

変換ネットについてのいくつかの性質

Y. Kunimochi[†] T. Inomata[†] G. Tanaka[†]

国持 良行 猪股俊光 田中源次郎
(静岡理工科大学・理工)

あらまし ネット(特にペトリネット)は, 計算機による動作解析のモデルとしてよく用いられる. ここでは, まず, 変換ネット間の同型写像を定義する. 次に, 変換ネットと呼ぶネットを用いて, 半群とその半群上の変換を表現する. 1 節では, これらに関連する用語を定義し, ネット上の自己同型写像全体が群をなすことを示す. 続いて, 2 節では, 任意の有限群 G に対してある変換ネット N が存在し, N 上の自己同型写像全体が G と(群として)同型になることを示す. 最後に, 3 節では変換ネットをもとに得られる L 型ペトリネット言語が正規言語になることを示す.

1 諸定義といくつかの性質

本節では, 諸定義とそれらから導かれるいくつかの性質を述べる. なお, 以下では, 非負整数の集合を $\mathbf{N}$ で表す. さらに $\mathbf{N} - \{0\}$ と $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ を, それぞれ $\mathbf{N}^+$ と ω で表す. まず, (ペトリ) ネットやそれに関する言語について定義する.

定義 1.1 以下の (i) ~ (v) を満たす 4 項対 (P, T, A, W) のことをネットと呼ぶ. さらに, (vi) を満たす 5 項対 (P, T, A, W, μ) のことをペトリネットと呼ぶ.

(i) P はプレース (place) の有限集合であり, (ii) T はトランジション (transition) の有限集合であり, そして (iii) $P \cap T = \emptyset$ かつ $P \cup T \neq \emptyset$ を満たす. (iv) $A \subset (P \times T) \cup (T \times P)$ はアーク (arc) の集合であり, (v) W は重み付け関数と呼ぶ, A から $\mathbf{N}^+$ への関数である. (vi) μ はマーキング (marking) (または, 拡張マーキング) と呼ばれる, P から $\mathbf{N}$ への (または, P から ω への) 関数である. ■

(v) について, アーク $a \in A$ に対して, $W(a)$ を a の重さ と呼ぶ. また, $a = (p, t) \in A \cap (P \times T)$ と表されているとき, $W(a)$ を $W((p, t))$ と書く代わりに, $W(p, t)$ と書く. 同様に, $a = (t, p) \in A \cap (T \times P)$ と表されているとき, $W(a)$ を $W((t, p))$ と書く代わりに, $W(t, p)$ と書くことにする.

(vi) について, 通常のペトリネットのマーキングは, P から $\mathbf{N}$ への関数であるが, 本論文では, ∞ を値として取り得るものとし, これを拡張マーキングと呼び, 通常のマーキングと区別している.

[†] Department of Computer Science, Shizuoka Institute of Science and Technology, Fukuroi-shi, Japan, 437

記法 1.1 $N = (P, T, A, W)$ をネットとする。このとき、

プレース $p \in P$ に対して、 p への入力トランジション全体 $(\{t \in T | (t, p) \in A\})$ を $\cdot p$ で表し、 p からの出力トランジション全体 $(\{t \in T | (p, t) \in A\})$ を $p \cdot$ で表す。

トランジション $t \in T$ に対して、 t への入力プレース全体 $(\{p \in P | (p, t) \in A\})$ を $\cdot t$ で表し、 t からの出力プレース全体 $(\{p \in P | (t, p) \in A\})$ を $t \cdot$ で表す。 ■

定義 1.2 $N = (P, T, A, W)$ をネットとし、 μ をマーキングとする。このとき、

(i) トランジション $t \in T$ に対して、

$$(\forall p) \{p \in \cdot t \implies W(p, t) \leq \mu(p)\} \quad (1)$$

が成立するとき、 t はマーキング μ のもとで発火可能という。このとき、遷移関数 $\delta_N(\mu, t) = \mu'$ を以下のように定義し、 $\mu \xrightarrow{t} \mu'$ と表す。

$$\mu'(p) = \begin{cases} \mu(p) - W(p, t) & p \in \cdot t - t \text{ のとき} \\ \mu(p) + W(t, p) & p \in t \cdot - \cdot t \text{ のとき} \\ \mu(p) - W(p, t) + W(t, p) & p \in \cdot t \cap t \cdot \text{ のとき} \\ \mu(p) & \text{その他のとき} \end{cases} \quad (2)$$

