

Filtrations and the Gorenstein property of the associated Rees algebras

千葉大自然科学研究科 西田康二 (Koji NISHIDA)

1 序

以下の内容は後藤四郎氏 (明治大学) との共同研究の結果である。

良く知られている様に、 d 次元 Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ の ideal I の Rees 環 $R(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n$ の C-M 性及び Gorenstein 性を associated graded ring $G(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n / I^{n+1}$ の環論的性質によって特徴付ける研究では、既に多くの仕事になされ、精密な理論が作られている。この方向での最初の試みは後藤-下田 [8] によるもので、そこでは A が C-M 環で $I = \mathfrak{m}$ の場合が扱われ、 $R(\mathfrak{m})$ が C-M (resp. Gorenstein) であるための必要十分条件は、 $G(\mathfrak{m})$ が C-M (resp. Gorenstein) で $a(G(\mathfrak{m})) < 0$ (resp. $a(G(\mathfrak{m})) = -2$) であることが、 $d \geq 1$ (resp. $d \geq 2$) という仮定の下で示されている。その後、池田 [12] は上記の C-M 性についての結果を、 $[H_M^i(G(\mathfrak{m}))]_n$ (M は $G(\mathfrak{m})$ の極大斉次 ideal) の vanishing を用いて、一般の Noether 環 $(A, \mathfrak{m})$ の場合に拡張し、さらに池田 [13] では、 $\text{grade}_A I \geq 2$ のときは、 $R(I)$ が Gorenstein であることは、 A と $G(I)$ が共に quasi-Gorenstein で $a(G(I)) = -2$ であることによって特徴付けられることが指摘された。 I が一般の場合の $R(I)$ の C-M 性については、Trung-Ikeda [14] によって研究され、 $R(I)$ が C-M である為には、 $i \neq d$ かつ $n \neq -1$ のときは $[H_M^i(G(I))]_n = (0)$ でさらに $a(G(I)) < 0$ となることが、必要十分であることが示された。

一方、ここ数年 A の素 ideal $\mathfrak{p}$ に対する symbolic Rees algebra $R_s(\mathfrak{p}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}^{(n)}$ の調査が非常に活発で、Cutkosky, Huneke, Herzog, Schenzel, Ulrich, Vasconcelos 等がこの関係で多くの仕事をしているのであるが、そこで得られている結果や [2], [4], [5], [6] で

の経験を通して見てみると、 $R_s(\mathfrak{p})$ の C-M 性や Gorenstein 性は、やはりそれに対応する $G_s(\mathfrak{p}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}^{(n)} / \mathfrak{p}^{(n+1)}$ の環論的性質によって特徴付けられることが推測される。そこでこの報告ではもっと一般に、ideal の族 $F = \{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ で (i) $F_n \supseteq F_{n+1}$ for $\forall n \in \mathbb{Z}$, (ii) $F_0 = A$, (iii) $F_m F_n \subseteq F_{m+n}$ for $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ となるもの (この様な F を A の filtration という) から定まる A -代数

$$\begin{aligned} R(F) &= \sum_{n \geq 0} F_n t^n \subseteq A[t] \\ R'(F) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n t^n \subseteq A[t, t^{-1}] \\ G(F) &= R'(F) / t^{-1} R'(F) \end{aligned}$$

(t は不定元) を考え、普通の Rees 環 $R(I)$ について知られている結果を $R(F)$ に対して拡張することを試みる。

勿論、一般に $R(F)$ が Noether 環であるはずはなく、具体的に filtration F が与えられた時でもその判定は容易でないことが多いのだが、この報告では次の事実を知っていれば十分である。

命題 (1.1). 次の条件は同値である。

- (1) R は Noether 環である。
- (2) $F_{kn} = F_k^n$ for $\forall n \in \mathbb{Z}$ となる正整数 k が存在する。
- (3) $R(F)^{(k)} \cong R(F_k)$ なる正整数 k が存在する。
- (4) $R(F)^{(k)}$ が Noether 環になる様な正整数 k が存在する。

さらに、 $R(F)$ が Noether 環の場合には、その Krull 次元は次の様になる。

命題 (1.2). $\dim R'(F) = d + 1$, $\dim G(F) = d$ であってさらに

$$\dim R(F) = \begin{cases} d + 1 & F_1 \not\subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Assh } A} \mathfrak{p} \text{ のとき} \\ d & \text{その他} \end{cases}$$

となる。

以下この報告では $F = \{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は A の filtration として、 $R = R(F)$, $R' = R'(F)$, $G =$

$G(F)$ と略記し、常に R は Noether 環で $\dim R = d + 1$ と仮定する。又、 M は R の極大斉次 ideal を表すものとする。

2 Rees 環 $R(F)$ の C-M 性

この節では次を示すことを目標とする。

定理 (2.1) 次の条件は同値である。

(1) R は C-M である。

(2) (i) $i \neq d, n \neq -1$ ならば $[H_M^i(G)]_n = (0)$ かつ (ii) $a(G) < 0$.

このとき $i \neq d, n \neq -1$ ならば $[H_M^i(G)]_n \cong H_m^i(A)$ である。

この結果は Viêt[15] によっても独立に示されている。 A が C-M のときには定理 (2.1) の statement は次のように簡単なものになる。

系 (2.2). A が C-M であれば、 R が C-M 環になるための必要十分条件は、 G が C-M 環で $a(G) < 0$ となることである。

定理 (2.1) の証明はいくつかの step に分けて行う。

補題 (2.3). $a(R) = -1$

証明. $J = R_+ = \sum_{n \geq 1} F_n t^n$ とおき次の様な二つの完全列

$$(2.4) \quad 0 \rightarrow J \rightarrow R \rightarrow A \rightarrow 0 \quad \text{と}$$

$$(2.5) \quad 0 \rightarrow J(1) \rightarrow R \rightarrow G \rightarrow 0$$

を考える。これらに $H_M^0(\cdot)$ を施して

$$H_m^d(A) \rightarrow H_M^{d+1}(J) \rightarrow H_M^{d+1}(R) \rightarrow 0 \quad (\text{exact}) \quad \text{と}$$

$$H_M^d(G) \rightarrow H_M^{d+1}(J)(1) \rightarrow H_M^{d+1}(R) \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

が induce されるが、まず前者より任意の $n \neq -1$ に対して $[H_M^{d+1}(J)]_{n+1} \cong [H_M^{d+1}(R)]_{n+1}$ が得られ、さらに後者より $[H_M^{d+1}(J)]_{n+1} \rightarrow [H_M^{d+1}(R)]_n$ なる全射の存在が保証される。

従って $n \neq -1$ ならば $[H_M^{d+1}(R)]_n$ は $[H_M^{d+1}(R)]_{n+1}$ の homomorphic image である。一方 $m \gg 0$ ならば $[H_M^{d+1}(R)]_m = (0)$ なので、結局任意の $n \geq 0$ に対して $[H_M^{d+1}(R)]_n = (0)$ でなければならない。さらにもし $[H_M^{d+1}(R)]_{-1} = (0)$ ならば、全ての $n \leq -1$ に対して $[H_M^{d+1}(R)]_n = (0)$ となり、既に示した事と合わせて $H_M^{d+1}(R) = (0)$ であるが、これは $\dim R = d+1$ に反する。■

