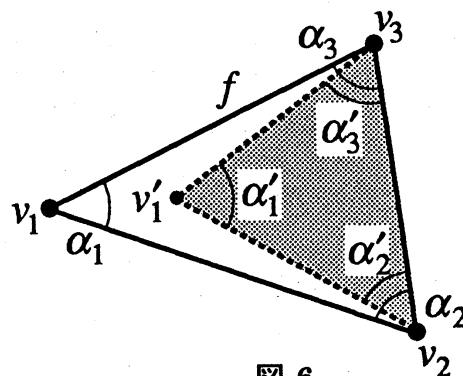


図 6.

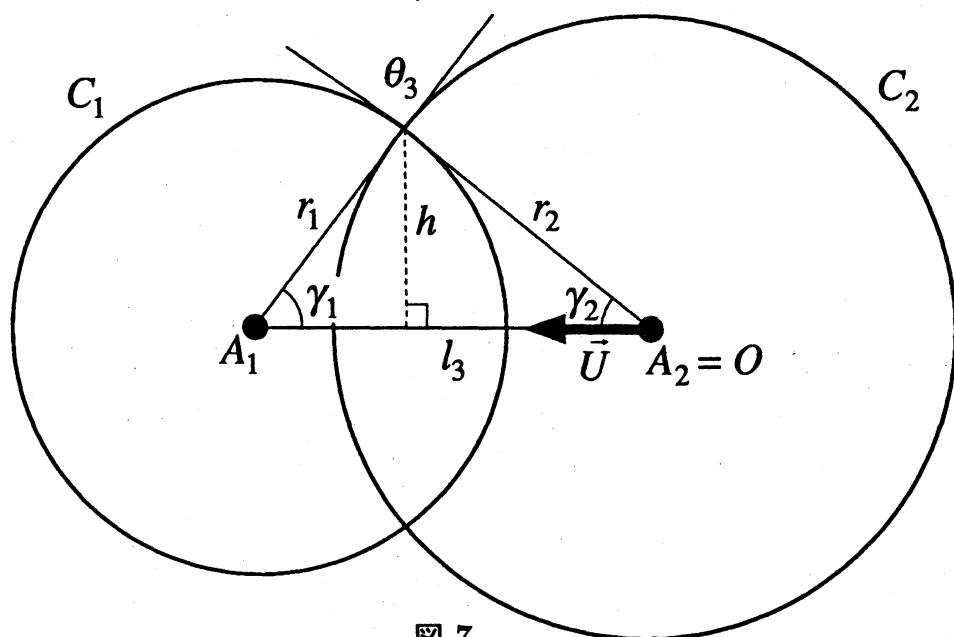


図 7.

証明. もし, 必要ならば C_1 の半径を何段階かに分けて減少させればよいので, 差 $r_1 - r'_1$ は充分小さい正数と仮定出来る.

まず, E^2 -case を考えよう. v_1, v_2, v_3 の E^2 -座標を A_1, A_2, A_3 とする. 図 7 のように, A_2 が原点 O と一致するような座標を選ぶ. $\overrightarrow{OA_1}$ に平行な長さ 1 の位置ベクトルを $\vec{U}$ とすると, $\overrightarrow{OA_1} = l_3 \vec{U}$ である. $\overrightarrow{OA_1}$ の r_1 による偏微分 $(\partial/\partial r_1) \vec{A_1}$ を考える. (注意: ここで偏微分を $(\partial/\partial r_1) \overrightarrow{OA_1}$ ではなくて $(\partial/\partial r_1) \vec{A_1}$ と書いたのは, このベクトルは r_1 が変化したときの点 A_1 の運動方向を表すものであり, $O = A_2$ という原点の選び方によらないのを強調するためである.)

$$(1.3) \quad \frac{\partial \vec{A_1}}{\partial r_1} = \frac{\partial l_3}{\partial r_1} \vec{U} + l_3 \frac{\partial \vec{U}}{\partial r_1}.$$

$\vec{V} = (\partial/\partial r_1) \vec{U}$ とおくと, $\vec{V}$ は $\vec{U}$ に直交している. 実際, $\vec{U} \cdot \vec{U} = \|\vec{U}\|^2 \equiv 1$ であるから, この両辺を r_1 で偏微分すると, $2\vec{U} \cdot (\partial/\partial r_1) \vec{U} = 0$ である. 図 7 より, $l_3 = r_1 \cos \gamma_1 + r_2 \cos \gamma_2$, $r_1 \sin \gamma_1 = r_2 \sin \gamma_2 = h$ であり, かつ $\gamma_1 + \gamma_2 = \theta_3$ が定数であるから, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_3}{\partial r_1} &= \cos \gamma_1 - r_1 \sin \gamma_1 \cdot \frac{\partial \gamma_1}{\partial r_1} - r_2 \sin \gamma_2 \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial r_1} \\ &= \cos \gamma_1 - h \left(\frac{\partial}{\partial r_1} (\gamma_1 + \gamma_2) \right) \\ &= \cos \gamma_1. \end{aligned}$$

従って, 式 (1.3) より,

$$(1.4) \quad -r_1 \frac{\partial \vec{A_1}}{\partial r_1} = -(r_1 \cos \gamma_1) \vec{U} - r_1 l_3 \vec{V}.$$

C_i と C_j の 2 交点を通る E^2 の直線を L_{ij} とする. $\vec{V}$ が $\vec{U}$ に直交するので, 式 (1.4) より, (A_1 を始点にとったときの) ベクトル $-r_1(\partial/\partial r_1) \vec{A_1}$ の終点は L_{12} 上にあることが分かる (図 8 参照). C_1, C_3 の組に関しても同様な議論をすると, $-r_1(\partial/\partial r_1) \vec{A_1}$ の終点は L_{13} 上にもある. 従って, 3 直線 L_{12}, L_{13}, L_{23} の交点を Q とすると, $-r_1(\partial/\partial r_1) \vec{A_1} = \overrightarrow{A_1 Q}$, すなわち $-(\partial/\partial r_1) \vec{A_1} = (1/r_1) \overrightarrow{A_1 Q}$ が成り立つ (図 9 参照). $-(\partial/\partial r_1) \vec{A_1}$ は r_1 が減少するときの点 A_1 の運動方向を表しているのだから, Q が f の内点であることを証明すれば充分である. もし, $Q \in \text{int } f$ でないとすると, Q は図 10 の斜線の部分の何れかに含まれるはずである. 一般性を失うことなく Q が線分 $\overline{A_2 A_3}$ に関して A_1 の反対側にあると仮定できる.

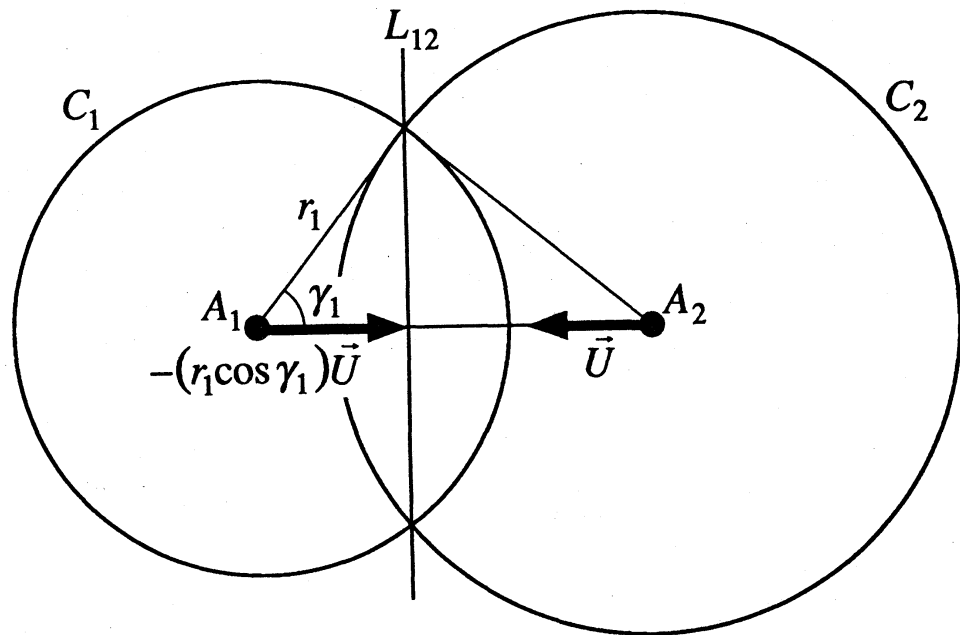


図 8.