また、この t に関するマーキングの書き換えを、 t の発火ということもある。

(ii) トランジションの列 $\beta = t_1 t_2 \cdots t_k$ ($k = 0$ すなわち β が空列の場合を含む) に対して、 $\mu_0 = \mu$ かつ $\mu_{i-1} \xrightarrow{t_i} \mu_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) が成り立つとき、 β は μ からの発火列であるという。そして、 μ_k は μ から (β によって) 可達であるという。このとき、 $\delta_N(\mu, \beta)$ を μ_k で定義し、 $\mu \xrightarrow{\beta} \mu_k$ または $\mu \xrightarrow{*} \mu_k$ と表す。また、 μ から可達なマーキングの集合を $R_N(\mu)$ と書く。

(iii) Σ をアルファベット (alphabet) と呼ばれる、記号の空でない有限集合とする。また、 $\sigma: T \rightarrow \Sigma$ をラベリング関数とする。さらに、 F は任意のマーキングの集合とする。このとき、

$$L = \{\sigma(t_1)\sigma(t_2)\cdots\sigma(t_k) | t_1 t_2 \cdots t_k \in T^* \text{ かつ } \delta_N(\mu, t_1 t_2 \cdots t_k) \in F\} \quad (3)$$

を、(μ を初期マーキング、 F を最終状態集合とする) N の **L 型ペトリネット言語** [1] と呼び、 $L_N^\sigma(\mu, F)$ と表す。なお、ここでは、 $L_N^\sigma(\mu, F)$ の正規性のみを議論している。 σ を恒等写像 1 とした場合の言語 $L_N^1(\mu, F)$ が正規であることと任意の σ について正規であることは同値である。そこで、以後 T 自身を Σ (つまり σ は恒等写像) とみなして、言語 $L_N^1(\mu, F)$ を **L 型ペトリネット言語** と定義し、単に $L_N(\mu, F)$ と表すことにする。 ■

定義 1.3 以下の (i) ~ (v) を満たす 5 項対 $(Q, \delta, \Sigma, s, F)$ のことを **有限状態機械 (finite state machine)** という。

(i) Q は状態 (state) の有限集合であり、(ii) Σ はアルファベットである。(iii) δ は遷移関数と呼ばれる、 $Q \times \Sigma$ から Q への関数である。(iv) $s \in Q$ は初期状態 (initial state) であり、(v) $F \subset Q$ は最終状態 (final state) の集合である。

以下では、語 $w \in \Sigma^*$ に対しても遷移関数 $\delta: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q: (q, w) \mapsto \delta(q, w)$ が次の方法で定義されるものとする:

$$\delta(q, w) = \begin{cases} \delta(\delta(q, x), w') & w = xw' (x \in \Sigma \text{ と } w' \in \Sigma^* \text{ の接続}) \\ q & w = \lambda (\text{空語}) \end{cases} \quad (4)$$

有限状態機械 $C = (Q, \delta, \Sigma, s, F)$ によって生成される言語 $L(C)$ とは $L(C) = \{\beta \in \Sigma^* | \delta(s, \beta) \in F\}$ のことである。そして、有限状態機械によって生成される言語のことを正規言語という。 ■

ここで、ペトリネット言語と有限状態機械の関連について述べる。ネット $N = (P, T, A, W)$ に対して、 μ_0 から可達なマーキングの集合 $\mathbf{R}_N(\mu_0)$ が有限集合であるならば、一つの有限状態機械 $C_N(\mu_0, F)$ を構成することができる: 状態集合 Q として $\mathbf{R}_N(\mu_0)$ を、アルファベット Σ として T そのものを、遷移関数 δ として δ_N を、初期状態 s として μ_0 を、最終状態集合 F として $\mathbf{R}_N(\mu_0)$ の任意の部分集合を、それぞれ採用して得られる 5 項対 $C_N(\mu_0, F) = (\mathbf{R}_N(\mu_0), T, \delta_N, \mu_0, F)$ は有限状態機械である。よって、 N のペトリネット言語 $L_N(\mu_0, F)$ は、 $C_N(\mu_0, F)$ によって生成される正規言語 $L(C_N(\mu_0, F))$ と一致する。

