

L^p -Kato 測度と Dirichlet 空間の Sobolev 埋め込みとの関係について

京都大学 数理解析研究所 森 隆大*

Takahiro Mori

Research Institute for Mathematical Sciences,

Kyoto University

1 序

Dirichlet 空間の Sobolev 埋蔵定理は解析学における最も基本的な定理の一つであり, 同値な性質として Nash 不等式 [4], キャパシティー等周不等式 [5, 6], 熱半群の超縮小性 [14] などが知られている. 古典的な Sobolev 空間 $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ などに関してはより精密な評価を与える Gagliardo-Nirenberg 補間不等式も知られている. Kato クラスは Schrödinger 作用素 $(-\frac{1}{2}\Delta + \mu)$ が $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ 上の自己共役作用素となる十分条件として 1972 年に Kato [7] により与えられ, 確率論の側からも Feynman-Kac 公式を介することで解析が進んでいる (Simon による概説 [11] も参照). Stollmann と Voigt [12] は 1996 年に Dirichlet 空間が Kato クラスの測度による L^2 空間へ連続に埋め込めることを作用素論を用いて示し, 後に Shiozawa と Takeda [10] が 2005 年に Dirichlet 形式の時間変更の理論を用いて確率論的な証明を与えた.

本稿では, Kato クラスの一種の拡張である L^p -Kato クラスを導入し, そのクラスの測度による Lebesgue 空間への Dirichlet 空間の連続埋め込みとの関係を論じた研究 [8] について, 補間空間の視点からの解説を述べる.

2 L^p -Kato 測度と Dirichlet 空間の Sobolev 埋め込みとの関係

この節では [8] の概要を述べる. E を局所コンパクト可分距離空間, m を $\text{supp}[m] = E$ なる E 上の Radon 測度とする. $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $L^2(E; m)$ 上の正則 Dirichlet 形式とし, $\mathbf{X} = (\Omega, X_t, \zeta, \mathbb{P}_x)$ を付随する m -対称 Hunt 過程とする. $\alpha > 0$ と $u \in \mathcal{F}$ に対し, $\mathcal{E}_\alpha(u, u) = \|u\|_{\mathcal{E}_\alpha}^2 := \mathcal{E}(u, u) + \alpha \int_E u^2 dm$ と記述する. 本稿では $\mathcal{F}$ の元 u は常に準連続な修正を取るものとする. また, $\mathbf{X}$ の推移関数 $(P_t)_{t>0}$ は以下の絶対連続条件を満たしているものとする: 各 $t > 0$ と $x \in E$ に対し, $P_t(x, dy)$ は $m(dy)$ について絶対連続である. このとき $(P_t)_{t>0}$ は $(0, \infty) \times E \times E$ 上可測な推移密度関数 (または熱核と呼ぶ) $p_t(x, y)$ であって任意の $s, t > 0$, $x, y \in E$ に対し $p_t(x, y) = p_t(y, x)$ かつ $p_{t+s}(x, y) = \int_E p_s(x, z) p_t(z, y) m(dz)$ なるものを持つ. 各 $\alpha > 0$ に対し, $\mathbf{X}$ の α -次レゾルベント核を $r_\alpha(x, y) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p_t(x, y) dt$ で定める.

Definition 2.1. $p \in [1, \infty)$, $\delta \in (0, 1]$ とする. E 上の正值 Radon 測度 μ に対し, μ が $\mathbf{X}$ に関する L^p -Dynkin クラスに属する ($\mu \in \mathcal{D}^p(\mathbf{X})$ とかく) とはある $\alpha > 0$ が存在して

$$\sup_{x \in E} \int_E r_\alpha(x, y)^p \mu(dy) < \infty$$

なるときを, μ が $\mathbf{X}$ に関する L^p -Kato クラスに属する ($\mu \in \mathcal{K}^p(\mathbf{X})$ とかく) とは

$$\limsup_{\alpha \uparrow \infty} \sup_{x \in E} \int_E r_\alpha(x, y)^p \mu(dy) = 0$$