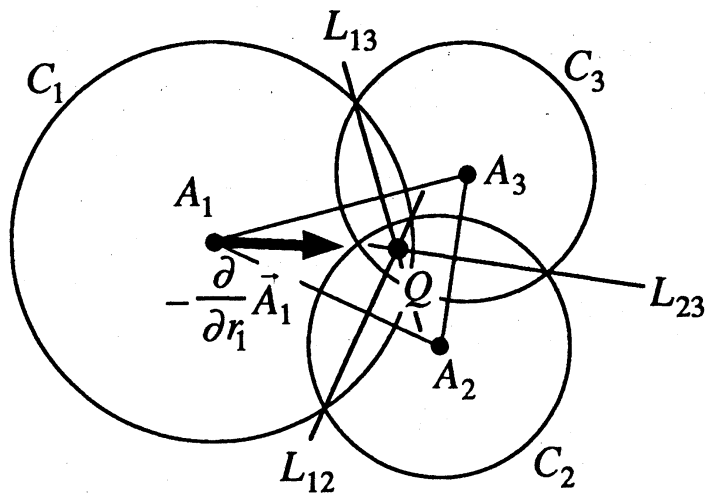


図 9.

まず, $C_1 \cap \overline{A_2 A_3} \neq \emptyset$ と仮定する. H を A_1 を通り $\overline{A_2 A_3}$ に直行する E^2 の直線とする. A_2, A_3 を中心として H と接する円と C_1 との intersection angle は $\pi/2$ より大である. 一方, $\theta_2, \theta_3 \leq \pi/2$ であるから, C_2, C_3 は H と交わらない. このときは明らかに, $C_2 \cap C_3 = \emptyset$ となってしまう, 矛盾である (図 11 参照). 従って, $C_1 \cap \overline{A_2 A_3} = \emptyset$ でなければならない. Q は図 12 の斜線の部分に含まれており, かつ $C_1 \cap \overline{A_2 A_3} = \emptyset$ であるから, L_{12}, L_{13} のどちらかは Q を通り得ないことが容易に検証でき, この場合も矛盾が起こる. 従って, $Q \in \text{int} f$ であり, E^2 -case の証明が完了した.

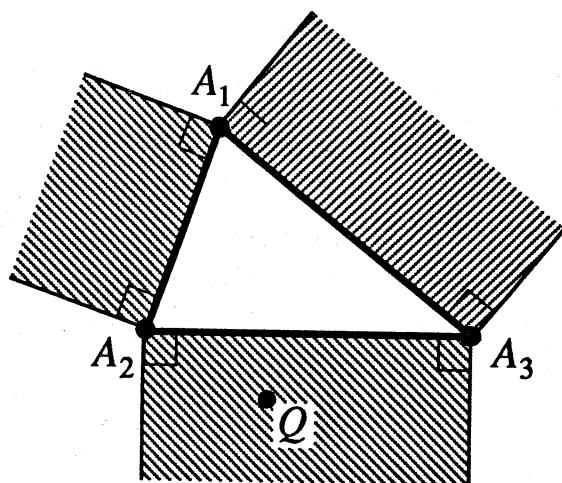


图 10.

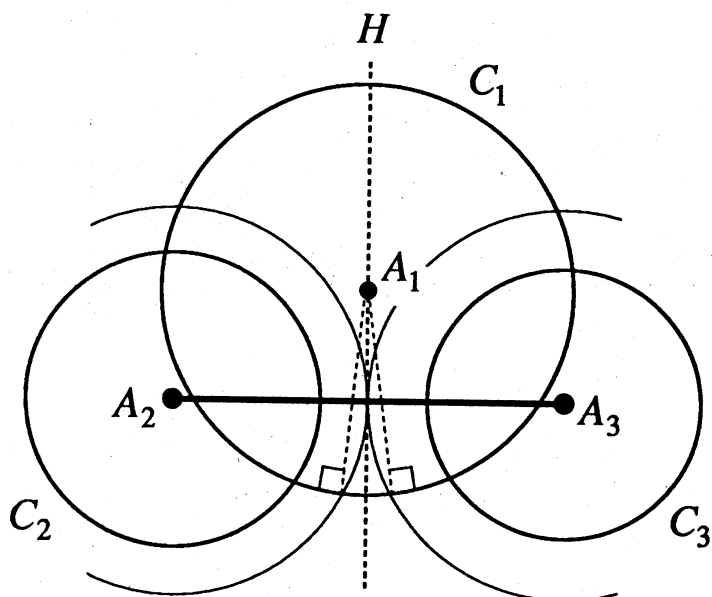


图 11.

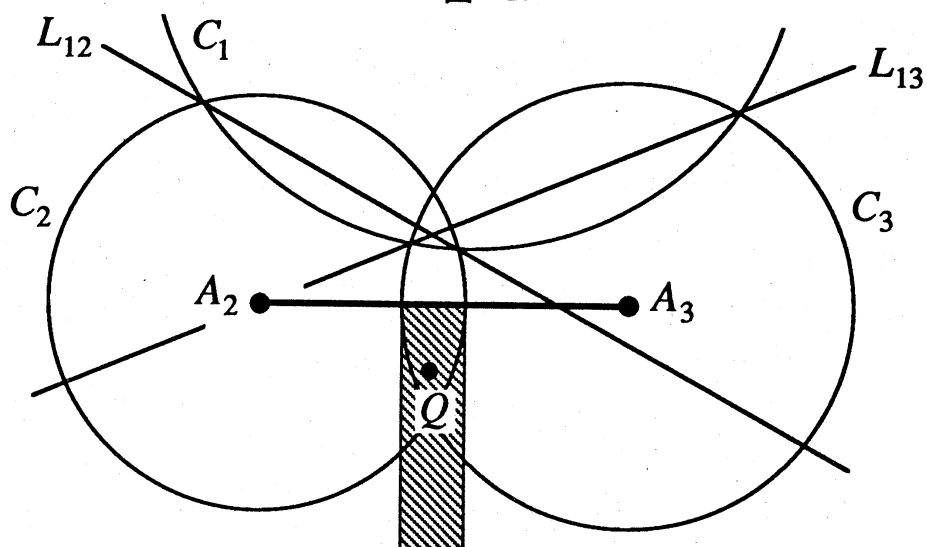


图 12.

次に、 H^2 -case を考える。双曲的平面 H^2 を Poincaré disk D_P と同一視することによって、自然に E^2 内の原点 O を中心とする単位円板上に埋め込むことができる。このとき、 C_1 の中心が原点 O 上にあるとしてよい。 C_1, C'_1 の E^2 -半径を s_1, s'_1 とすると、 $s_1 > s'_1$ が成り立つ。実際、 H^2 -半径が r'_1 の円のうち、 E^2 -半径が最大なもの C''_1 は、その中心が O 上にあり、 C_1 と同心円になる。 $r'_1 < r_1$ より、 C''_1 は C_1 に含まれる。従って、 C''_1 の E^2 -半径 $s''_1 (\geq s'_1)$ は s_1 より小さい。 C_1, C_2, C_3 の E^2 -中心、 H^2 -中心の張る 2-simplices を、それぞれ f_E, f_H とする (図 13 の斜線の部分の総和が f_H)。 E^2 -case の証明より、 C'_1 の E^2 -中心 $v(e)_1$ は $\text{int} f_E$ に含まれる。また、 C'_1 の H^2 -中心 v'_1 は O を基点とし $v(e)_1$ を通る半直線上にあるので $\text{int} f_H$ に含まれる。これで、 H^2 -case の証明も完了した。 $\square$

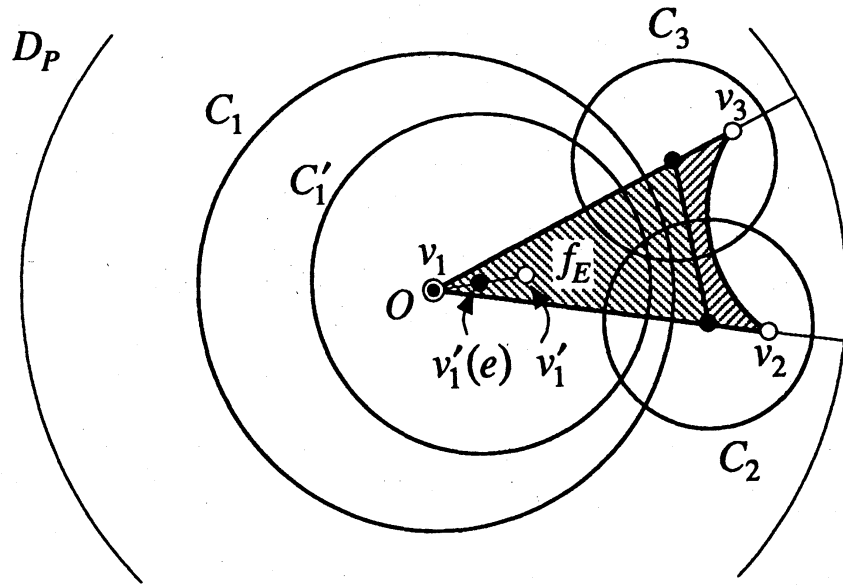


図 13.