続いて、ネット上の同型写像に関する定義を行なう。なお、 P 上、 T 上、および A 上の写像は、引数を左から写像に適用するものとする。

定義 1.4 $N_1 = (P_1, T_1, A_1, W_1)$ と $N_2 = (P_2, T_2, A_2, W_2)$ はネットとする。このとき、写像 $\alpha: P_1 \rightarrow P_2$ と $\beta: T_1 \rightarrow T_2$ の対 $\varphi = (\alpha, \beta)$ が次を満たすならば、 N_1 から N_2 への準同型 (homomorphism) と呼ぶ。

$$(\forall a)\{a \in A_1 \implies (a)\tilde{\varphi} \in A_2 \text{ かつ } W_2((a)\tilde{\varphi}) \leq W_1(a)\} \quad (5)$$

但し、 φ に対して全射 $\tilde{\varphi}: A_1 \rightarrow A_2$ を、

$$(a)\tilde{\varphi} = \begin{cases} ((p)\alpha, (t)\beta) & a = (p, t) \in A_1 \cap (P_1 \times T_1) \text{ のとき} \\ ((t)\beta, (p)\alpha) & a = (t, p) \in A_1 \cap (T_1 \times P_1) \text{ のとき} \end{cases} \quad (6)$$

で定義する (以後、誤解を生じない場合には、 $(a)\tilde{\varphi}$ を単に $(a)\varphi$ と書く)。 ■

定義 1.5 $\varphi = (\alpha, \beta): N_1 \rightarrow N_2$ を準同型とする。 α と β がともに、全射であるとき、 φ は上への準同型と呼ぶ。さらに、 φ が、

$$(\forall a)\{a \in A \implies W_2((a)\varphi) = W_1(a)\} \quad (7)$$

を満たすとき、 φ は整合的 (well-formed) 準同型と呼ばれる。 ■

定義 1.6 ネット N_1 から N_2 への整合的準同型 $\varphi = (\alpha, \beta)$ は、 α と β がともに、単射であるとき、同型写像 (isomorphism) と呼ばれる。とくに、 $N_1 = N_2 = N$ のときは、 N の自己同型 (automorphism) と呼ばれる。また、 N の自己同型全体を $\text{Aut}(N)$ で表す。 ■

まず、上に定義した $\text{Aut}(N)$ は、

$$(id_P, id_T) \in \mathbf{Aut}(N) \quad (8)$$

であるから, $\mathbf{Aut}(N) \neq \emptyset$ である. ここに, $id_P: P \rightarrow P$ と $id_T: T \rightarrow T$ は恒等写像である. なお, 以下では, $(id_P, id_T) \in \mathbf{Aut}(N)$ を $1_{\mathbf{Aut}(N)}$ (誤解を生じないときは単に 1) と書くことにする. 続いて, $\mathbf{Aut}(N)$ が群をなすことを示す.

性質 1.1

1. 2つの自己同型の各要素の合成して得られる組も自己同型になる, つまり

$$\varphi_1 = (\alpha_1, \beta_1), \varphi_2 = (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbf{Aut}(N) \implies (\alpha_1 \cdot \alpha_2, \beta_1 \cdot \beta_2) \in \mathbf{Aut}(N) \quad (9)$$

が成り立つので, $\mathbf{Aut}(N)$ 上の 2 項演算 $\cdot$ を次のように定義できる: 任意の 2 要素 φ_1, φ_2 に対し, $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_1 \cdot \alpha_2, \beta_1 \cdot \beta_2)$ ($\cdot$ は写像の合成を表すが, 以下では特に注意を必要とする場合以外は, $\cdot$ を省略する).

2. このとき, $(\mathbf{Aut}(N), \cdot)$ は群をなす. 単位元は (id_P, id_T) であり, 任意の元 $\varphi = (\alpha, \beta)$ の逆元 φ^{-1} が一意に存在し, $\varphi^{-1} = (\alpha^{-1}, \beta^{-1})$ と表される. ■

1. について 式 (9) が成り立つことを示す.

$\varphi_i = (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbf{Aut}(N)$ ($i = 1, 2$) であることから, $\alpha_i: P \rightarrow P$ と $\beta_i: T \rightarrow T$ は, ともに全単射, すなわち置換となる. したがって, $\alpha_1 \alpha_2: P \rightarrow P$ と $\beta_1 \beta_2: T \rightarrow T$ も全単射となる. さらに, φ_1 は整合的準同型だから,

$$a \in A \implies (a)\varphi_1 \in A \text{ かつ } W((a)\varphi_1) = W(a)$$

φ_2 も整合的準同型だから,

$$(a)\varphi_1 \in A \implies W((a)\varphi_1\varphi_2) = W((a)\varphi_1)$$

よって,

$$a \in A \implies (a)\varphi_1\varphi_2 \in A \text{ かつ } W((a)\varphi_1\varphi_2) = W((a)\varphi_1) = W(a)$$

従って, $\varphi_1\varphi_2$ は整合的準同型である. よって, (9) が成り立つ.