*tmori@kurims.kyoto-u.ac.jp

なるときを, μ が $\mathbf{X}$ に関するオーダー δ の L^p -Kato クラスに属する ($\mu \in \mathcal{K}^{p,\delta}(\mathbf{X})$ とかく) とは

$$\left(\sup_{x \in E} \int_E r_\alpha(x, y)^p \mu(dy) \right)^{\frac{1}{p}} = O(\alpha^{-\delta}) \quad \text{as } \alpha \rightarrow \infty$$

なるときをいう. L^p -Dynkin, L^p -Kato クラスは単に p -Dynkin, p -Kato クラスとも呼ぶ.

明らかに $\mathcal{K}^{p,\delta}(\mathbf{X}) \subset \mathcal{K}^p(\mathbf{X}) \subset \mathcal{D}^p(\mathbf{X})$ である.

Example 2.2. $E = \mathbb{R}^d$, m を $\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 測度, $\mathbf{X}$ を $\mathbb{R}^d$ 上の Brown 運動とする. $p \in [1, \infty)$ を $d - p(d-2) > 0$ なる実数とし, μ を $\mathbb{R}^d$ 上の正值 Radon 測度とする. [2, Theorem 4.5] の証明と同様にして, $\mu \in \mathcal{K}^p(\mathbf{X})$ であることは次と同値;

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| < \alpha} \frac{\mu(dy)}{|x-y|^{p(d-2)}} &= 0, \quad d \geq 3, \\ \lim_{\alpha \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| < \alpha} (-\log|x-y|)^p \mu(dy) &= 0, \quad d = 2, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| \leq 1} \mu(dy) &< \infty, \quad d = 1. \end{aligned}$$

特に, $d = 1$ のときは任意の $p > 1$ に対し $\mathcal{K}^1(\mathbf{X}) = \mathcal{K}^p(\mathbf{X})$ となる. また, 上記の p について $m \in \mathcal{K}^{p, \frac{d-p(d-2)}{2p}}(\mathbf{X})$ となることも分かる.

次の定理は L^p -Dynkin や L^p -Kato クラスの測度による L^{2p} 空間への Dirichlet 空間の連続埋め込みである.

Theorem 2.3 ([8, Theorem 4.1]). $p \in [1, \infty)$, $\mu \in \mathcal{D}^p(\mathbf{X})$ とする. このとき,

(i) 任意の $u \in \mathcal{F}$ と $\alpha > 0$ に対し

$$\|u\|_{L^{2p}(E;\mu)}^2 \leq \left(\sup_{x \in E} \int_E r_\alpha(x, y)^p \mu(dy) \right)^{\frac{1}{p}} \mathcal{E}_\alpha(u, u) \quad (2.1)$$

が成立する. 特に, Hilbert 空間 $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$ は $L^{2p}(E; \mu)$ へ連続的に埋め込まれている.

(ii) $\mu \in \mathcal{K}^p(\mathbf{X})$ ならば, $(0, \infty)$ 上の正值函数 K で $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} K(\varepsilon) = \infty$ なるものが存在し, 任意の $u \in \mathcal{F}$ と $\varepsilon > 0$ に対し

$$\|u\|_{L^{2p}(E;\mu)}^2 \leq \varepsilon \mathcal{E}_1(u, u) + K(\varepsilon) \|u\|_{L^2(E;m)}^2 \quad (2.2)$$

が成立する.

(iii) ある $\theta \in (0, 1]$ に対し $\mu \in \mathcal{K}^{p,\theta}(\mathbf{X})$ ならば, 正定数 A が存在し, 函数 $K(\varepsilon) = A\varepsilon^{-\frac{1-\theta}{\theta}}$ に対して (2.2) が成立する. 特に, 正定数 B が存在して任意の $u \in \mathcal{F}$ に対し

$$\|u\|_{L^{2p}(E;\mu)} \leq B \sqrt{\mathcal{E}_1(u, u)}^{(1-\theta)} \|u\|_{L^2(E;m)}^\theta \quad (2.3)$$

が成立する.