以下では、数列 $\{s_n\}$ に対して $s_n \searrow s$ という記号を使うが、これは必ずしも $\{s_n\}$ が単調減少列であることを意味しない。 $s_n \searrow s$ は、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $s_n > s$ であり、かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ であると約束する。記号 $s_n \nearrow s$ についても同様である。

次は、 H^2 -case についてのみ成り立つ補題である。

補題 3. (H^2 -case) $\mathbb{R}_+^n$ の元 $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ を、第 i -成分が $r_i \nearrow \infty$ となるように、変動させたとき、 $\kappa_{\mathbf{r}}(v_i) \nearrow 2\pi$ である。

証明. $f_{i1}, \dots, f_{in} \in \mathcal{F}$ を v_i を頂点に持つ 2-simplices とする。 $(f_{ij})_{\mathbf{r}}$ の頂点 v_i における角度を θ_{ij} とする。補題 2 の証明 (図 11) と同様に、 v_i を中心とする半径 r_i の「円」は、 $(f_{ij})_{\mathbf{r}}$ において v_i の対辺と交わらない (図 14 参照)。従って、 $(f_{ij})_{\mathbf{r}}$ は中心角が θ_{ij} 、半径が r_i の扇形を含む。ゆえに、 $\theta_{ij} \sinh r_i < \text{Area}((f_{ij})_{\mathbf{r}}) < \pi$ であり、 $\theta_{ij} < \pi / \sinh r_i \searrow 0$ ($r_i \nearrow \infty$) と

なる。よって、

$$\kappa_{\mathbf{r}}(v_i) = 2\pi - (\theta_{i1} + \cdots + \theta_{il}) \nearrow 2\pi$$

が成り立つ。□

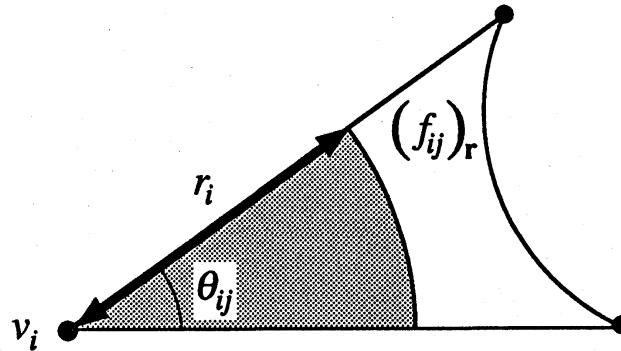


図 14.

次の等式は、よく知られた Gauss-Bonnet の定理である。

$$(1.5) \quad \sum_{v \in \mathcal{V}} \kappa_{\mathbf{r}}(v) + \int_{S_{\mathbf{r}}} K dS_{\mathbf{r}} = 2\pi\chi(S).$$

ここで、 K は $S_{\mathbf{r}}$ 上の Gauss 曲率を表す。従って、 E^2 -case では $K \equiv 0$ 、 H^2 -case では $K \equiv -1$ となる。式 (1.5) を利用して、 E^2 -case と H^2 -case のそれぞれに対し、 $F: \mathbf{R}_+^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ の制限写像 F_0 を定義する。

$$(1.6) \quad E^2\text{-case } (\chi(S) = 0, K \equiv 0).$$

式 (1.5) より、明らかに $\sum_{v \in \mathcal{V}} \kappa_{\mathbf{r}}(v) = 0$ である。従って、写像 F の像は超平面

$$Z = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

に含まれる。任意の $t > 0$ に対し、 $S_{\mathbf{r}}$ と $S_{t\mathbf{r}}$ は相似であるから、 $F(\mathbf{r}) = F(t\mathbf{r})$ が成り立つ。従って、我々は写像 F を $\mathbf{R}_+^n$ 全体で考える必要はなく、 $\mathbf{R}_+^n$ の部分空間

$$\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^n; x_1 + \cdots + x_n = 1\}$$

上で考えれば充分である (図 15 参照)。 F の制限写像 $F|_{\Delta}: \Delta \rightarrow Z$ を F_0 とおく。このとき、 F_0 の定義域 Δ 、値域 Z はともに $\mathbf{R}^{n-1}$ に同相であることに注意せよ。

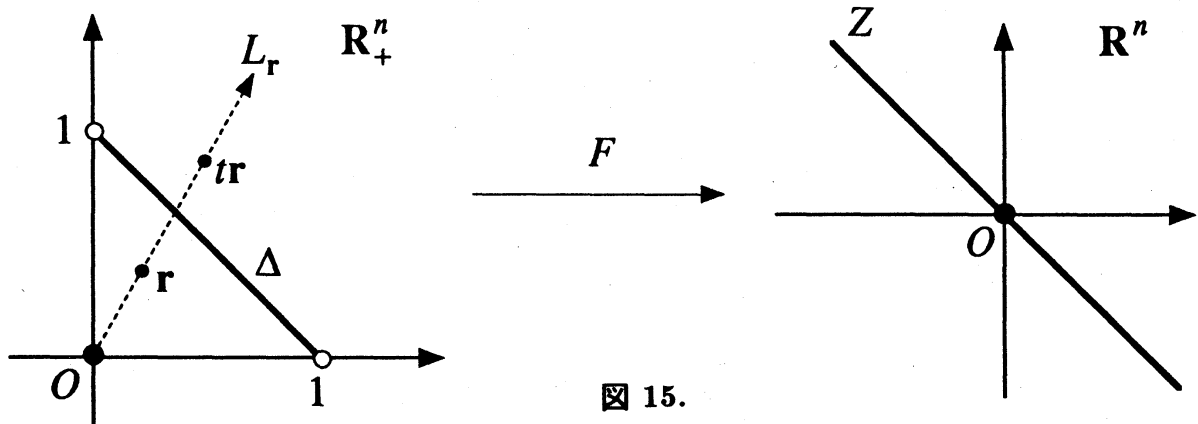


図 15.

(1.7) H^2 -case ($\chi(S) < 0$, $K \equiv -1$).