以上のように, (8) と (9) から $\mathbf{Aut}(N)$ における演算 (合成) $\cdot$ を $(\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 \cdot \alpha_2, \beta_1 \cdot \beta_2)$ で定義すると, $(\mathbf{Aut}(N), \cdot)$ はモノイドをなす ($\cdot$ が結合律を満たすことは明らかである). なお, 単位元は, 1 である.

2. について 任意の元 φ に逆元が存在することを示す, すなわち,

$$\varphi = (\alpha, \beta) \in \mathbf{Aut}(N) \implies (\exists! \varphi^{-1} \in \mathbf{Aut}(N)) \{ \varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = 1 \} \quad (10)$$

が成り立つことを示す:

置換 α と β について, P と T がともに有限だから, $\alpha^n = id_P$ かつ $\beta^m = id_T$ となる $n, m \in \mathbb{N}^+$ が存在する. $\varphi^{nm} = (\alpha, \beta)^{nm} = (\alpha^{nm}, \beta^{nm}) = 1$ すなわち, $\varphi\varphi^{nm-1} = \varphi^{nm-1}\varphi = 1$ と

なるから, $\varphi^{-1} = \varphi^{nm-1} \in \mathbf{Aut}(N)$ である (逆元の一意性は明らか). なお, $\varphi^{-1} = (\gamma, \delta)$ とすると, $(\alpha\gamma, \beta\delta) = (id_P, id_T)$ より, $\gamma = \alpha^{-1}$, $\delta = \beta^{-1}$ であるから,

$$\varphi^{-1} = \varphi^{nm-1} = (\alpha^{nm-1}, \beta^{nm-1}) = (\alpha^{-1}, \beta^{-1}) \quad (11)$$

と表せる.

(10) と (11) から任意の $\varphi = (\alpha, \beta)$ は逆元 $\varphi^{-1} = (\alpha^{-1}, \beta^{-1})$ をもち, モノイド $\mathbf{Aut}(N)$ は群をなす. ■

定義 1.7 $N = (P, T, A, W)$ をネットとする. このとき, 次の (i) ~ (vi) の条件を満たすならば, N のことを **変換ネット** と呼ぶ.

(i) P はソースプレースの集合 S と内部プレースの集合 Q と呼ばれる, 空でない互いに素な 2 つ集合からなる ($P = Q \cup S$, $Q \cap S = \emptyset$, $Q \neq \emptyset$, $S \neq \emptyset$).

(ii) 各ソースプレースと各内部プレースに対して出力トランジションが (一意に) 定まる:

$$(\forall q)(\forall x)\{q \in Q \wedge x \in S \implies |q \cdot \cap x \cdot| = 1\} \quad (12)$$

(iii) 相異なる 2 つの内部プレースに共通な出力トランジションは存在しない:

$$(\forall p)(\forall q)\{p \in Q \wedge q \in Q \wedge p \neq q \implies |p \cdot \cap q \cdot| = 0\} \quad (13)$$

(iv) 相異なる 2 つのソースプレースに共通な出力トランジションは存在しない:

$$(\forall x)(\forall y)\{x \in S \wedge y \in S \wedge x \neq y \implies |x \cdot \cap y \cdot| = 0\} \quad (14)$$

(v) ソースプレースへの入力トランジションはない:

$$(\forall x)\{x \in S \implies |\cdot x| = 0\} \quad (15)$$

(vi) 各トランジションの入力プレース数は 2 であり, 出力プレース数は 1 である:

$$(\forall t)\{t \in T \implies |\cdot t| = 2 \text{ かつ } |t \cdot| = 1\} \quad (16)$$

■
 $\forall q \in Q$ と $\forall x \in S$ に対して, (12)~(14) により, $q \cdot \cap x \cdot = \{t\}$ となる $t \in T$ が唯一存在し, 逆にすべてのトランジションは 2 つの入力プレースをもち, 一方は内部プレースであり, 他方はソースプレースである. 故に, このトランジションを $t(q, x)$ と表すことができる. そして, (15) により, ソースプレース $x \in S$ への入力トランジションはないので, トランジションの出力は, 常に内部プレースとなる. 従って, $t(q, x)$ に対し, (15) と (16) により, $(t, q') \in A$ となる唯一の $q' \in Q$ が存在する. この q' を $q(q, x)$ と表す.