命題 (1.1) より $F_{kn} = F_k^n$ for $\forall n \in \mathbb{Z}$ なる正整数 k が存在する。以下この k に対して $G' = G(F_k)$ とおき、 $R(F_k)$ の極大斉次 ideal を N で表す。

補題 (2.6). (1) $i \geq 0$ とせよ。もし $[H_M^i(G)]_n = (0)$ for any $n \neq -1$ ならば $[H_N^i(G')]_n = (0)$ for all $n \neq -1$ である。

(2) $a(G) < 0$ ならば $a(G') < 0$ である。

証明. (1) R' の極大斉次 ideal を M' と書く。完全列 $0 \rightarrow R'(1) \xrightarrow{t^{-1}} R' \rightarrow G \rightarrow 0$ に $H_{M'}^0(\cdot)$ を施して

$$[H_{M'}^i(R')]_{n+1} \xrightarrow{t^{-1}} [H_{M'}^i(R')]_n \rightarrow [H_{M'}^i(G)]_n \rightarrow [H_{M'}^{i+1}(R')]_{n+1} \xrightarrow{t^{-1}} [H_{M'}^{i+1}(R')]_n \quad (\text{exact})$$

を得る。 $n \neq -1$ とせよ。すると仮定より $[H_{M'}^i(G)]_n = [H_M^i(G)]_n = (0)$ なので

$$[H_{M'}^i(R')]_{n+1} \xrightarrow{t^{-1}} [H_{M'}^i(R')]_n$$

は全射で

$$[H_{M'}^{i+1}(R')]_{n+1} \xrightarrow{t^{-1}} [H_{M'}^{i+1}(R')]_n$$

は単射であることが分かる。従って

$$[H_{M'}^i(R')]_{k(n+1)} \xrightarrow{t^{-k}} [H_{M'}^i(R')]_{kn}$$

は全射で

$$[H_{M'}^{i+1}(R')]_{k(n+1)} \xrightarrow{t^{-k}} [H_{M'}^{i+1}(R')]_{kn}$$

は単射である。ここで $[H_{M'}^j(R')]_{km} \cong [H_{N'}^j(R'^{(k)})]_m$ (cf. [9, THEOREM(3.1.1)]) ($j \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$ で N' は $R'^{(k)}$ の極大斉次 ideal) に注意し、 $0 \rightarrow R'^{(k)}(1) \xrightarrow{t^{-k}} R'^{(k)} \rightarrow G \rightarrow 0 \in H_{N'}^0(\cdot)$ を施して得られる完全列

$$[H_{N'}^i(R'^{(k)})]_{n+1} \xrightarrow{t^{-k}} [H_{N'}^i(R'^{(k)})]_n \rightarrow [H_{N'}^i(G')]_n \rightarrow [H_{N'}^{i+1}(R'^{(k)})]_{n+1} \xrightarrow{t^{-k}} [H_{N'}^{i+1}(R'^{(k)})]_n$$

を考えれば $[H_{N'}^i(G')]_n = (0)$ となることが分かる。従って、一般に $H_N^i(G') = H_{N'}^i(G')$ であるから、所用の vanishing $[H_N^i(G')]_n = (0)$ を得る。

(2) $a(G) < 0$ なので全ての $n \geq 0$ に対して $H_M^d(G) = (0)$ である。すると (1) の証明と同様にして、 $n \geq 0$ ならば $[H_N^d(G')]_n = (0)$ となることが示せる。従って $a(G') < 0$ である。■

系 (2.7). $i \neq d, n \neq -1$ ならば $[H_M^i(G)]_n = (0)$ で $a(G) < 0$ とせよ。すると $i \neq d+1$ ならば全ての $n \in \mathbb{Z}$ に対して $[H_M^i(R)]_{kn} = (0)$ である。

証明. (2.6) より $i \neq d, n \neq -1$ ならば $[H_N^i(G')]_n = (0)$ で $a(G') < 0$ なので, [14, Theorem 1.1] より $R(F_k)$ は C-M である。従って $i \neq d+1$ ならば $H_N^i(R(F_k)) = (0)$ であるが、 $R(F_k) \cong R^{(k)}$ で $[H_N^i(R^{(k)})]_n \cong [H_M^i(R)]_{kn}$ (cf. [9, THEOREM(3.1.1)]) だから、 $[H_M^i(R)]_{kn} = (0)$ を得る。■

定理 (2.1) の証明. $J = \sum_{n \geq 1} F_n t^n$ とおき、完全列 (2.4) と (2.5) を用いて証明する。

(1) $\Rightarrow$ (2) $i < d$ とすると仮定より $H_M^i(R) = H_M^{i+1}(R) = (0)$ なので (2.4) より $H_{\mathbf{m}}^i(A) \cong H_M^{i+1}(J)$, (2.5) より $H_M^i(G) \cong H_M^{i+1}(J)(1)$ を得る。従って $H_M^i(G) \cong H_{\mathbf{m}}^i(A)(1)$ となり、(2) の (i) と最後の主張が示された。さらに (2.4) と (2.5) から二つの R -加群の完全列

$$0 \rightarrow H_{\mathbf{m}}^d(A) \rightarrow H_M^{d+1}(J) \rightarrow H_M^{d+1}(R) \quad \text{と}$$

$$0 \rightarrow H_M^d(G) \rightarrow H_M^{d+1}(J)(1) \rightarrow H_M^{d+1}(R)$$

が induce され、これらと (2.3) より $n \geq 0$ ならば $[H_M^{d+1}(J)]_{n+1} = (0)$ で $[H_M^d(G)]_n \cong [H_M^{d+1}(J)]_{n+1}$ である。よって $[H_M^d(G)]_n = (0)$ for $\forall n \geq 0$ 即ち $a(G) < 0$ となって (2) の (ii) が示された。

(2) $\Rightarrow$ (1) $i < d + 1$ とする。 $H_M^i(R) = (0)$ を示したい。(2.4) と (2.5) より二つの完全列

$$(a) \quad H_M^{i-1}(A) \rightarrow H_M^i(J) \rightarrow H_M^i(R) \rightarrow H_M^i(A) \quad \text{と}$$

$$(b) \quad H_M^{i-1}(G) \rightarrow H_M^i(J)(1) \rightarrow H_M^i(R) \rightarrow H_M^i(G)$$

を得る。 $n \geq 0$ とせよ。まず (a) より $[H_M^i(J)]_{n+1} \cong [H_M^i(R)]_{n+1}$ で、一方条件 (2) より $[H_M^{i-1}(G)]_n = [H_M^i(G)]_n = (0)$ だから (b) より $[H_M^i(J)]_{n+1} \cong [H_M^i(R)]_n$ である。よって $[H_M^i(R)]_n \cong [H_M^i(R)]_{n+1}$ であるが、 $[H_M^i(R)]_m = (0)$ for $m \gg 0$ なので、これは $[H_M^i(R)]_n = (0)$ を意味する。次に $n < 0$ とせよ。すると (a) より $[H_M^i(J)]_n \cong [H_M^i(R)]_n$ で、(b) より inclusion $[H_M^i(J)]_n \hookrightarrow [H_M^i(R)]_{n-1}$ を得る。よって $[H_M^i(R)]_n \hookrightarrow [H_M^i(R)]_{n-1}$ とでき、これを繰り返して $[H_M^i(R)]_n$ を $[H_M^i(R)]_{kn}$ ($k \geq 1$) の中に埋め込めるが、 k を $F_{kn} = F_k^n$ for all $n \in \mathbb{Z}$ となる様にとれば、(2.7) より $[H_M^i(R)]_{kn} = (0)$ であるから、結局 $[H_M^i(R)]_n = (0)$ となる。以上で $H_M^i(R) = (0)$ が示された。■