この場合は、 E^2 -case のように Δ を定義することが出来ない。上で与えた Z に対して、 $F^{-1}(Z) = \Delta$ と定義し、制限写像 $F|_{\Delta} : \Delta \rightarrow Z$ を E^2 -case と同様に、 F_0 で表すことにする。式 (1.5) より、 $r \in \Delta$ であるための必要充分条件は $\text{Area}(S_r) = -2\pi\chi(S)$ である。原点 $O \in \mathbb{R}^n$ を基点とし、 $r \in \mathbb{R}_+^n$ を通過する半直線 $L_r = \{tr; t \geq 0\}$ は必ず Δ と交わる。実際、 $t \searrow 0$ のとき $\text{Area}(S_{tr}) \searrow 0$ であり、補題 3 と式 (1.5) より、 $t \nearrow \infty$ のとき $\text{Area}(S_{tr}) \nearrow -2\pi\chi(S) + 2\pi n$ である。従って、中間値の定理より、 $\text{Area}(S_{tr}) = -2\pi\chi(S)$ となる $t > 0$ が存在する。

補題 4. (H^2 -case) Δ は $\mathbb{R}^{n-1}$ に同相である。

証明. $r = (r_1, \dots, r_n), r' = (r'_1, \dots, r'_n) \in \mathbb{R}_+^n$ に対し、 $r_i > r'_i$ ($i = 1, \dots, n$) と仮定する。補題 2 を繰り返し使用することによって、任意の $f \in \mathcal{F}$ に対し、 $f_{r'}$ を f_r の真部分集合として実現できる (図 16 参照)。従って、 $\text{Area}(S_r) > \text{Area}(S_{r'})$ である。特に、任意の $r \in \mathbb{R}_+^n$ に対し、 $\text{Area}(S_{tr})$ は $t > 0$ に関して単調増加である。よって、 $L_r \cap \Delta$ は 1 点集合である。この事実から、 Δ が $\mathbb{R}^{n-1}$ と同相であることが分かる。□

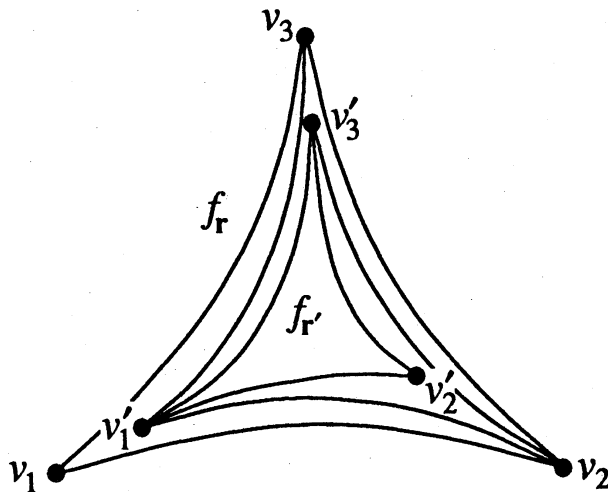


図 16.

$r \rightarrow \partial\Delta$ によって, $r \in \Delta$ の変動範囲が Δ 内のいかなるコンパクト集合にも含まれないのを表す. $r \rightarrow \partial\Delta$ のとき, $F_0(r)$ がどのような振る舞いをするかを調べる. 実際, 次の I または II の場合が成り立つ. Thurston の講義録 [4] においては, II の場合は扱われていないが, このような場合が起こる例も挙げる.

I. $r = (r_1, \dots, r_n) \in \Delta$ が $\mathbf{R}_{\geq 0}^n - \mathbf{R}_+^n$ の点 $s = (s_1, \dots, s_n)$ に収束する場合.

s は $\mathbf{R}_+^n$ の元ではないので, $s_1, \dots, s_n$ の内のいくつかは零である. $\mathcal{V}$ の部分集合 $\mathcal{V}_0$ を

$$\mathcal{V}_0 = \{v_i \in \mathcal{V}; \text{第 } i\text{-成分 } s_i = 0 \text{ (すなわち } r_i \searrow 0) \}$$

で定義する. これ以後, 有限集合 X の元の個数を $|X|$ で表すことにする. $f \in \mathcal{F}$ は $|f \cap \mathcal{V}_0| = 1, |f \cap \mathcal{V}_0| = 2, |f \cap \mathcal{V}_0| = 3$ のとき, それぞれ α, β, γ 型の 2-simplex と言い, $f \cap \mathcal{V}_0$ での f の角も α, β, γ 型と言う (図 17 参照).

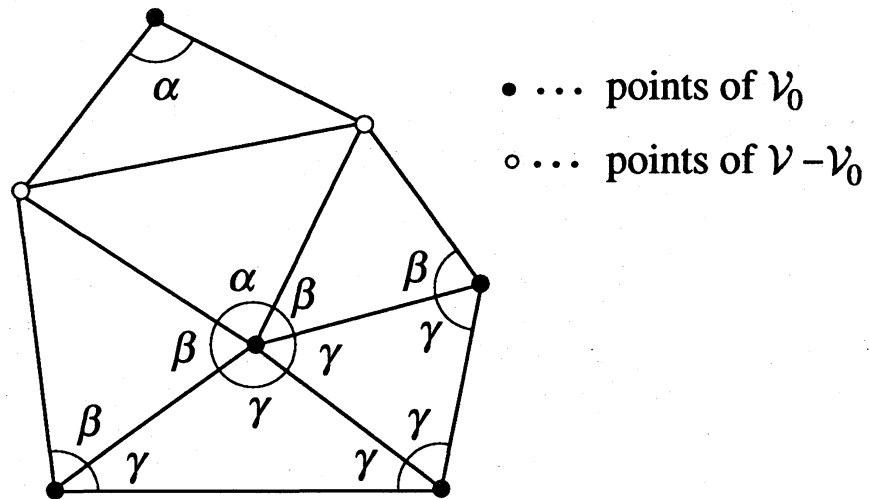


図 17.

$\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta, \mathcal{F}_\gamma, A = \{\alpha_i\}, B = \{\beta_j\}, \Gamma = \{\gamma_k\}$ をそれぞれの型の 2-simplices や角全体からなる集合とする. 図 18 (a), (b), (c) を参考にすれば, 補題 2 より次は自明である.

補題 5. $r \rightarrow s$ のとき, 次が成り立つ.

(i) $\alpha_i \in A$ の対辺を $e(\alpha_i) \in \mathcal{E}$ とすると, $\angle \alpha_i \nearrow \pi - \Theta(e(\alpha_i))$.

(ii) $f \in \mathcal{F}_\beta$ の β 型の角を $\beta_j, \beta_{j'}$ とすると, $\angle \beta_j + \angle \beta_{j'} \nearrow \pi$.

(iii) $f \in \mathcal{F}_\gamma$ の 3 角を $\gamma_k, \gamma_{k'}, \gamma_{k''}$ とすると, H^2 -case では $\angle \gamma_k + \angle \gamma_{k'} + \angle \gamma_{k''} \nearrow \pi$, E^2 -case では $\angle \gamma_k + \angle \gamma_{k'} + \angle \gamma_{k''} = \pi$. $\square$

補題 5 より, $r \rightarrow s$ のときの, α, β, γ 型それぞれの角度の総和は次のような極限を持つ.

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_i \in A} \angle \alpha_i &\nearrow \sum_{\alpha_i \in A} (\pi - \Theta(e(\alpha_i))), \\ \sum_{\beta_j \in B} \angle \beta_j &\nearrow \frac{\pi|B|}{2}, \\ \sum_{\gamma_k \in \Gamma} \angle \gamma_k &\nearrow \frac{\pi|\Gamma|}{3} \quad (\text{H}^2\text{-case}) \quad \left(= \frac{\pi|\Gamma|}{3} \quad (\text{E}^2\text{-case}) \right). \end{aligned}$$

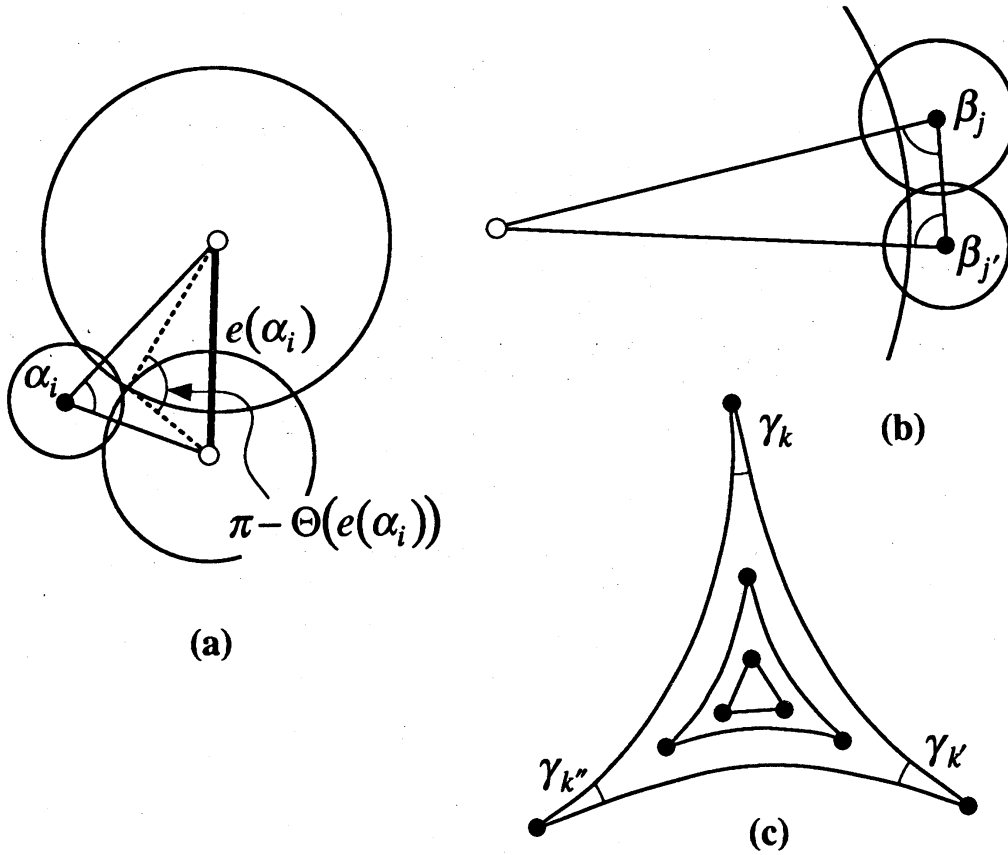


図 18.