例 1.1 上記定義の変換ネット N において, $x \in S$ に対して, 変換:

$$(x)\tau: Q \longrightarrow Q: q \longmapsto q(q, x) \quad (17)$$

が考えられる. 変換集合 $\{(x)\tau | x \in S\}$ で生成される, Q 上の変換半群 (つまり, 上記変換集合を含む最小の変換半群) を $T(N)$ で表し, ネット N の特性半群と呼ぶ.

逆に, 集合 Q 上の変換の集合 S を考える. S で生成される変換半群 S' について, $(Q)S' = \{(q)f | q \in Q, f \in S'\}$ が Q に等しければ,

$$(i) \quad P = Q \cup S$$

$$(ii) \quad T = Q \times S$$

$$(iii) \quad A = \{(q, (q, f)) | f \in S, q \in Q\} \cup \\ \{(f, (q, f)) | f \in S, q \in Q\} \cup \\ \{((q, f), (q)f) | f \in S, q \in Q\}$$

$$(iv) \quad W(q, (q, f)) = W(f, (f, q)) = W((q, f), (q)f) = 1 (W \text{ は適当でよい})$$

とおくことにより, 変換ネット $N = (P, T, A, W)$ が考えられる. ■

例 1.2 Q と S を空でない互いに素な集合とし, τ は $\tau: S \longrightarrow (Q \longrightarrow Q)$ なる写像とする, このとき, 次のネット $N = (P, T, A, W)$ は変換ネットになる.

$$(i) \quad P = Q \cup S$$

$$(ii) \quad T = Q \times S$$

$$(iii) \quad A = \{(q, (q, x)), (x, (q, x)), ((q, x), (q)(x)\tau) | q \in Q, x \in S\}$$

$$(iv) \quad W: A \longrightarrow \mathbf{N}^+ \text{ なる写像とする.}$$

N が変換ネットである理由は以下の通りである. (ii) と (iii) より各内部プレース $q \in Q$ と各ソースプレース $x \in S$ に対して, それら 2 つを入力プレースとするトランジション (q, x) が存在し, その出力プレースは内部プレース $(q)(x)\tau$ 唯一つである. そして, これ以外のトランジションは存在しない. これを図示すると, 図 1 のようになる. 図中では, プレースを円で表し, トランジションを線分で表し, そしてアークを矢印で表す.

この変換ネットを, Q, S, τ, W によって決まる標準的変換ネットと呼び, $\mathcal{N}(Q, S, \tau, W)$ と表す. ■

2 ネットの同型写像

定理 2.1 任意の有限群 G に対して, G と $\mathbf{Aut}(N)$ とが同型 ($\mathbf{Aut}(N) \cong G$) となるネット N が存在する. ■

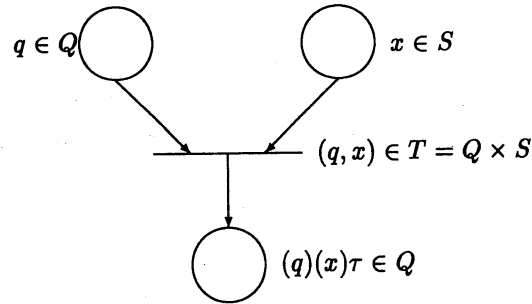


図 1: 標準的変換ネット $\mathcal{N}(Q, S, \tau, W)$ の構造

証明 G' を G と同型な群とする. なお, $y \in G$ の同型写像による像を $y' (\in G')$ と書く. $\rho: G' \rightarrow \mathbf{N}$ を単射とする. 但し, 任意の $y' \in G'$ に対して, $\rho(y') \geq 2$ とする.

このとき, 標準的な変換ネット $N_1 = \mathcal{N}(G, G', \tau_1, W_1)$ とする. ただし, $\tau_1: G' \rightarrow (G \rightarrow G)$ と重み付け関数 W_1 を次のように定義する.

$$(i) \quad (\forall x \in G)(\forall y' \in G')\{(x)(y')\tau_1 = xy\}$$

$$(ii) \quad (\forall x \in G)(\forall y' \in G')\{W_1(x, (x, y')) = W_1((x, y'), xy) = 1\} \wedge \{W_1(y', (x, y')) = \rho(y')\}$$