(2.1) は L^p -版の Stollmann-Voigt 不等式とみなすことができる. (2.2) は [13] にあるコンパクト有界性の概念に類似しており, (2.3) はいわゆる補間型の不等式である.

次の定理は定理 2.3 のある種の逆を主張する. つまり, 測度が L^p -Dynkin や L^p -Kato クラスに属することが, その測度による $L^{2p'}$ 空間 ($p' > p$) への Dirichlet 空間の Sobolev 型や補間型の埋め込みからそれぞれ従う.

Theorem 2.4 ([8, Theorem 4.7]). $p' \in (1, \infty)$, $\mu \in \mathcal{D}^1(\mathbf{X})$ とする. このとき,

(i) 正定数 $S > 0$ が存在して, 任意の $u \in \mathcal{F}$ に対し Sobolev 型不等式

$$\|u\|_{L^{2p'}(E;\mu)}^2 \leq S \mathcal{E}_1(u, u)$$

を満たすならば, 任意の $p \in [1, p']$ について $\mu \in \mathcal{D}^p(\mathbf{X})$ である.

- (ii) 函数 $K : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ で $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} K(\varepsilon) = \infty$ なるものが存在して、任意の $u \in \mathcal{F}$ と $\varepsilon > 0$ に対し *Sobolev* 型不等式

$$\|u\|_{L^{2p'}(E;\mu)}^2 \leq \varepsilon \mathcal{E}_1(u, u) + K(\varepsilon) \|u\|_{L^2(E;m)}^2$$

を満たすならば、任意の $p \in (1, p')$ について $\mu \in K^p(\mathbf{X})$ である。

- (iii) 定数 $A > 0$ と $\theta \in (0, 1]$ が存在して、任意の $u \in \mathcal{F}$ に対し *Sobolev* 型不等式

$$\|u\|_{L^{2p'}(E;\mu)} \leq A \sqrt{\mathcal{E}_1(u, u)}^{(1-\theta)} \|u\|_{L^2(E;m)}^\theta$$

を満たすならば、任意の $p \in (1, p')$ と $\delta = 1 - \frac{p'}{p-1} \frac{p-1}{p}$ について $\mu \in K^{p, \theta(1-\delta)}(\mathbf{X})$ である。

定理 2.3, 2.4 (i) はそれぞれ次のように図式化できる。ここで、図中の $\mathcal{D}^p(\mathbf{X})$ は $\mu \in \mathcal{D}^p(\mathbf{X})$ であることを意味し、太字で表されているものが定理の結論を意味する。

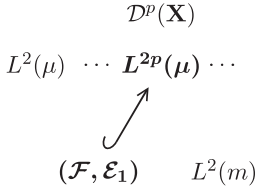


Figure 1: 定理 2.3 (i) の模式図

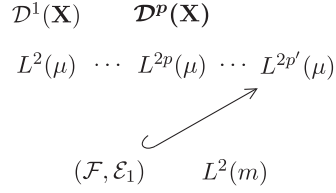


Figure 2: 定理 2.4 (i) の模式図

3 補間空間を用いた定理 2.3, 2.4 (iii) の意味付け

この節では、定理 2.3, 2.4(iii) を補間空間の言葉で意味付けることを考える。補間空間とは、大まかに言えば、2つの空間 X_0 と X_1 についてそれらを平面上の点と考えたとき、2点を $\theta : 1 - \theta$ に内分する点に対応する空間 X_θ のことである。Banach 空間の補間には実補間と複素補間があるが本稿では実補間のみを扱う。補間空間の基礎事項については、例えば [1, 3, 9] を見よ。