$\mathcal{V}_0$ における cone-angles の総和は α, β, γ 型の角度の総和に一致する. 従って, $\mathcal{V}_0$ における curvatures の総和は次のような極限を持つ.

$$(1.8) \quad \sum_{v \in \mathcal{V}_0} \kappa_r(v) \searrow 2\pi|\mathcal{V}_0| - \sum_{\alpha_i \in A} (\pi - \Theta(e(\alpha_i))) - \frac{\pi|B|}{2} - \frac{\pi|\Gamma|}{3} \quad (r \rightarrow s).$$

実際 $\searrow$ であることは, E^2 -case かつ $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\beta = \emptyset$ のとき以外は明かである. この例外的場合は, S の連結性から $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}$ であり, 従って $s = (0, \dots, 0)$ となり, 矛盾が起こるので考える必要はない.

補題 6. $F_0: \Delta \rightarrow Z$ は単射. 特に, Brouwer の領域不変性定理より, F_0 は開写像.

証明. $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n), \mathbf{r}' = (r'_1, \dots, r'_n) \in \Delta, \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ とする. $\mathcal{V}$ の部分集合 $\mathcal{V}_0$ を, $\mathcal{V}_0 = \{v_i \in \mathcal{V}; r_i > r'_i\}$ で定義する. 上と同様の議論 (および補題 2) より, $\sum_{v \in \mathcal{V}_0} \kappa_{\mathbf{r}}(v) > \sum_{v \in \mathcal{V}_0} \kappa_{\mathbf{r}'}(v)$ である. 従って, $F_0(\mathbf{r}) \neq F_0(\mathbf{r}')$. $\square$

$\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$ を, $\mathcal{V}_0$ および $\mathcal{V}_0$ によって張られる $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ の元からなる複体とする (図 19 参照).

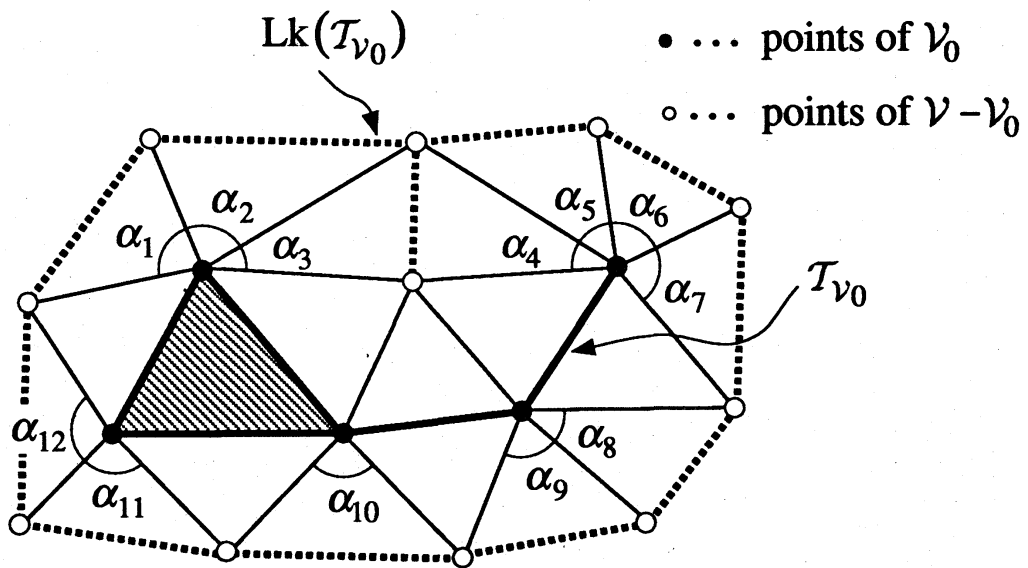


図 19.

$\mathcal{E}_0$ を $\mathcal{V}_0$ によって張られる $\mathcal{E}$ の元全体の集合とする. $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$ のオイラー標数を単に χ_0 で表す. $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$ の定義より,

$$(1.9) \quad \chi_0 = |\mathcal{V}_0| - |\mathcal{E}_0| + |\mathcal{F}_\gamma|.$$

任意の $f \in \mathcal{F}_\gamma$ の 3 辺は全て $\mathcal{E}_0$ の元であり, $f \in \mathcal{F}_\beta$ の場合は 1 辺のみが $\mathcal{E}_0$ の元である. 一方, 任意の $e \in \mathcal{E}_0$ に対し, $\mathcal{F}_\beta \cup \mathcal{F}_\gamma$ 中のちょうど 2 つの元が e を辺として持つので,

$$3|\mathcal{F}_\gamma| + |\mathcal{F}_\beta| = 2|\mathcal{E}_0|$$

が成り立つ. 式 (1.9) より,

$$2\chi_0 = 2|\mathcal{V}_0| - |\mathcal{F}_\beta| - |\mathcal{F}_\gamma| = 2|\mathcal{V}_0| - \frac{|B|}{2} - \frac{|\Gamma|}{3}.$$

また, 式 (1.8) より,

$$(1.10) \quad \sum_{v \in \mathcal{V}_0} \kappa_{\mathbf{r}}(v) \searrow I(\mathcal{V}_0) := 2\pi\chi_0 - \sum_{\alpha_i \in A} (\pi - \Theta(e(\alpha_i))).$$

$\text{Lk}(\mathcal{T}_{\nu_0})$ を $f \in \mathcal{F}_\alpha$ の辺で ν_0 の元を含まないようなものの全体の作る複体とする. $\text{Lk}(\mathcal{T}_{\nu_0})$ は $\mathcal{T}_{\nu_0}$ のカラー近傍の境界である (図 19 参照). $\text{Lk}(\mathcal{T}_{\nu_0})$ の edges の個数 $|\text{Lk}(\mathcal{T}_{\nu_0})^{(1)}|$ は $|A|$ 以下である. 例えば, 図 19 の場合, $|\text{Lk}(\mathcal{T}_{\nu_0})^{(1)}| = 11, |A| = 12$.