つまり, $P = G \cup G'$ はプレースの集合であり, G は内部プレースの集合であり, G' はソース(プレース)の集合である. $T = G \times G'$ はトランジションの集合であり, 各トランジション $(x, y') \in G \times G'$ へは内部プレース x とソースプレース y' からのちょうど 2 つ入力アークがあり, (x, y') からは内部プレース $xy \in G$ へのただ 1 つの出力アークがある. なお, このネット N_1 のアーク全体を A_1 と表すことにする:

$$A_1 = \{(x, (x, y')), (y', (x, y')), ((x, y'), xy) | x \in G, y' \in G'\}$$

そして, ソースプレース y' からトランジションへのアークの重みは, $\rho(y') \geq 2$ (なお, ρ は単射) で与えられ, その他のアークの重みは 1 である. これを図示すると, 図 2 のようになる.

そこで,

1. $\varphi = (\alpha, \beta) \in \mathbf{Aut}(N_1)$ について, $\alpha|_{G'} = id_{G'}$.
2. $\varphi = (\alpha, \beta) \in \mathbf{Aut}(N_1)$ について, α が G の単位元 e を固定するとき, $\varphi = (\alpha, \beta) = 1$ である, つまり,

$$(e)\alpha = e \implies (\alpha, \beta) = 1. \quad (18)$$

3. G から $\mathbf{Aut}(N_1)$ への同型写像 ϕ が存在する.

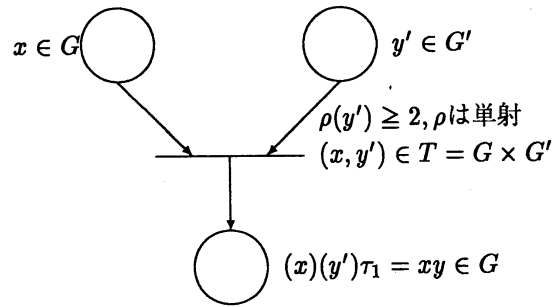


図 2: 標準的変換ネット $N_1 = \mathcal{N}(G, G', \tau_1, W_1)$

の構造

の 3 段階に分けて証明をする.

1. について $\varphi = (\alpha, \beta) \in \mathbf{Aut}(N_1)$ とする. この N_1 の自己同型写像 φ によって, 任意のソース $y' \in G'$ から出るアーク $(y', (x, y')) \in A_1$ は, アーク $((y')\alpha, (x, y')\beta) \in A_1$ に移る. そして, φ の整合性 (7) の条件から,

$$W_1((y')\alpha, (x, y')\beta) = W_1(y', (x, y')) = \rho(y')$$

である. ρ は単射であるから, $\rho(y')$ の重さを持つアークは, ネット N_1 中ではソース y' から出るものに限られる. よって, $(y')\alpha = y'$. α は G' のすべての元を固定する. 従って, α の G' 上の制限は単位置換である ($\alpha|_{G'} = id_{G'}$).

2. について $(e)\alpha = e$ であるとき, 任意のソースプレース $y' \in G'$ に対して, β はトランジション (e, y') を固定する, すなわち, $(e, y')\beta = (e, y')$ である. なぜならば,

$$(e, (e, y')) \in A_1 \text{ より, } ((e)\alpha, (e, y')\beta) = (e, (e, y')\beta) \in A_1 \quad (\text{仮定による})$$

$$(y', (e, y')) \in A_1 \text{ より, } ((y')\alpha, (e, y')\beta) = (y', (e, y')\beta) \in A_1 \quad (1. \text{による})$$

$(e, y')\beta$ は, e と y' によって決まるトランジションだから, $(e, y')\beta = (e, y')$.

さらに,

$$((e, y'), y) \in A_1 \text{ より, } ((e, y')\beta, (y)\alpha) = ((e, y'), (y)\alpha) \in A_1$$

であるから, $ey = y = (y)\alpha$ となる. α は G の各元を固定する, つまり $\alpha = id_P$. また, $(x, y') \in G \times G'$ について,

$$(x, (x, y')) \in A_1 \text{ より, } ((x)\alpha, (x, y')\beta) = (x, (x, y')\beta) \in A_1 \quad (\alpha = id_P \text{による})$$

$$(y', (x, y')) \in A_1 \text{ より, } ((y')\alpha, (x, y')\beta) = (y', (x, y')\beta) \in A_1 \quad (\alpha = id_P \text{による})$$

$(x, y')\beta$ は, x と y' によって決まるトランジションだから, $(x, y')\beta = (x, y')$. つまり $\beta = id_T$.