3 Gorenstein 性

この節では A は Gorenstein 環の像であると仮定し、canonical module K_A, K_G, K_R 等を解析することによって、 R の Gorenstein 性を特徴付けることを目標とする。まず $\text{grade}_A F_1 \geq 2$ の場合の statement を述べると

定理 (3.1). $\text{grade}_A F_1 \geq 2$ の時、次は同値である。

- (1) R は Gorenstein 環である。
- (2) (i) $i \neq d, n \neq -1$ ならば $[H_M^i(R)]_n = (0)$. (ii) $K_A \cong A$. (iii) $K_G \cong G(-2)$.

系 (3.2). A が C-M で、 $\text{grade}_A F_1 \geq 2$ の時、次は同値である。

- (1) R は Gorenstein 環である。
- (2) A と G は共に Gorenstein 環で $a(G) = -2$

次に $\text{grade}_A F_1 = 1$ の場合の statement を述べる為に、filtration F についての次の条件を考える。: **条件 (#)** $f \in \text{Hom}_A(F_1, A)$ ならば $\forall n \geq 1$ に対して $f(F_n) \subseteq F_{n-1}$.

命題 (3.3). 次の様な $F = \{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は条件 (#) をみたす。

- (1) I が A の ideal で S が A の積閉集合の時、 $\forall n \geq 1$ に対して $F_n = I^n \cdot S^{-1}A \cap A$ とおく。
- (2) $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ が graded ring で A_1 が A -NZD を含む時、 $F_n = \bigoplus_{i \geq n} A_i$ とおく。

証明 (1) $f \in \text{Hom}_A(F_1, A)$, $n \geq 1$ とする。 $\exists s \in S$ s.t. $sF_n \subseteq I^n$. すると $sf(F_n) = f(sF_n) \subseteq f(I^n) = I^{n-1}f(I) \subseteq I^{n-1}$. よって $f(F_n) \subseteq f(F_{n-1})$.

(2) $k \leq -2$ ならば $[\underline{\text{Hom}}_A(F_1, A)]_k = (0)$ を示せば十分。そこで $k \leq -2$ として $\forall f \in [\underline{\text{Hom}}_A(F_1, A)]_k$ をとる。仮定より $A_1 \ni \exists a : A\text{-NZD}$. すると $f(a) \in A_{k+1} = (0)$. よって $\forall x \in F_1$ に対して $af(x) = xf(a) = 0$. a は A -NZD なので $f(x) = 0$. 従って $f = 0$.

■

さて、 $\text{grade}_A F_1 = 1$ の場合の R の Gorenstein 性の特徴付けは次の様になる。

定理 (3.4). A は (S_2) で $\text{ht}_A F_1 = 1$ とする。もし F が条件 (#) をみたし、 $F_1 \subseteq \mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ で $\text{ht}_A \mathfrak{p} = 1$ ならば $A_{\mathfrak{p}}$ が Gorenstein であれば次は同値である。

- (1) R は Gorenstein 環。
- (2) (i) $i \neq d, n \neq -1$ ならば $[H_M^i(G)]_n = (0)$. (ii) $K_A \cong \text{Hom}_A(F_1, A)$. (iii) $0 \rightarrow G(-2) \rightarrow K_G \rightarrow \text{Ext}_A^1(A/F_1, A) \rightarrow 0$ なる graded R -modules の安全列が存在する。

定理 (3.1) と定理 (3.4) の証明はいくつかの step に分けて行う。まず次を示す。

命題 (3.5). F は条件 (#) をみたすとする。この時 R が Gorenstein 環であれば次が成り立つ。

- (i) $i \neq d, n \neq -1$ ならば $[H_M^i(G)]_n = (0)$.
- (ii) $K_A \cong \text{Hom}_A(F_1, A)$.
- (iii) $0 \rightarrow G(-2) \rightarrow K_G \rightarrow \text{Ext}_A^1(A/F_1, A) \rightarrow 0$ なる graded R -modules の完全列が存在する。

(3.5) の証明の為に次を準備する。

補題 (3.6). R が C-M ならば F_1 は A-NZD を含む。

証明. $J = \sum_{n \geq 1} F_n t^n$ とおく。 $R/J \cong A$ なので $\text{ht}_R J = \dim R - \dim A = 1$. よって $J \not\subseteq P$ for $\forall P \in \text{Ass } R$. 従って斉次元 $ct^n \in J$ ($c \in F_n, n \geq 1$) で $ct^n \notin P$ for $\forall P \in \text{Ass } R$ となるものが存在する。すると ct^n は R -NZD なので、 c は A-NZD となり $c \in F_n \subset F_1$ である。■

命題 (3.5) の証明. (i) は定理 (2.1) の結果に他ならないので、(ii) と (iii) を示す。(2.2) より $K_R \cong R(-1)$ だから $K_A \cong \underline{\text{Ext}}_R^1(A, R(-1))$, $K_G \cong \underline{\text{Ext}}_R^1(G, R(-1))$ となる。よって (2.4)、(2.5) に $\underline{\text{Hom}}_R(\cdot, R(-1))$ を施して完全列

$$(2.4)^* \quad 0 \rightarrow R(-1) \rightarrow L(-1) \rightarrow K_A \rightarrow 0$$

$$(2.5)^* \quad 0 \rightarrow R(-1) \rightarrow L(-2) \rightarrow K_G \rightarrow 0$$

を得る。但し $L = \underline{\text{Hom}}_R(J, R)$ である。まず (2.4)* より $K_A \cong L_{-1}$. ここで $f \in \text{Hom}_A(F_1, A)$ に対して $\varphi(f) \in L_{-1}$ を $\varphi(f)(ct^n) = f(c)t^{n-1}$ ($c \in F_n, n \geq 1$) で定め (F が条件 (#) をみたすのでこれが可能となる)、

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \text{Hom}_A(F_1, A) & \rightarrow & L_{-1} \\ f & \mapsto & \varphi(f) \end{array}$$

を考えると、明らかに φ は injective であるから、 φ が surjective であることを示せば条件 (ii) を得る。そこで $\forall \sigma \in L_{-1}$ をとり、この σ に対して $g \in \text{Hom}_A(F_1, A)$ を $g(c) = \sigma(ct) \in R_0 = A$ ($c \in F_1$) で定める。すると

$$\varphi(g)(xt^n) = \sigma(xt^n) \text{ for } \forall x \in F_n$$

となることが n についての帰納法で示せる。実際 $n = 1$ のときは g の定義より明らかで、 $n > 1$ とすると、(3.6) で存在が保証された A-NZD $a \in F_1$ を用いて、

$$a \cdot \varphi(g)(xt^n) = a \cdot g(x)t^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
&= at \cdot g(x)t^{n-2} \\
&= at \cdot \varphi(g)(xt^{n-1}) \\
&= at \cdot \sigma(xt^{n-1}) \quad (\text{帰納法の仮定}) \\
&= \sigma(axt^n) \\
&= a \cdot \sigma(xt^n)
\end{aligned}$$