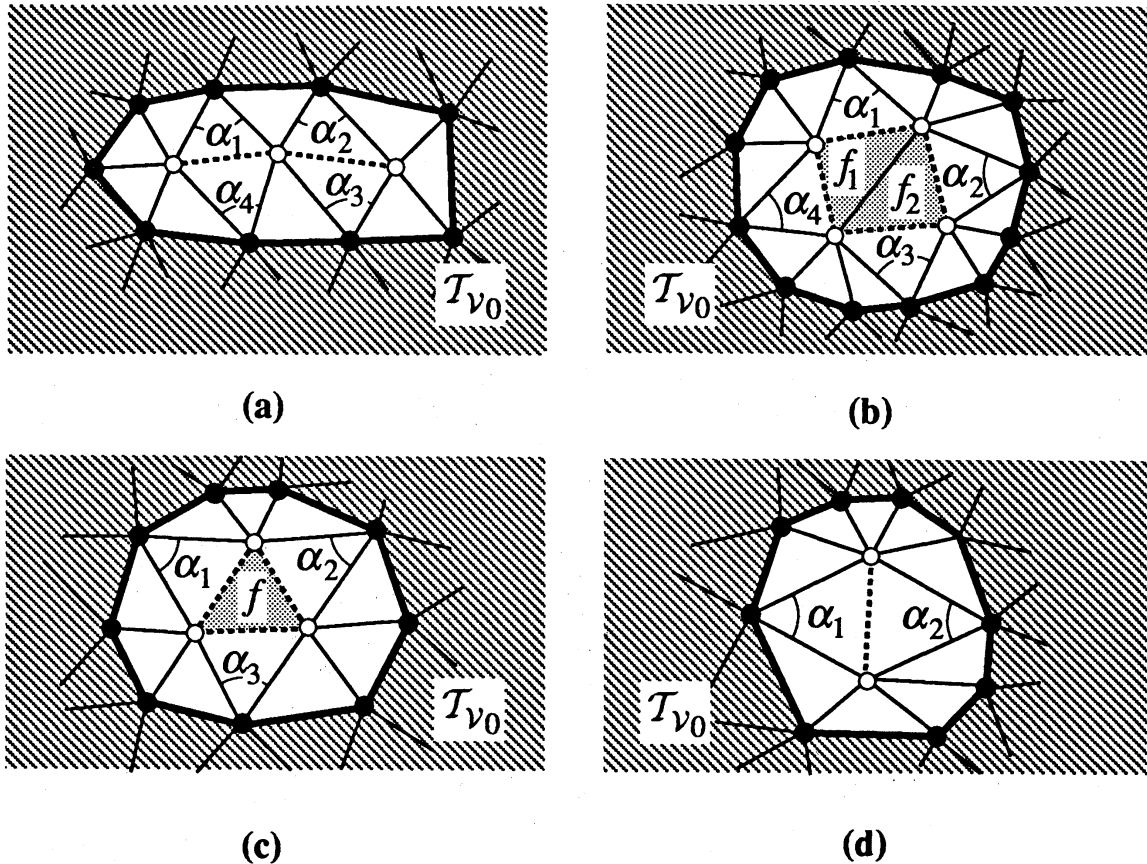


図 20.

補題 7. ν の任意の真部分集合 $\nu_0 \neq \emptyset$ に対し, $I(\nu_0) < 0$.

証明. $\mathcal{T}_{\nu_0}$ は連結であると仮定できる. 連結でないときは, 連結成分ごとに議論を進めればよい. $\chi_0 \leq 0$ のとき, 明らかに $I(\nu_0) < 0$ である. そこで, $\chi_0 = 1$ すなわち $\mathcal{T}_{\nu_0}$ が可縮の場合を考える. $\sum_{\alpha_i \in A} (\pi - \Theta(e(\alpha_i))) \geq \pi|A|/2$ であるから, $|A| \geq 5$ であれば $I(\nu_0) < 0$ が成り立つので, $0 \leq |A| \leq 4$ と仮定する.

$|A| = 4$ のとき, $I(\nu_0)$ の定義より, $\sum_{\alpha_i \in A} (\Theta(e(\alpha_i))) < 2\pi$ と $I(\nu_0) < 0$ とは同値である. $|\text{Lk}(\mathcal{T}_{\nu_0})^{(1)}| = 2$ または 4 であるが, 前者の場合, $S - \mathcal{T}_{\nu_0}$ は可縮である. 実際, $\mathcal{T}_{\nu_0}$ のカラー近傍の境界は「閉じている」(図 20(a) の点線部分は $\text{Lk}(\mathcal{T}_{\nu_0})$). ゆえに, S は S^2 と同相になる. これは矛盾であるから, $|\text{Lk}(\mathcal{T}_{\nu_0})^{(1)}| = 4$ である. このとき, もし $\sum_{\alpha_i \in A} (\Theta(e(\alpha_i))) = 2\pi$ であったならば, 定理 1 の条件 (ii) より, $\text{Lk}(\mathcal{T}_{\nu_0})$ は 2 個の 2-simplices が作る四角形の境界となる. 従って, このときも $S - \mathcal{T}_{\nu_0}$ は可縮になり, 矛盾である. 実際, $\mathcal{T}_{\nu_0}$ のカラー近傍の境界は 2 個の 2-simplices で「塞がれている」(図 20(b) 参照). ゆえに, $\sum_{\alpha_i \in A} (\Theta(e(\alpha_i))) < 2\pi$.

$|A| = 3$ のとき, $|\text{Lk}(\mathcal{T}_{\nu_0})^{(1)}| = 3$. この場合, $\sum_{\alpha_i \in A} (\Theta(e(\alpha_i))) < \pi$ と $I(\nu_0) < 0$ とは同

値である. $\sum_{\alpha_i \in A} (\Theta(e(\alpha_i))) \geq \pi$ であったならば, 定理 1 の条件 (i) より, $\text{Lk}(T_{V_0})$ はある 2-simplex の境界となる (図 20(c) 参照). 従って, $S - T_{V_0}$ は可縮であり矛盾が起こる. ゆえに, $\sum_{\alpha_i \in A} (\Theta(e(\alpha_i))) < \pi$.

$|A| = 2$ (resp. 0) の場合は, $|\text{Lk}(T_{V_0})^{(1)}| = 1$ (0) であり, $S - T_{V_0}$ が明らかに可縮になるので (図 20(d) 参照) 起こり得ない. 以上で, 全ての場合に $I(V_0) < 0$ が成り立つことが示された. $\square$

II. $r \rightarrow \partial\Delta$ のいかなる部分変動も I と異なる場合.

明らかに, E^2 -case では I の場合しか起こらない. H^2 -case では, II の場合が実際に起こるのを例で示す.

充分小さな $\varepsilon > 0$ に対して, $H_\varepsilon^{n-1} = \{(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{n-1}; x_2^2 + \dots + x_n^2 < \varepsilon\}$ とおく. 任意の $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+ \times H_\varepsilon^{n-1} \subset \mathbb{R}_+^n$ に対応する双曲的 cone-surface S_r を考える. v_1 を頂点に持たない 2-simplex $f \in \mathcal{F}$ に対して, f_r の各辺の長さは 2ε 以下である. 一方, v_1 を頂点に持つ 2-simplex $f \in \mathcal{F}$ に対し, r_1 をどれだけ大きく取っても, f_r の 1 辺は長さが 2ε 以下である. 従って, 全ての $\text{Area}(f_r)$ ($f \in \mathcal{F}$) が任意に小さくなるように $\varepsilon > 0$ を選ぶことができる. 従って, 任意の $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+ \times H_\varepsilon^{n-1}$ に対して, $\text{Area}(S_r) < -2\pi\chi(S)$ である. 特に, $\Delta \cap (\mathbb{R}_+ \times H_\varepsilon^{n-1}) = \emptyset$ (図 21 の斜線部分が $\mathbb{R}_+ \times H_\varepsilon^{n-1}$). 任意の $s > 0$ に対して, $r(s) = f(s) \cdot (1, s, \dots, s) \in \Delta$ であるように $f(s) > 0$ を選ぶことができる.

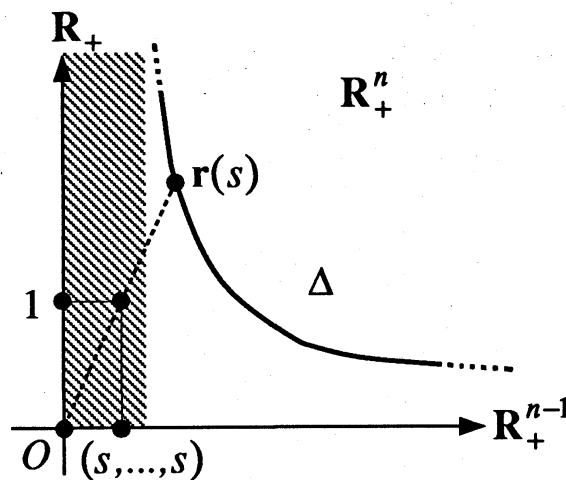


図 21.