2つの Banach 空間 X_0, X_1 は Hausdorff 位相ベクトル空間 $\mathcal{X}$ に連続的に埋め込まれているとする。 $\|\cdot\|_{X_i}$ を $X_i, i = 0, 1$ のノルムとすると、共通部分空間 $X_0 \cap X_1$ と和空間 $X_0 + X_1 := \{u = u_0 + u_1 : u_0 \in X_0, u_1 \in X_1\}$ はノルム

$$\begin{aligned} \|u\|_{X_0 \cap X_1} &:= \max\{\|u\|_{X_0}, \|u\|_{X_1}\} \\ \|u\|_{X_0 + X_1} &:= \inf\{\|u_0\|_{X_0} + \|u_1\|_{X_1} : u = u_0 + u_1, u_0 \in X_0, u_1 \in X_1\} \end{aligned}$$

によりそれぞれ Banach 空間となる。

Definition 3.1. Banach 空間 X が X_0 と X_1 の補間空間であるとは、連続埋め込み

$$X_0 \cap X_1 \longrightarrow X \longrightarrow X_0 + X_1$$

が成立するときをいう。

各 $t > 0$ と $u \in X_0 \cap X_1$ に対し、 J 汎函数を

$$J(t; u) := \max\{\|u_0\|_{X_0}, t\|u_1\|_{X_1}\}$$

により定めると、これは $\|\cdot\|_{X_0 \cap X_1}$ と同値なノルムとなっている。

Definition 3.2. $0 \leq \theta \leq 1, 1 \leq q \leq \infty$ に対し、空間 $(X_0, X_1)_{\theta, q; J}$ を $u \in X_0 + X_1$ であって、Bochner 積分により

$$u = \int_0^\infty f(t) \frac{dt}{t}, \quad f \in L^q((0, \infty); dt/t, X_0 + X_1)$$

と表され、かつ函数 $t \rightarrow t^{-\theta} J(t; u)$ が $L^q((0, \infty); dt/t)$ に属するものの全体として定める。

Proposition 3.3. $1 < q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, または $q = 1$, $0 \leq \theta \leq 1$ のとき, $(X_0, X_1)_{\theta, q; J}$ はノルム

$$\|u\|_{\theta, q; J} = \begin{cases} \inf_{f \in S(u)} \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} J(t; f(t))]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{if } 1 \leq q < \infty, \\ \inf_{f \in S(u)} \operatorname{esssup}_{0 < t < \infty} \{t^{-\theta} J(f(t); u)\} & \text{if } q = \infty \end{cases}$$

により非自明な Banach 空間となる. ここで,

$$S(u) := \left\{ f \in L^1((0, \infty); dt/t, X_0 + X_1) : u = \int_0^\infty f(t) \frac{dt}{t} \right\}$$

とした.

さらに, 連続埋め込み

$$X_0 \cap X_1 \longrightarrow (X_0, X_1)_{\theta, q; J} \longrightarrow X_0 + X_1$$

が成立する. すなわち, $(X_0, X_1)_{\theta, q; J}$ は X_0 と X_1 の補間空間である.

Proof. 証明は, 例えば [1, Theorem 7.3] を見よ. □

Proposition 3.4. X_0 と X_1 の補間空間 X に対し, 以下は互いに同値である:

(a) $(X_0, X_1)_{\theta, 1; J} \longrightarrow X$ が成立する. すなわち, 正定数 C_1 が存在して, 任意の $u \in (X_0, X_1)_{\theta, 1; J}$ に対し

$$\|u\|_X \leq C_1 \|u\|_{\theta, 1; J}.$$

(b) 正定数 C_2 が存在して, 任意の $u \in X_0 \cap X_1$, $t > 0$ に対し

$$\|u\|_X \leq C_2 t^{-\theta} J(t; u).$$

(c) 正定数 C_3 が存在して, 任意の $u \in X_0 \cap X_1$ に対し

$$\|u\|_X \leq C_3 \|u\|_{X_0}^{1-\theta} \|u\|_{X_1}^\theta.$$

Proof. 証明は, 例えば [1, Lemma 7.19] または [3, Section 3.5] を見よ. □

以上のことから, $X_0 = (\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$, $X_1 = L^2(E; m)$ としたときの補間空間 $X_\theta := (X_0, X_1)_{\theta, 1; J}$ を用いて, 定理 2.3, 2.4(iii) は次のように図式化できる. なお, 図 4 の灰色で示した埋め込み $X_{\theta(1-\delta)} \hookrightarrow L^{2p}(\mu)$ は定理 2.4(iii) の結論に定理 2.3(i) をさらに適用することで得られるものである.