となり、よって $\varphi(g)(xt^n) = \sigma(xt^n)$ である。従って $\varphi(g) = \sigma$ であるが σ は任意にとっているため φ は surjective である。

次に (iii) の完全列の存在を保証するには (a) $[K_G]_n = (0)$ if $n \leq 0$ (b) $[K_G]_1 \cong \text{Ext}_A^1(A/F_1, A)$ (c) $(K_G)_{[2]} \cong G(-2)$ を示せば十分である。但し $(K_G)_{[2]} = \bigoplus_{n \geq 2} [K_G]_n$ とする (一般に、graded R -module $X = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} X_n$ と $k \in \mathbb{Z}$ に対して $X_{[k]} = \bigoplus_{n \geq k} X_n$ とする。 $\forall k, \forall l \in \mathbb{Z}$ について自然な同型 $(X(k))_{[l]} \cong (X_{[k+l]})(k)$ が存在することに注意せよ)。まず、 R は C-M なので、(2.1) より $a(G) < 0$ のはずであるから、(a) はただちに得られる。次に、 $0 \rightarrow F_1 \rightarrow A \rightarrow A/F_1 \rightarrow 0$ (exact) の A -dual をとって、 $0 \rightarrow A \rightarrow \text{Hom}_A(F_1, A) \rightarrow \text{Ext}_A^1(A/F_1, A) \rightarrow 0$ (exact) を考え、さらに (2.5)* の degree = 1 の部分を取りだして、可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & A & \rightarrow & \text{Hom}_A(F_1, A) & \rightarrow & \text{Ext}_A^1(F_1, A) \rightarrow 0 \\
& & \parallel & & \wr \downarrow \varphi & & \\
0 & \rightarrow & A & \rightarrow & L_{-1} & \rightarrow & [K_G]_1 \rightarrow 0
\end{array}$$

を作れば、(b) が分かる。最後に (c) は (2.5) と (2.5)* から induce される図式

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & (R(-1))_{[2]} & \rightarrow & (L(-2))_{[2]} & \rightarrow & (K_G)_{[2]} \rightarrow 0 \quad (\text{exact}) \\
& & \wr \parallel & & \wr \parallel & & \\
& & (R_{[1]})(-1) & & (L_{[0]})(-2) & & \\
& & \wr \parallel & & \wr \parallel & & \\
0 & \rightarrow & (J(1))(-2) & \rightarrow & R(-2) & \rightarrow & G(-2) \rightarrow 0 \quad (\text{exact})
\end{array}$$

を考えればただちに示される。■

今度は R が Gorenstein になる為の十分条件を述べる。

補題 (3.6). R は C-M で $[K_R]_1 \cong A$ とする。このとき $\forall n \geq 2$ に対して $[K_G]_n \cong F_{n-2}/F_{n-1}$ ならば R は Gorenstein である。

証明. 仮定より $\exists \xi \in [K_R]_1$ s.t. $[K_R]_1 = A \cdot \xi$. そこで

$$[K_R]_n = F_{n-1}t^{n-1} \cdot \xi \text{ for } \forall n \geq 1$$

となることを n についての帰納法で示す (これは $K_R \cong R(-1)$ を意味する)。 $n = 1$ の時は ξ の取り方より明らかなので、 $n \geq 2$ の場合を考える。 $K_A \cong \underline{\text{Ext}}_R^1(A, K_R)$, $K_G \cong \underline{\text{Ext}}_R^1(G, K_R)$ なので、 (2.4) と (2.5) に $\underline{\text{Hom}}_R(\cdot, K_R)$ を施して完全列

$$(2.4)^\vee \quad 0 \rightarrow K_R \rightarrow \underline{\text{Hom}}_R(J, K_R) \rightarrow K_A \rightarrow 0$$

$$(2.5)^\vee \quad 0 \rightarrow K_R \rightarrow \underline{\text{Hom}}_R(J, K_R)(-1) \rightarrow K_G \rightarrow 0$$

を得る。 (2.5) $^\vee$ より $0 \rightarrow [K_R]_n \rightarrow [\underline{\text{Hom}}_R(J, K_R)]_{n-1} \rightarrow [K_G]_n \rightarrow 0$ (exact) であるが、 (2.4) $^\vee$ より $[K_R]_{n-1} \cong [\underline{\text{Hom}}_R(J, K_R)]_{n-1}$ なので、 結局

$$0 \rightarrow [K_R]_n \rightarrow [K_R]_{n-1} \rightarrow [K_G]_n \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

を得る。 ここで $\forall i \in \mathbb{Z}$ に対して、 $\psi_i : F_{i-1} \rightarrow [K_R]_i$ を $\psi_i(c) = ct^{i-1} \cdot \xi$ ($c \in F_{i-1}$) で定める。 すると

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & [K_R]_n & \rightarrow & [K_R]_{n-1} & \rightarrow & [K_G]_n \rightarrow 0 \quad (\text{exact}) \\ & & \uparrow \psi_n & & \uparrow \psi_{n-1} & & \\ 0 & \rightarrow & F_{n-1} & \rightarrow & F_{n-2} & \rightarrow & F_{n-2}/F_{n-1} \rightarrow 0 \quad (\text{exact}) \end{array}$$

が可換になることが確かめられる。 $\rho : F_{n-2}/F_{n-1} \rightarrow [K_G]_n$ を induce された射とする。 帰納法の仮定より ψ_{n-1} は surjective なので ρ も surjective であるが、 $F_{n-2}/F_{n-1} \cong [K_G]_1$ なので ρ は isomorphism でなければならない。 すると上の可換図式に snake lemma を適用して ψ_n は surjective であることが分かる。 従って $[K_R]_n = F_{n-1}t^{n-1} \cdot \xi$ である。 ■

定理 (3.1) の証明. (1) $\Rightarrow$ (2) $\text{Ext}_A^i(A/F_1, A) = (0)$ if $i \leq 1$ なので、 $0 \rightarrow F_1 \rightarrow A \rightarrow A/F_1 \rightarrow 0$ (exact) の A -dual をとって、 $A \cong \text{Hom}_A(F_1, A)$ を得る。 従って (2) の条件が全てみたされることは、 (3.5) からただちに分かる。

(2) $\Rightarrow$ (1) 条件 (ii) と (iii) より、 定理 (2.1) を用いて R が C-M であることを知る。 さらに条件 (iii) は $n \geq 2$ ならば $[K_G]_n \cong F_{n-2}/F_{n-1}$ となることも保証しているので、 結局 $[K_R]_1 \cong A$ を示しさえすれば (3.6) より R が Gorenstein であることが分かる。 そこで再び