$f(s) \cdot (s, \dots, s) \notin H_\varepsilon^{n-1}$ であるから, $r(s)$ の第 i -成分 ($i = 2, \dots, n$) は $r_i(s) = f(s)s \geq \varepsilon/\sqrt{n-1}$ となる. 一方, $r_1(s) = f(s) > \varepsilon/(s\sqrt{n-1}) \nearrow \infty$ ($s \searrow 0$) である. 従って, $r(s)$ のどの任意の成分も $r(s) \rightarrow \partial\Delta$ のとき, 零に近づかないので, I の場合は起こらない.

この例からも分かるように, I の場合が起こらないとき (必要ならば $r \rightarrow \partial\Delta$ の部分変動を取ることににより) r のいくつかの成分に対し $r_i \nearrow \infty$ である. 一方, $r \in \Delta$ に対して,

$\text{Area}(S_{\mathbf{r}}) = -2\pi\chi(S)$ であるから, 全部の成分が $r_i \nearrow \infty$ とはならない. 従って,

$$\mathcal{V}_1 = \{v_i \in \mathcal{V}; \text{第 } i\text{-成分は } r_i \nearrow \infty \text{ とはならない}\}$$

は $\mathcal{V}$ の空でない真部分集合である. $\mathbf{r} \in \Delta$ のときは, $\sum_{v \in \mathcal{V}} \kappa_{\mathbf{r}}(v) = 0$ であるから補題 3 より,

$$(1.11) \quad \sum_{v \in \mathcal{V}_1} \kappa_{\mathbf{r}}(v) = - \sum_{v \in \mathcal{V} - \mathcal{V}_1} \kappa_{\mathbf{r}}(v) \searrow \text{II}(\mathcal{V}_1) := -2\pi|\mathcal{V} - \mathcal{V}_1|.$$

I, II の場合に関する以上の考察から, F_0 の像 $F_0(\Delta)$ を決めることが出来る. $\mathcal{V}$ の空でない真部分集合 $\mathcal{V}' = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ に対して, Z の半空間 $H_I(\mathcal{V}')$, $H_{II}(\mathcal{V}')$ を

$$H_I(\mathcal{V}') = \{(x_1, \dots, x_n) \in Z; x_{i_1} + \dots + x_{i_m} \geq I(\mathcal{V}')\},$$

$$H_{II}(\mathcal{V}') = \{(x_1, \dots, x_n) \in Z; x_{i_1} + \dots + x_{i_m} \geq \text{II}(\mathcal{V}')\}$$

で定義する. Z 内のコンパクト凸多面体 P を

$$P = \bigcap_{\mathcal{V}'} H_I(\mathcal{V}') \quad (\text{E}^2\text{-case}), \quad P = \bigcap_{\mathcal{V}'} (H_I(\mathcal{V}') \cap H_{II}(\mathcal{V}')) \quad (\text{H}^2\text{-case})$$

で定義する. ただし, $\mathcal{V}'$ は $\emptyset \neq \mathcal{V}' \subsetneq \mathcal{V}$ をみたすもの全てを取る. 補題 7 より, $(0, \dots, 0) \in \text{int} H_I(\mathcal{V}')$. $\text{II}(\mathcal{V}') < 0$ より, $(0, \dots, 0) \in \text{int} H_{II}(\mathcal{V}')$. 従って, $\text{int} P$ は原点 $(0, \dots, 0)$ を含む. また, 式 (1.10), (1.11) より, $F_0(\Delta) \subset \text{int} P$.

定理 1 の証明. 補題 6 より, F_0 は開写像であるから, $F_0(\Delta)$ は $\text{int} P$ の開部分集合である. 一方, 式 (1.10), (1.11) より, $\mathbf{r} \rightarrow \partial\Delta$ のとき, $F(\mathbf{r}) \rightarrow \partial P$ である. 従って, $F_0(\Delta)$ は $\text{int} P$ の閉部分集合でもある. ゆえに, $F_0(\Delta) = \text{int} P$. F_0 の単射性 (補題 6) および $(0, \dots, 0) \in \text{int} P$ より, $F_0(\mathbf{r}) = (0, \dots, 0)$ をみたす $\mathbf{r} \in \Delta$ が唯一つ存在する. (1.2) で注意したように, この事実は定理 1 の主張と同値である. $\square$

§2. $\chi(S) > 0$ の場合

この節では, $\chi(S) > 0$ すなわち S が 2-sphere の場合を考える. Rodin-Marden [3] の証明は, Thurston による E^2 -case の証明がベースになっている. 以下では, S^2 -case の証明がどの様にして E^2 -case の証明に帰着されるかを説明する.

定理 2. (S^2 -case) S は S^2 -構造を持つ 2-sphere であり, 写像 $\Theta: \mathcal{E} \rightarrow [0, \pi/2]$ は次の 2 条件 (i), (ii) をみたすとする.

(i) $e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{E}$ を $e_1 + e_2 + e_3$ が S 内の loop を表すような任意の 3 組とすると, $\sum_{i=1}^3 \Theta(e_i) < \pi$.

(ii) $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathcal{E}$ を $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ が S 内の loop を表すような任意の 4 組とすると, $\sum_{i=1}^4 \Theta(e_i) < 2\pi$.

このとき, data $\mathcal{T}, \Theta$ を実現するような circle pattern が S 上の等角変換を除いて一意に存在する.

証明の概略. $f_0 \in \mathcal{F}$ を 1 つ固定し, f_0 の vertices が v_1, v_2, v_3 となるように $\mathcal{V}$ の元に順番を付ける. 辺の長さが同じ, 2 つの E^2 -正三角形 T, T' の境界を等長的に貼り合わせて出来た euclidean cone-surface を S_E とする. S_E は 2-sphere S と同相であり, cone-angle が $2\pi/3$ の cone-singular points を 3 個持つ. S_E 上の向きを固定する. $h: S \rightarrow S_E$ は向きを保つ同相写像で, $\{v_1, v_2, v_3\}$ を S_E の cone-singular points の集合上に写すものとする (図 22 参照).

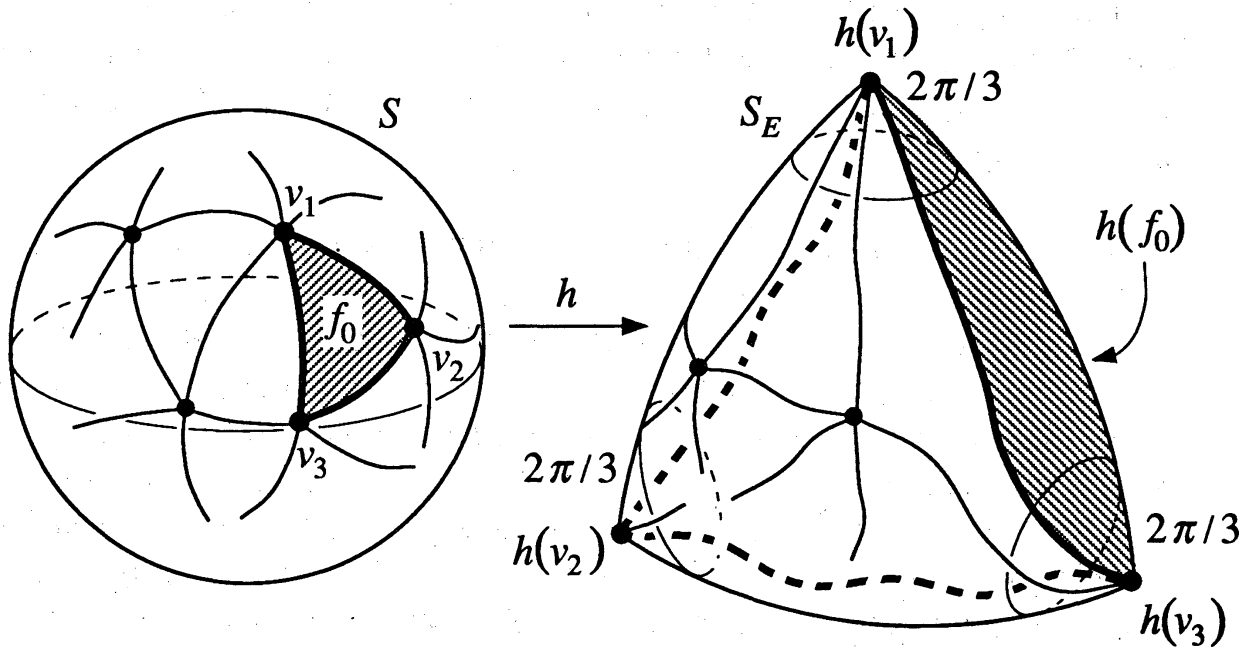


図 22.