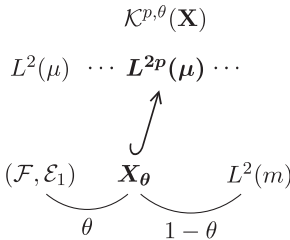


Figure 3: 定理 2.3 (iii) の模式図

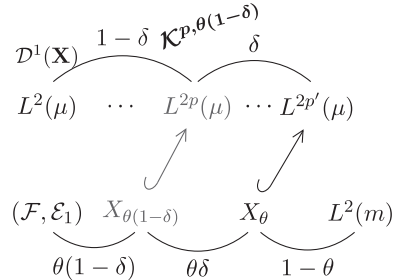


Figure 4: 定理 2.4 (iii) の模式図

4 L^p -Kato クラスに対応する補間空間

前節までに、定理 2.3, 2.4 の主張 (i) は Sobolev 埋め込みにより、主張 (iii) は $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$ と $L^2(E; m)$ を $\theta: 1 - \theta$ に内分する点に相当する補間空間への埋め込みにより意味づけることができた。本稿の最後に、主張 (i) と (iii) の中間の結果となっている主張 (ii) について、これらを補間空間の意味で記述することを考える。

設定は 2 節のものとし、 $X_0 = (\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$, $X_1 = L^2(E; m)$,

$$\gamma(\alpha) := \left(\sup_{x \in E} \int_E r_\alpha(x, y)^p \mu(dy) \right)^{\frac{1}{p}}$$

とおく。定義 3.2 に倣い、 $(X_0, X_1)_{\theta, 1; J}$ の定義の中にある $t^{-\theta}$ を $\gamma(t)$ に変えたものを考える。

Definition 4.1. 空間 $(X_0, X_1)_{\gamma(\cdot), 1; J}$ を $u \in X_0 + X_1$ であつて、Bochner 積分により

$$u = \int_0^\infty f(t) \frac{dt}{t}, \quad f \in L^1((0, \infty); dt/t, X_0 + X_1)$$

と表され、かつ函数 $t \rightarrow \gamma(t)J(t; u)$ が $L^1((0, \infty); dt/t)$ に属するものの全体として定める。

Proposition 4.2. $(X_0, X_1)_{\gamma(\cdot), 1; J}$ はノルム

$$\|u\|_{\gamma(\cdot), 1; J} = \inf_{f \in S(u)} \int_0^\infty [\gamma(t)J(t; f(t))] \frac{dt}{t}$$

により非自明な Banach 空間となる。ここで、 $S(u)$ は命題 3.3 で定めたものである。

さらに、連続埋め込み

$$X_0 \cap X_1 \longrightarrow (X_0, X_1)_{\gamma(\cdot), 1; J} \longrightarrow X_0 + X_1$$

が成立する。すなわち、 $(X_0, X_1)_{\gamma(\cdot), 1; J}$ は X_0 と X_1 の補間空間である。

Proof. $\alpha \mapsto \gamma(\alpha)$ は広義単調減少であり、 $\alpha \mapsto \alpha\gamma(\alpha)$ は [8, (2.6)] に見られるように広義単調増加なので

$$\sup_{0 < \alpha < \infty} \left\{ \frac{1}{\gamma(\alpha)} \min \left\{ 1, \frac{1}{\alpha} \right\} \right\} = \frac{1}{\gamma(1)} < \infty$$