(2.4)[∨]と(2.5)[∨]を考える。 $[K_G]_1 = (0)$ なので(2.5)[∨]より $[K_R]_1 \cong [\underline{\text{Hom}}_R(J, K_R)]_0$ で、一方 $[K_R]_0 = (0)$ (cf. (2.2)) なので(2.4)[∨]より $[\underline{\text{Hom}}_R(J, K_R)]_0 \cong K_A$ となりさらに条件(ii)より $K_A \cong A$ であるから、 $[K_R]_1 \cong A$ を得る。■

定理 (3.4) の証明. (3.5) より (2) $\Rightarrow$ (1) のみ示せば十分である。条件(iii)は $n \leq 0$ ならば $[K_G]_n = (0)$ 即ち $a(G) < 0$ であることを意味するので、条件(i)と併せて、 R はC-Mである。さらに条件(iii)は $n \geq 2$ ならば $[K_G]_n \cong F_{n-2}/F_{n-1}$ となることも示しているので、(3.6)より $[K_R]_1 \cong A$ を示せば十分である。ここで再び(2.4)[∨]と(2.5)[∨]を考える。(2.5)[∨]より $0 \rightarrow [K_R]_1 \rightarrow [\underline{\text{Hom}}_R(J, K_R)]_0 \rightarrow [K_G]_1 \rightarrow 0$ (exact) であるが、(2.4)[∨]より $[\underline{\text{Hom}}_R(J, K_R)]_0 \cong K_A$ で条件(iii)より $[K_G]_1 \cong E := \text{Ext}_A^1(A/F_1, A)$ なので、結局

$$0 \rightarrow [K_R]_1 \rightarrow K_A \rightarrow E \rightarrow 0$$

なる完全列を得る。一方で $0 \rightarrow F_1 \rightarrow A \rightarrow A/F_1 \rightarrow 0$ (exact) に $\text{Hom}_A(\cdot, A)$ を施して $0 \rightarrow A \rightarrow \text{Hom}_A(F_1, A) \rightarrow E \rightarrow 0$ (exact) を得るが、条件(ii)より $\text{Hom}_A(F_1, A) \cong K_A$ なので

$$0 \rightarrow A \rightarrow K_A \rightarrow E \rightarrow 0$$

なる完全列の存在が保証される。従って次を示せば $[K_R]_1 \cong A$ を得る。

Claim. $K = K_A$ とおく。 Z が K の A -submoduleで $K/Z \cong E$ ならば

$$Z = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A E} F_1 K_{\mathfrak{p}} \cap K$$

と書ける。即ちその様な A -submodule Z は一意に定まる。

Claim の証明. $\forall \mathfrak{p} \in \text{Ass}_A E$ をとる。 $F_1 E = (0)$ より $F_1 \subseteq \mathfrak{p}$ なので $\text{ht}_A \mathfrak{p} > 0$ 従って $\text{depth}_{A_{\mathfrak{p}}} K_{\mathfrak{p}} > 0$ である。そこで $0 \rightarrow A_{\mathfrak{p}} \rightarrow K_{\mathfrak{p}} \rightarrow E_{\mathfrak{p}} \rightarrow 0$ (exact) に depth lemma を適用して $\text{depth}_{A_{\mathfrak{p}}} = 1$ を得る。 A は (S_2) であったから $\text{ht}_A \mathfrak{p} = 1$ でなければならない。すると仮定より $A_{\mathfrak{p}}$ はGorensteinである。よって

$$\text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(F_1 A_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}}) \cong K_{\mathfrak{p}}$$

$$\cong K_{(A_p)}$$

$$\cong A_p$$

だから $F_1 A_p$ は単項 ideal である。ここで $Z = \bigcap_{p \in \text{Ass}_A E} Z(p)$ は Z の K 内での準素分解とする ($Z(p)$ は p -primary component を表す)。上で示した様に $\text{Ass}_A E = \text{Min}_A E$ なので $\forall p \in \text{Ass}_A E$ について $Z(p) = \text{Ker}(K \xrightarrow{\text{nat}} K_p/Z_p)$ であるから、 $Z_p = F_1 K_p$ を示せば Claim を得る。 $F_1 E = (0)$ より $F_1 K \subseteq Z$ なので、自然な全射 $\varepsilon : K/F_1 K \rightarrow K/Z$ を考える。すると $\forall p \in \text{Ass}_A E$ に対して

$$\begin{array}{ccc} K_p/F_1 K_p & \xrightarrow{\varepsilon \otimes A_p} & K_p/Z_p \rightarrow 0 \quad (\text{exact}) \\ & \wr & \\ & E_p & \end{array}$$

であるが、一方で A_p が Gorenstein で $F_1 A_p$ が単項であるから、 $K_p/F_1 K_p \cong A_p/F_1 A_p \cong E_p$ となる。従って $\varepsilon \otimes A_p$ は同型写像でなければならず、これは $F_1 K_p = Z_p$ を意味する。■

最後に、” $F_1 \subseteq p \in \text{Spec } A$ で $\text{ht}_A p = 1$ ならば A_p は Gorenstein” という定理 (3.4) の仮定は、ある場合には自動的にみたされることを注意しておく。

命題 (3.7). R は C-M で $\text{Hom}_A(F_1, A) \cong K_A$ とし、 $F_1 \subseteq p \in \text{Spec } A$ で $\text{ht}_A p = 1$ なるものを考える。このときもし $F_n A_p = F_1^n A_p$ for $\forall n \in \mathbb{Z}$ ならば A_p は Gorenstein 環である。

証明. $R_p \cong R(F_1 A_p)$ なので [8, COROLLARY(3.5)] より A_p は C-M で $F_1 A_p$ は単項 ideal である。従って

$$\begin{aligned} K_{(A_p)} &\cong (K_A)_p \\ &\cong \text{Hom}_{A_p}(F_1 A_p, A_p) \\ &\cong A_p \end{aligned}$$

となり A_p が Gorenstein であることを得る。■

4 $R^\natural$ の C-M 性と Gorenstein 性

$R = R(F) = \sum_{m \geq 0} F_m t^m$ の filtration $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を

$$J_n = \begin{cases} \sum_{m \geq n} F_m t^m & \text{if } n > 0 \\ R & \text{if } n \leq 0 \end{cases}$$

と定め (特に $J = J_1$ と書く)、

$$R^\natural := R(\mathcal{J}) = \sum_{n \geq 0} J_n u^n \subseteq R[u]$$

(u は変数) とおく。この節では 2 節と 3 節の結果を用いて、 $R^\natural$ の環論的性質を調べることを目的とする。

命題 (4.1). $R^\natural$ は Noether 環で $\dim R^\natural = d + 2$.