各 $h(v_i)$ ($i = 1, 2, 3$) における S_E の curvature は $2\pi - 2\pi/3 = 4\pi/3$ である. $F_0: \Delta \rightarrow Z$ を第 1 節, (1.6) の E^2 -case と同様に定義された単射連続写像とする. 特に, $\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n; x_1 + \dots + x_n = 1\}$ である. $\mathbf{r} \in \Delta$ に対応する $S_{\mathbf{r}}$ が euclidean cone-surface S_E と一致する為の必要充分条件は

$$F_0(\mathbf{r}) = \mathbf{p} := \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 0, \dots, 0 \right)$$

である.

補題 8. $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, すなわち $p_i = 4\pi/3$ ($i = 1, 2, 3$), $p_j = 0$ ($j = 4, \dots, n$), とおく. このとき, $\mathcal{V}$ の任意の真部分集合 $\mathcal{V}_0 = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\} \neq \emptyset$ に対し,

$$(2.1) \quad p_{i_1} + \dots + p_{i_m} > I(\mathcal{V}_0).$$

証明. (2.1) の左辺は明らかに零以上である. 補題 7 の証明と同様に $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$ は連結であるとする. $\chi_0 = 1$ かつ $|A| \leq 4$ の場合のみを考える. それ以外の場合は, 補題 7 の証明と同様, $I(\mathcal{V}_0) < 0$ である.

$|A| = 4$ とする. $|\text{Lk}(\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0})^{(1)}| = 4$ のときは, 定理 2 の条件 (ii) より $\sum_{\alpha_i \in A} (\Theta(e(\alpha_i))) < 2\pi$ であるから, $I(\mathcal{V}_0) < 0$. $|\text{Lk}(\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0})^{(1)}| = 2$ のとき, $\mathcal{V} - \mathcal{V}_0$ は 3 個の元からなる (図 20(a) 参照). それらの元は $\mathcal{T}$ の 2-simplex を張らないので, $\{v_1, v_2, v_3\}$ とは一致しない. よって, v_1, v_2, v_3 のうち少なくとも 1 個は $\mathcal{V}_0$ に含まれる. 従って, $p_{i_1} + \dots + p_{i_m} \geq 4\pi/3$ である. 一方, $I(\mathcal{V}_0) = -2\pi + \sum_{\alpha_i \in A} \Theta(e(\alpha_i)) \leq 0$ であるので, 不等式 (2.1) が成立する.

$|A| = 3$ のとき, 条件 (i) より $\sum_{\alpha_i \in A} (\Theta(e(\alpha_i))) < \pi$ である. 従って, $I(\mathcal{V}_0) = -\pi + \sum_{\alpha_i \in A} \Theta(e(\alpha_i)) < 0$.

$|A| = 2$ (resp. 0) とする. $\mathcal{V} - \mathcal{V}_0$ は 2 個 (1 個) の元からなる (図 20(d) 参照) ので, v_1, v_2, v_3 のうち少なくとも 1 個 (2 個) は $\mathcal{V}_0$ に含まれている. 従って, $p_{i_1} + \dots + p_{i_m} \geq 4\pi/3$ ($8\pi/3$) である. 一方, $I(\mathcal{V}_0) = \Theta(e(\alpha_1)) + \Theta(e(\alpha_2)) \leq \pi$ ($I(\mathcal{V}_0) = 2\pi$) であるので, 不等式 (2.1) が成立する. $\square$

P を第 1 節の E^2 -case と同様に定義された, Z 内の凸多面体とする. 補題 8 より, $\mathbf{p} \in \text{int} P = F_0(\Delta)$. 従って, $\mathbf{r}_0 = F_0^{-1}(\mathbf{p})$ に対応する $S_E = S_{\mathbf{r}_0}$ 上の circle pattern $\mathcal{C}_0 = \{C_1, \dots, C_n\}$ が data $h(\mathcal{T})$, Θ を実現する唯一つのものである. v_1, v_2, v_3 を vertices に持つ 2-simplex $f_0 \in \mathcal{F}$ に対し, $T_0 := (f_0)_{\mathbf{r}_0}$ は $h(v_1), h(v_2), h(v_3)$ を vertices に持つ S_E 内の geometric 2-simplex である. 従って, T_0 は正三角形であり, 反対側の $T_1 := S_E - \text{int} T_0$ も正三角形になる. 補題 2 の証明 (図 11) と同様に, 任意の C_j ($j = 4, \dots, n$) は T_0 と交わらないので $\text{int} T_1$ に含まれる. $g: T_1 \rightarrow E^2 = \mathbb{C}$ を, T_1 の重心を $\mathbb{C}$ の原点 O に写す, 向きを逆にする等長的埋め込みとする. 直観的に言えば, g が向きを逆にする写像なので, T_1 は $\mathbb{C}$ 上に「伏せた」状態に置かれる. $\mathcal{C}_0$ の T_1 への制限 $\mathcal{C}_0|_{T_1}$ を考える. 正三角形 $T_2 := g(T_1)$ 内の $1/6$ -円 $g(C_1|_{T_1}), g(C_2|_{T_1}), g(C_3|_{T_1})$ と同じ半径の同心円を D_1, D_2, D_3 とする. このとき,

$$\mathcal{C}_1 = g(\mathcal{C}_0 - \{C_1, C_2, C_3\}) \cup \{D_1, D_2, D_3\}$$

は data Θ を実現する $\mathbb{C}$ 上の circle pattern である. S を $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ 内の単位円 $\{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}; |z|^2 + (t-1)^2 = 1\}$ と同一視し, $\varphi: S - \{\text{n.p.}\} \rightarrow \mathbb{C}$ を stereographic projection とする. このとき, $\mathcal{C} = \varphi^{-1}(\mathcal{C}_1)$ は data $\mathcal{T}$, Θ を実現する S 上の circle pattern である. $\mathcal{C}_1$ は $\mathbb{C}$ 上に「伏せて」置かれていたが, φ の引き戻しによって, それが S の表側に現れることに注意せよ.

後は, $\mathcal{C}$ が S の等角変換を除いて一意に存在することを証明すればよい. $\mathcal{C}'$ を data $\mathcal{T}$, Θ を実現する S 上の任意の circle pattern とする. $\mathcal{C}'_1 = \varphi(\mathcal{C}')$ 内の, v_1, v_2, v_3 に対応する円を D'_1, D'_2, D'_3 とする. D_1, D_2, D_3 の間の intersection angles と D'_1, D'_2, D'_3 の間の intersection angles は, ともに Θ から決まるものなので, 一致する. ゆえに, $\mathbb{C}$ 上の Möbius 変換 γ で $\gamma(D'_i) = D_i$ ($i = 1, 2, 3$) をみたすものが存在する. (このような Möbius 変換の存在の証明は読者に委ねる. D'_i の中心を D_i の中心に写すような Möbius 変換は存在するが, 一般にこの変換は γ と一致しない.) $\mathcal{C}_0$ の S_E 上での一意性より, $\gamma(\mathcal{C}'_1)|_{T_2}$ の g による引き戻し $g^{-1}(\gamma(\mathcal{C}'_1)|_{T_2})$

は $C_0|_{T_1}$ と一致する. 従って, $\gamma(C'_1)|_{T_2} = g(C_0|_{T_1}) = C_1|_{T_2}$. ゆえに, $\gamma(C'_1) = C_1$ が成り立つ. $\bar{\gamma}: S \rightarrow S$ を γ に対応する S 上の等角変換とすると, 明らかに $\bar{\gamma}(C') = C$. これで, 一意性も証明できた. $\square$

参考文献

1. E. M. Andreev, Convex polyhedra in Lobacevskii space, Math. USSR Sbornik **10** (1970), 413-440.
2. E. M. Andreev, Convex polyhedra of finite volume in Lobacevskii space, Math. USSR Sbornik **12** (1970), 255-259.
3. A. Marden and B. Rodin, On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem, Computational Method and Function Theory, Proceeding, Valparaiso 1989, Lect. Notes in Math., vol. 1435, Springer-Verlag 1990, pp. 103-115.
4. W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Lect. Notes, Princeton Univ., 1978.