3. について 任意の $g \in G$ に対して, $\phi(g) = (\alpha_g, \beta_g)$ を次のように定義すると, $\phi(g)$ は N_1 の自己同型写像になる. すなわち, $\phi(g) \in \mathbf{Aut}(N_1)$ ($\phi(G) \subset \mathbf{Aut}(N_1)$).

$$(z)\alpha_g = \begin{cases} gz & z \in G \text{ のとき} \\ z & z \in G' \text{ のとき} \end{cases} \quad (19)$$

$$(x, y')\beta_g = (gx, y') \quad (20)$$

逆に, 任意の $(\alpha, \beta) \in \mathbf{Aut}(N_1)$ に対して, ある $g \in G$ が存在して, $(\alpha, \beta) = \phi(g)$ となることを示す:

$(e)\alpha = g$ とする. このとき, (α, β) と $\phi(g^{-1}) = (\alpha_{g^{-1}}, \beta_{g^{-1}}) \in \mathbf{Aut}(N_1)$ の合成は,

$$(e)\alpha\alpha_{g^{-1}} = (g)\alpha_{g^{-1}} = g^{-1}g = e$$

であるから, $\alpha\alpha_{g^{-1}}$ は e を固定するので, 2. により,

$$(\alpha\alpha_{g^{-1}}, \beta\beta_{g^{-1}}) = 1_{\mathbf{Aut}(N_1)} \in \mathbf{Aut}(N_1) \quad (21)$$

となる. ところで, α_g と β_g の定義により,

$$\begin{aligned} x \in G &\implies (x)\alpha_g\alpha_{g^{-1}} = (gx)\alpha_{g^{-1}} = g^{-1}gx = x \\ y' \in G' &\implies (y')\alpha_g\alpha_{g^{-1}} = (y')\alpha_{g^{-1}} = y' \end{aligned} \quad (22)$$

かつ

$$(x, y') \in G \times G' \implies (x, y')\beta_g\beta_{g^{-1}} = (gx, y')\beta_{g^{-1}} = (g^{-1}gx, y') = (x, y') \quad (23)$$

であるので, $(\alpha_{g^{-1}})^{-1} = \alpha_g$ および $(\beta_{g^{-1}})^{-1} = \beta_g$ が成り立つ. よって, 式 (21) と上記の性質から,

$$\alpha = (\alpha_{g^{-1}})^{-1} = \alpha_g \text{ かつ } \beta = (\beta_{g^{-1}})^{-1} = \beta_g \quad (24)$$

従って,

$$\mathbf{Aut}(N_1) = \phi(G) = \{(\alpha_g, \beta_g) | g \in G\} \quad (25)$$

以上により,

$$\phi: G \rightarrow \mathbf{Aut}(N_1): g \longmapsto (\alpha_g, \beta_g) \quad (26)$$

は同型写像である. よって, $\mathbf{Aut}(N_1) \cong G$ となる. ■

3 変換ネットと L 型ペトリネット言語の関係

$N = (P, T, A, W)$ を変換ネットとし, その重み付け関数 W が, $(\forall a \in A)(W(a) = 1)$ とする.

μ_0 を後で定義する単純マーキングとすると, N の μ_0 から可達な集合 $\mathbf{R}_N(\mu_0)$ が有限であるならば, $(\mu_0$ を初期マーキング, F を最終状態集合とする) N の L 型言語 $L_N(\mu_0, F)$ は,

有限状態機械 $C_N(\mu_0, F) = (\mathbf{R}_N(\mu_0), \delta_N, T, \mu_0, F)$ によって生成されるので、正規言語となる。以下では、 $\mathbf{R}_N(\mu_0)$ が有限であることを証明する。

まず、マーキングについての定義をする。

定義 3.1 $N = (P, T, A, W)$ を変換ネットし、 $\mu: P \rightarrow \omega$ を拡張マーキングとする。また、任意の内部プレース $p \in Q$ に対して、 $\mu(p) \neq \infty$ のとき、 μ のことを単純マーキングと呼ぶ。単純マーキング μ の内部プレース集合 Q 上への制限 $\mu|_Q$ を内部マーキングと呼び、 $\bar{\mu}$ で表す。 ■

まず、変換ネットに関する定理を証明するために、補題を示す。なお、以下では、混乱を招かない場合は $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ のようにプレースに番号がついているとし、 μ を n 項対 $(\mu(p_1), \mu(p_2), \dots, \mu(p_n))$ で表す。