証明. R は Noether 環と仮定しているので、 $f_1 \in F_{m_1}, \dots, f_r \in F_{m_r}$ ($m_1, \dots, m_r$ は正整数) を $R = A[f_1 t^{m_1}, \dots, f_r t^{m_r}]$ となる様にとれる。そこで

$$S = A[\{f_k t^{m_k} u^n \mid 1 \leq k \leq r, 0 \leq n \leq m_k\}] \subseteq R^\natural = \sum_{m \geq n} F_m t^m u^n$$

とおく。すると $m \geq n$ なる任意の自然数 m, n について $F_m t^m u^n \subseteq S$ となることが (例えば m についての帰納法で) 容易に分かる。よって $R^\natural = S$ となり $R^\natural$ は Noether 環である。 $\dim R^\natural = d + 2$ であることを示すには、 $\exists P \in \text{Assh } R$ s.t. $J \not\subseteq P$ を示せば十分である (cf.(1.2))。仮定より $\dim R = d + 1$ なので、 $\exists \mathfrak{p} \in \text{Assh } A$ s.t. $F_1 \not\subseteq \mathfrak{p}$ 。すると $J \not\subseteq P := \mathfrak{p}A[t] \cap R$ で $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_d = \mathfrak{m}$ なる A 内の素 ideal 鎖がとれる。ここで $k > 0$ を $F_1 \not\subseteq \mathfrak{p}_{k-1}$ かつ $F_1 \subseteq \mathfrak{p}_k$ となる様にとる。すると $P = \mathfrak{p}_0 A[t] \cap R \subset \dots \subset \mathfrak{p}_{k-1} A[t] \cap R \subset \mathfrak{p}_{k-1} R + J \subset \mathfrak{p}_k R + J \subset \dots \subset \mathfrak{p}_d R + J$ は R 内の素 ideal 鎖で長さが $d + 1$ なので、 $\dim R/P = d + 1$ 。従って $P \in \text{Assh } R$ である。■

次の結果は、 $R^\natural$ の C-M 性や Gorenstein 性を調べるには、実は R 自身を調べれば、大体十分であることを意味している。

補題 (4.2). $G(\mathcal{J}) \cong R$ as graded rings.

証明. $\varphi: R \rightarrow G(\mathcal{J})$ ($\sum_m a_m t^m \mapsto \overline{\sum_m a_m t^m u^m}$) は同型写像となる。■

まず $R^\natural$ の C-M 性の特徴つけてみる。

定理 (4.3). 次は同値である。

- (1) $R^\natural$ は C-M である。
- (2) $i \neq d+1, n \neq -1$ ならば $[H_M^i(R)]_n = (0)$.

このとき F_1 は A-NZD を含む。

証明. まず $R^\natural$ と $R_M \otimes_R R^\natural$ の C-M 性は同値であることに注意せよ。そこで局所環 R_M 内の filtration $\mathcal{J}_M = \{J_n R_M\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を考える。 $R_M \otimes_R R^\natural \cong R(\mathcal{J}_M)$ で $R_M \otimes_R G(\mathcal{J}) \cong G(\mathcal{J}_M)$ なので、(2.1) より $R_M \otimes_R R^\natural$ の C-M 性は $R_M \otimes_R G(\mathcal{J})$ の local cohomology の vanishing で特徴付けられる。更に $R \setminus M$ の元は $G(\mathcal{J})$ に unit として作用するから $R_M \otimes_R G(\mathcal{J}) \cong G(\mathcal{J})$ となり、(4.2) より $R_M \otimes_R G(\mathcal{J}) \cong R$ を得る。従って

$$R^\natural \text{ が C-M} \Leftrightarrow i \neq d+1, n \neq -1 \text{ ならば } [H_M^i(R)]_n = (0) \text{ で } a(R) < 0$$

であるが、(2.2) より $a(R) < 0$ は常に成立しているので、所用の結果を得る。■

定理 (4.4). $R^\natural$ は C-M とせよ。このとき次が成り立つ。

- (1) $\forall k \geq 2$ について $R^{(k)}$ は C-M である。
- (2) R は (S_2) をみたす。

証明. (1) $k \geq 2$ とせよ。すると $\forall n \in \mathbb{Z}$ について $kn \neq -1$ なので $i \neq d+1$ ならば $[H_M^i(R)]_{kn} = (0)$ である。ここで N を $R^{(k)}$ の極大斉次 ideal とすれば $[H_N^i(R^{(k)})]_n \cong [H_M^i(R)]_{kn}$ ([9, THEOREM(3.1.1)]) となることに注意して $\forall i \neq d+1$ について $H_N^i(R^{(k)}) = (0)$ を得る。従って $R^{(k)}$ は C-M である。

- (2) いくつかの step に分けて証明する。

Step 1. $\text{depth } R_M \geq 2$.

証明. (1) より $R^{(2)}$ は C-M だから、(3.6) より F_2 は A-NZD a を含む。そこで $0 \rightarrow R \xrightarrow{a} R \rightarrow R/aR \rightarrow 0$ (exact) から induce される local cohomology の長完全列を考えると、 $H_M^0(R) = (0)$ であることから、 $H_M^0(R/aR) \subseteq H_M^1(R)$ を得る。すると $H_M^0(R/aR) \subseteq R/aR$ で更に (4.3) より $H_M^1(R) = [H_M^1(R)]_{-1}$ なので $H_M^0(R/aR) = (0)$ でなければならない。よって $\text{depth } R_M/aR_M \geq 1$ 従って $\text{depth } R_M \geq 2$.

Step 2. a は Step 1 で選んだ A-NZD とする。このとき $P \in \text{Ass}_R R/aR$ ならば $P \cap A \neq \mathfrak{m}$ 又は $\text{ht}_R P = 1$ である。

証明. $P \cap A = \mathfrak{m}$ とせよ。もし $J \subseteq P$ ならば $P = M$ よって $\text{depth } R_M = 1$ となって Step 1 に反する。従って $J \not\subseteq P$. すると $x \in F_l$ ($l > 0$) で $xt^l \notin P$ なるものがとれる。一方で $P \in \text{Ass}_R R/aR$ なので $P = aR :_R yt^k$ ($y \in F_k, k > 0$) と書ける。ここで必要ならば yt^k を xyt^{k+l} でおきかえることにより、 $k \geq 2$ と仮定してよい。すると $R^{(k)}$ は C-M で、 $P \cap R^{(k)} = aR^{(k)} :_{R^{(k)}} yt^k$ より $P \cap R^{(k)} \in \text{Ass}_{R^{(k)}} R^{(k)}/aR^{(k)}$ なので、 $\text{ht}_{R^{(k)}} P \cap R^{(k)} = 1$ である。 R は $R^{(k)}$ 上 integral なので $\text{ht}_R P = 1$ を得る。

Step 3. $\text{depth } R_Q \geq \min\{2, \text{ht}_R Q\}$ for $\forall Q \in \text{Spec } R$.

証明. 任意に $Q \in \text{Spec } R$ をとり $\mathfrak{p} = Q \cap A$ とおく。 $F_{\mathfrak{p}} = \{F_m A_{\mathfrak{p}}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ (これは $A_{\mathfrak{p}}$ 内の filtration になる) とおくと $R_{\mathfrak{p}} \cong R(F_{\mathfrak{p}})$, $QR_{\mathfrak{p}} \cap A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ で $R_{\mathfrak{p}}^{\natural} \cong R_{\mathfrak{p}} \otimes_R R^{\natural}$ は C-M なので最初から $Q \cap A = \mathfrak{m}$ の場合を考えれば良い。すると Q は Step 1 でとった R-NZD a を含む。よって $\text{ht}_R Q = 1$ の場合は所用の不等式が成り立つので、 $\text{ht}_R Q \geq 2$ の場合を考える。すると Step 2 より $Q \not\subseteq P$ for $\forall P \in \text{Ass}_R R/aR$ であるから、 Q は R/aR -NZD を含む。従って $\text{depth } R_Q \geq 2$ となる。■

次に $R^{\natural}$ の Gorenstein 性を考える。以下常に A は Gorenstein 環の像と仮定する。目標は次を示す事である。

定理 (4.5). 次は同値である。

(1) R^b は Gorenstein 環である。

(2) 次の条件がみたされる。

(i) $i \neq d+1, n \neq -1$ ならば $[H_M^i(R)]_n = (0)$

(ii) $K_R \cong \text{Hom}_R(J, R)$.