が分かる。これより、[1, Lemma 7.13] と同様の証明により主張が得られる。 $\square$

Proposition 4.3. X_0 と X_1 の補間空間 X に対し、以下は互いに同値である：

(a) $(X_0, X_1)_{\gamma(\cdot), 1; J} \longrightarrow X$ が成立する。すなわち、正定数 C_1 が存在して、任意の $u \in (X_0, X_1)_{\gamma(\cdot), 1; J}$ に対し

$$\|u\|_X \leq C_1 \|u\|_{\gamma(\cdot), 1; J}.$$

(b) 正定数 C_2 が存在して、任意の $u \in X_0 \cap X_1$, $t > 0$ に対し

$$\|u\|_X \leq C_2 \gamma(t) J(t; u).$$

(c) 正定数 C_3 が存在して、任意の $u \in X_0 \cap X_1$, $t > 0$ に対し

$$\|u\|_X \leq C_3 \gamma(t) (\|u\|_{X_0} + t \|u\|_{X_1}).$$

Proof. (b) $\Leftrightarrow$ (c) は明らか。(a) $\Leftrightarrow$ (b) は [8, Theorem 4.1] の証明に見られるように $\alpha \mapsto \gamma(\alpha)$ が連続であることから、[1, Lemma 7.19] と同様の証明により示される。 $\square$

定理 2.3(ii) の結論を満たす $K(\varepsilon)$ として [8, Theorem 4.1] の証明中の議論から函数 $\varepsilon \mapsto \varepsilon \gamma^{-1}(\varepsilon)$ (ここで $\gamma^{-1}(\cdot)$ は $\gamma(\cdot)$ の右連続逆函数) が取れることに注意すると、(2.2) は命題 4.3(c) に他ならない。空間 $(X_0, X_1)_{\gamma(\cdot), 1; J}$ は X_0 と X_1 の“内分”に相当する空間とみなすことはできないため、定理 2.3(ii) の主張を図 1–4 のように数直線的に図示することはできないが、この主張は $\gamma(\cdot)$ のスケールにより得られる補間空間により意味づけられることが分かった。定理 2.4(ii) についても同様に p' に関する $\gamma(\cdot)$ により意味づけられることが期待される。

Acknowledgements

本研究は JSPS 科研費 JP18J21141, 及び京都大学数理解析研究所における国際共同利用・共同研究拠点事業の助成を受けたものである。

References

- [1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.
- [2] M. Aizenman and B. Simon. Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35(2):209–273, 1982.
- [3] J. Bergh and J. Löfström. *Interpolation spaces. An introduction*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223.
- [4] E. A. Carlen, S. Kusuoka, and D. W. Stroock. Upper bounds for symmetric Markov transition functions. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 23(2, suppl.):245–287, 1987.
- [5] M. Fukushima and T. Uemura. Capacitary bounds of measures and ultracontractivity of time changed processes. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 82(5):553–572, 2003.
- [6] V. A. Kaimanovich. Dirichlet norms, capacities and generalized isoperimetric inequalities for Markov operators. *Potential Anal.*, 1(1):61–82, 1992.
- [7] T. Kato. Schrödinger operators with singular potentials. *Israel J. Math.*, 13:135–148 (1973), 1972.
- [8] T. Mori. L^p -Kato class measures and their relations with Sobolev embedding theorems, 2020. preprint, available at arXiv:2005.13758v2.
- [9] Y. Sawano. *Theory of Besov spaces*, volume 56 of *Developments in Mathematics*. Springer, Singapore, 2018.
- [10] Y. Shiozawa and M. Takeda. Variational formula for Dirichlet forms and estimates of principal eigenvalues for symmetric α -stable processes. *Potential Anal.*, 23(2):135–151, 2005.
- [11] B. Simon. Schrödinger operators in the twentieth century. *J. Math. Phys.*, 41(6):3523–3555, 2000.
- [12] P. Stollmann and J. Voigt. Perturbation of Dirichlet forms by measures. *Potential Anal.*, 5(2):109–138, 1996.
- [13] N. S. Trudinger. Linear elliptic operators with measurable coefficients. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)*, 27:265–308, 1973.
- [14] N. T. Varopoulos. Hardy-Littlewood theory for semigroups. *J. Funct. Anal.*, 63(2):240–260, 1985.