補題 3.1 $N = (P, T, A, W)$ を変換ネットとし、 $(\forall a \in A)(W(a) = 1)$ とする。さらに、 μ_0 を単純マーキング μ_0 とする。このとき、初期マーキング μ_0 から可達なマーキングの集合 $\mathbf{R}_N(\mu_0)$ は有限集合である。 ■

証明 単純マーキングには、

1. 任意の $x \in S$ について、 $\mu(x) = \infty$.
2. 任意の $x \in S$ について、 $\mu(x) \neq \infty$.
3. ある $x \in S$ について、 $\mu(x) = \infty$ 、ある $y \in S$ について、 $\mu(y) \neq \infty$.

の 3 種類のケースがある。

1. の場合 $\bar{\mu} = (m_1, \dots, m_i, \dots, m_j, \dots, m_n)$ を内部マーキングとする。 $\bar{\mu}(p_i) = m_i > 0$ とする。このとき、任意の $x \in S$ について、 p_i と x で定まるトランジション t は発火可能である。 $t = \{p_j\}$ ならば

$$\bar{\mu} = (m_1, \dots, m_i, \dots, m_j, \dots, m_n) \xrightarrow{t} (m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_j + 1, \dots, m_n) \quad (27)$$

となる。よって、 t を繰り返し m_i 回発火させたのち、 p_i のトークンはすべて p_j に移る。従って、 μ_0 から可達な内部マーキング $\bar{\mu} = (m_1, \dots, m_i, \dots, m_j, \dots, m_n)$ は、整数方程式:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n m_i = m \quad (28)$$

の非負整数解でなくてはならない。よって、

$$|\mathbf{R}_N(\mu_0)| \leq_{n+m-1} C_m \quad (29)$$

である。等号は、特性半群 $T(N)$ が Q 上可移の (すなわち、任意の $q, q' \in Q$ に対して、ある $s \in T(N)$ が存在して $q' = (q)s$ となる) ときに成り立つ。

2. と 3. の場合

$$X = \{x \in S \mid \mu(x) \neq \infty\} \subset S \quad (30)$$

とおく、内部マーキング $\bar{\mu}$ に、 $r = |X|$ 個の項を付けた $r + n$ 対を考える:

$$(\mu(x_1), \mu(x_2), \dots, \mu(x_r); \mu(p_1), \mu(p_2), \dots, \mu(p_n)) \text{ 但し, } x_i \in X, p_j \in Q \quad (31)$$

$y \in S - X$ のとき、 $t \in y$ なる t が発火しても、 $k_1 = (\sum_{i=1}^r \mu(x_i)) + (\sum_{j=1}^n \mu(p_j))$ の値は不変である。

$x \in X$ のとき、 $t \in x$ なる t が発火すると、 $t = \{x, p\}$ であるソースプレース x と内部プレース p からトークンが一つずつ除かれ、 $t = \{q\}$ である内部プレース q へトークンが1つ追加される。従って、 t の発火によって、ネットのトークンの総数は1つ減る。従って、 $k_0 = (\sum_{j=1}^n \mu(p_j))$ とすると、起こり得る $r + n$ 項対 $(u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_n)$ は、整数不等式:

$$k_0 \leq u_1 + u_2 + \dots + u_r + v_1 + v_2 + \dots + v_n \leq k_1 \quad (32)$$

の非負整数解でなくてはならない。つまり、 $\mathbf{R}_N(\mu_0)$ は有限である。 ■

定理 3.1 $N = (P, T, A, W)$ を変換ネットとし、 $(\forall a)(W(a) = 1)$ とする。さらに、 μ_0 を単純マーキング μ_0 とし、 F を任意のマーキングの集合とする。このとき、 μ_0 を初期マーキングとし F を最終状態集合とする N の L 型ペトリネット言語 $L_N(\mu_0, F)$ は正規である。 ■

証明 上記補題により、可達なマーキング集合 $\mathbf{R}_N(\mu_0)$ は有限集合であるから、 N から有限状態機械 $C_N(\mu_0, F)$ が構成される。そして $L_N(\mu_0, F)$ は、 $C_N(\mu_0, F)$ によって生成される正規言語 $L(C_N(\mu_0, F))$ と一致する。 ■

参考文献

- [1] James. L. Peterson: "Petri net theory and the modeling of systems", Prentice-Hall, (1981), 邦訳 "ペトリネット入門", 市川・小林訳, (共立出版).