証明はいくつかの Step に分けて行なう。

補題 (4.6). $I = F_1 R + J$ とおく。もし $\text{ht}_A F_1 > 0$ ならば $\text{ht}_R I \geq 2$ である。

証明. P は I を含む R の素 ideal とする。 $\mathfrak{p} = P \cap A$ とし $A_{\mathfrak{p}}$ の filtration $F_{\mathfrak{p}} = \{F_m A_{\mathfrak{p}}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ を考える。すると $R_{\mathfrak{p}} \cong R(F_{\mathfrak{p}})$ であるが、 $\text{ht}_{A_{\mathfrak{p}}} F_1 A_{\mathfrak{p}} > 0$ なので $\dim R_{\mathfrak{p}} \geq 2$ である。実は $PR_{\mathfrak{p}}$ は $R_{\mathfrak{p}}$ の極大斉次 ideal なので $\text{ht}_R P = \text{ht}_{R_{\mathfrak{p}}} PR_{\mathfrak{p}} = \dim R_{\mathfrak{p}} \geq 2$ となり、従って $\text{ht}_R I \geq 2$ である。■

系 (4.7). $P \in \text{Spec } R$ で $\text{ht}_R P \leq 1$ のものを考える。もし $\text{ht}_A F_1 > 0$ ならば $J_n R_P = J^n R_P$ for $\forall n \in \mathbb{Z}$ である。

証明. $J \not\subseteq P$ ならば自明なので $J \subseteq P$ のときを考える。 $\mathfrak{p} = P \cap A$ とおくと (4.6) より $F_1 \not\subseteq \mathfrak{p}$ だから $R_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}[t]$ となる。従って $J_n R_{\mathfrak{p}} = J^n R_{\mathfrak{p}}$ for $\forall n \in \mathbb{Z}$. これを $PR_{\mathfrak{p}}$ で局所化して所用の等式を得る。■

以下 $(\cdot)^* = \underline{\text{Hom}}_R(\cdot, R)$ とする。

補題 (4.8). F_1 が A -NZD を含むとすると、 $\forall n \leq -2$ について $[J^*]_n = (0)$ で $[J^*]_{-1} \neq (0)$ となる。

証明. $n \leq -2$ とし $\forall \varphi \in [J^*]_n$ をとる。仮定より A -NZD $a \in F_1$ が存在する。すると $at \in J_1$ なので $\varphi(at) \in R_{n+1} = (0)$. よって任意の $c \in F_m$ ($m > 0$) について $at \cdot \varphi(ct^m) = ct^m \cdot \varphi(at) = 0$ であるが、 at は R -NZD なので $\varphi(ct^m) = 0$. これより

$\varphi = 0$. 従って $[J^*]_n = (0)$. 又、

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{t^{-1}} & R \\ ct^m & \mapsto & ct^{m-1} \end{array}$$

は $[J^*]_{-1}$ の元なので、 $[J^*]_{-1} \neq (0)$ である。■

系 (4.9). $R^\natural$ は C-M とする。このとき $K_R \cong J^*$ as the underlying R -modules ならば $K_R \cong J^*(-2)$ as graded R -modules である。

証明. (4.4) より R は (S_2) なので、 $K_R \cong J^*$ as the underlying R -modules ならば $\exists m \in \mathbb{Z}$ s.t. $K_R \cong J^*(m)$ as graded R -modules となることがわかる。(2.2) より $a(R) = -1$ 即ち $\min\{n \mid [K_R]_n \neq (0)\} = 1$ で、一方 (4.3) より F_1 は A -NZD を含むので、(4.8) より $\min\{n \mid [J^*(m)]_n \neq (0)\} = -(m+1)$ であるから $1 = -(m+1)$. 従って $m = -2$ を得る。

■

補題 (4.10). $R^\natural$ が C-M ならば graded R -modules として

$$\underline{\text{Ext}}_R^1(R/J, R)(-1) \cong \bigcap_{n \geq 1} (aF_{n-1} :_A F_n).$$

証明. (4.3) より $F_1 \ni \exists a : A$ -NZD. すると at は R -NZD. ここで次を示す。

Claim $(atR :_R J)/atR \cong \bigcap_{n \geq 1} (aF_{n-1} :_A F_n).$

Claim の証明. $n \geq 1$ で $ct^n \in [atR :_R J]_n$ とすると、 $ct^n \cdot F_1 t \subseteq [atR]_{n+1} = aF_n t^{n+1}$ より $cF_1 \subseteq aF_n$ だから、 $ct^n \cdot F_1 = cF_1 t^n \subseteq aF_n t^n \subseteq aF_{n-1} t^n = [atR]_n$ を得る。よって $ct^n \in atR :_R \mathbf{I}$ ($\mathbf{I} = F_1 R + J$) である。(4.6) より $\text{ht}_R \mathbf{I} \geq 2$ で (4.4) より R は (S_2) なので $\text{grade}_R \mathbf{I} \geq 2$ である。これは $atR :_R \mathbf{I} = atR$ を意味するから $ct^n \in atR$ を得る。従って $n \geq 1$ ならば $[(atR :_R J)/atR]_n = (0)$ となるが、明らかに $[(atR :_R J)/atR]_0 = \bigcap_{n \geq 1} (aF_{n-1} :_A F_n)$ なので Claim が示された。

後は完全列 $0 \rightarrow R(-1) \xrightarrow{at} R \rightarrow R/atR \rightarrow 0$ に $\underline{\text{Hom}}_R(R/J, \cdot)$ を作用させると

$$\underline{\text{Ext}}_R^1(R/J, R) \cong \underline{\text{Hom}}_R(R/J, R/atR)$$

$$\begin{aligned} &\cong (at R :_R J) / at R \\ &\cong \bigcap_{n \geq 1} aF_{n-1} :_A F_n \end{aligned}$$

となり、所用の同型を得る。■

$I_n = F_n R + J$ とおく。すると (4.10) より直ちに次を得る。

系 (4.11). $R^\flat$ が C-M ならば

$$\underline{\text{Ext}}_R^1(R/J, R) \cong \bigcap_{n \geq 1} ((aI_{n-1} + J)/J :_{R/J} I_n/J)$$

以下 $\mathcal{G} = G(\mathcal{J}) \cong \bigoplus_{n \geq 0} J_n/J_{n+1}$ とおく。

補題 (4.12). $R^\flat$ は C-M とする。このとき $K_R \cong J^*$ であるならば $0 \rightarrow \mathcal{G}(-2) \rightarrow K_{\mathcal{G}} \rightarrow \text{Ext}_R^1(R/J, R)(-1) \rightarrow 0$ なる graded $R^\flat$ -modules の完全列が存在する。

証明. 完全列 $0 \rightarrow J \rightarrow R \rightarrow R/J \rightarrow 0$ の R -dual をとって

$$0 \rightarrow R \rightarrow J^* \rightarrow \underline{\text{Ext}}_R^1(R/J, R) \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

を得るが、(4.9) より $K_R \cong J^*(-2)$ なので、この完全列から

$$0 \rightarrow R(-2) \rightarrow K_R \rightarrow \underline{\text{Ext}}_R^1(R/J, R)(-2) \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

が induce される。更に (4.10) より $\underline{\text{Ext}}_R^1(R/J, R)(-1) \cong \bigcap_{n \geq 1} (aF_{n-1} :_A F_n)$ であったから、結局

$$0 \rightarrow R(-2) \rightarrow K_R \rightarrow \bigcap_{n \geq 1} (aF_{n-1} :_A F_n)(-1) \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

が得られる。ここで (4.2) の同型 $R \cong \mathcal{G}$ によって、上の完全列は graded $\mathcal{G}$ -modules の category で

$$0 \rightarrow \mathcal{G}(-2) \rightarrow K_{\mathcal{G}} \rightarrow \bigcap_{n \geq 1} (aI_{n-1} + J/J :_{R/J} I_n/J) \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

に対応することに注意せよ。すると所用の完全列は (6.11) からただちに得られる。■

定理 (6.5) の証明. 定理 (4.3) の証明と同様に局所環 R_M 内の filtration $\mathcal{J}_M = \{J_n R_M\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を考える。このとき $R_M \otimes_R R^\natural \cong R(\mathcal{J}_M)$ で、 $R^\natural$ と $R_M \otimes_R R^\natural$ の Gorenstein 性は同値であることに注意せよ。

(1) $\Rightarrow$ (2) 条件 (i) は (4.3) 直ちに従うので (ii) を示す。(4.3) より $F_1 \ni \exists a : A\text{-NZD}$. すると at は $R\text{-NZD}$ なので (3.3) より filtration $\mathcal{J}$ は条件 (#) をみたす。従って $\mathcal{J}_M$ も条件 (#) をみたすので、(3.5) を用いて、 $R(\mathcal{J}_M)$ が Gorenstein であることから $K_{R_M} \cong \text{Hom}_{R_M}(JR_M, R_M)$ を得る。従って $(K_R)_M \cong (J^*)_M$ である。よって $K_R \cong J^*$.

(2) $\Rightarrow$ (1) (4.3) より条件 (i) は $R^\natural$ が C-M であることを意味する。従って (4.12) によって $K_R \cong J^*$ から

$$0 \rightarrow G(\mathcal{J}_M)(-2) \rightarrow K_{G(\mathcal{J}_M)} \rightarrow \text{Ext}_{R_M}^1(R_M/JR_M, R_M)(-1) \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

が induce される。更に勿論 $K_R \cong J^*$ より $(K_R)_M \cong \text{Hom}_{R_M}(JR_M, R_M)$ であるから、後は (3.7) と (4.7) より $\forall P \in \text{Spec } R$ で $J \subseteq P$ かつ $\text{ht}_R P = 1$ なるものについて R_P が Gorenstein であることに注意すれば、(3.4) を用いて $R(\mathcal{J}_M)$ が Gorenstein であることが分かる。従って $R^\natural$ も Gorenstein 環である。■

系 (4.13). $R^\natural$ が Gorenstein 環ならば $R^{(2)}$ も Gorenstein 環である。

証明. $R^\natural$ は Gorenstein とせよ。(4.5) より $K_R \cong J^*$ なので (4.12) の証明にある様に

$$0 \rightarrow R(-2) \rightarrow K_R \rightarrow \text{Ext}_A^1(A/F_1, A)(-1) \rightarrow 0$$

なる graded R -modules の完全列を得る。 $\text{Ext}_A^1(A/F_1, A)(-1)$ は degree = 1 のみにしか出現しないので、この完全列より $R(-2)^{(2)} \cong K_R^{(2)}$ となる。従って $R^{(2)}(-1) \cong K_{R^{(2)}}$ である。■

特に F が ideal adic な filtration の場合、即ちある A の ideal I に対して $F_m = I^m$

$(m \in \mathbb{Z})$ であるときは、

$$\begin{aligned}
 R^{\natural} &= \sum_{m \geq n} I^m t^m u^n \\
 &= \sum_{m \geq n} I^{(m-n)+n} t^{m-n} (tu)^n \\
 &= \sum_{n_1, n_2 \geq 0} I^{n_1+n_2} t^{n_1} u^{n_2} \quad (t_1 = t, t_2 = tu) \\
 &= A[It_1, It_2]
 \end{aligned}$$

となるが、この場合は次の様に (4.13) の逆が成り立つ。

定理 (4.14). 次は同値である。

(1) $A[It_1, It_2]$ は Gorenstein 環である。

(2) 次の条件がみたされる。

(i) $i \neq d+1, n \neq -1$ ならば $[H_M^i(R)]_n = (0)$.

(ii) $R(I^2)$ は Gorenstein 環である。

参考文献

- [1] Bourbaki, N., *Alg'ebre commutative*, Hermann, Paris (1965).
- [2] Goto, S., Herrmann, M., Nishida, K. and Villamayor, O., *On the structure of Noetherian symbolic Rees algebras*, manuscripta math., **67** (1990), 197–225.
- [3] Goto, S. and Nishida, K., *Filtrations and the Gorenstein property of the associated Rees algebras*, Preprint.
- [4] Goto, S., Nishida, K. and Shimoda, Y., *The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves*, J. Math. Soc. Japan, **43** (1991), 465–481.
- [5] Goto, S., Nishida, K. and Shimoda, Y., *The Gorensteinness of the symbolic blow-ups for certain space monomial curves*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc..

- [6] Goto, S., Nishida, K. and Shimoda, Y., *Topics on symbolic Rees algebras for space monomial curves*, to appear in Nagoya Math. J..
- [7] Goto, S., Nishida, K. and Watanabe, K., *Non-Cohen-Macaulay symbolic Rees blow-ups for space monomial curves and counterexamples to Cowsik's question*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.. Preprint.
- [8] Goto, S. and Shimoda, Y., *On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings*, Commutative algebra (analytic methods), Lect. Notes in Pure and Appl. Math., **68** (1982), 201 – 231.
- [9] Goto, S. and Watanabe, K., *On graded rings rm I*, J. Math. Soc. Japan, **30** (1978), 179-213.
- [10] Herzog, J. and Kunz, E., *Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay rings*, Lect. Notes in Math., **238**, Springer (1971).
- [11] Huneke, C., *Hilbert functions and symbolic powers*, Michigan Math. J., **34** (1987), 293–318.
- [12] Ikeda, S., *The Cohen-Macaulayness of the Rees algebras of local rings*, Nagoya Math. J., **89** (1983), 47-63.
- [13] Ikeda, S., *On the Gorensteinness of Rees algebras over local rings*, Nagoya Math. J., **102** (1986), 135-154.
- [14] Trung, N. V. and Ikeda, S., *When is the Rees algebra Cohen-Macaulay*, Comm. Alg., **17(12)** (1989), 2893–2922.
- [15] Viêt, D. Q., *A note on the Cohen-Macaulayness of Rees algebras of filtrations*, Preprint.