

Characteristic classes of conformal or projective foliations

東北大 理 佐藤 肇
西川 青季

0. 有名な Hopf の定理は, "Compact 多様体上に, 零
点を持たない vector field が存在する為の必要十分条件は
その多様体の Euler 標数が消えていること" というもので
ある。実際, 零点を持つ vector field が与えられた時,
その多様体の Euler 標数は, 零点のまわりの Index の和とし
て表わされる。

多様体の Euler 標数は, 多様体の Euler form の積分と
して表わされる。更に一般の Characteristic number (
ある characteristic form の積分) も vector field の
零点のまわりの "Index" の和で表わすことが出来るかという
問題が考えられる。vector field は常に積分可能であるか
ら, これは, 多様体の Characteristic number も, 与えら
れた 1 次元 foliation の特異点の近傍の状況で記述する
という問題に等しい。

更に、これを一般化すれば、多様体の *characteristic number* を (次元 n とは限らない) *foliation* の特異点の近傍の状況で記述せよという問題となる。この問題が解かれる為には、次の2つが成立しなければならない。

a). *foliation* が特異点を持たない部分では、*characteristic form* の積分が消えていること。

b). 特異点の近傍での *characteristic form* の積分を、特異点の状況から得られる見易い表現であらわすこと。

ところが、Hopf の定理によれば、1次元の *foliation* が *non-singular* である為には、Euler 数も消えていることと十分であるのだから、一般の *characteristic number* も消えているとは限らない。従って a) の成立の為には、元の *foliation* に、幾何学的構造を仮定しなければならない。

Bott, Baum-Bott, Baum-Cheeger は、正則、有理化、あるいは Killing vector field に対し、a) が成立することを示し、更にこれを vector field の "Residue" として表現して、この問題を解いた。これらに逆に、元の様子を幾何学的な構造を持った vector field を *non-singular* に変える為の障害を、多様体の *characteristic number* で表わしたとも解釈できて、興味深い。もしも、元の vector field が生成する変換が、多様体の自己同型群のコンパクト

を部分群に含まれるならば, 上の a). b) は, Atiyah-Singer の G -index 理論に含まれ, 実際. Killing vector field の場合は, その方法で証明されるが, 正則 vector field に対してすらも適用出来ない。^{*} 次元の高い foliation に対して, a) は Pasternack により, Killing foliation = Riemannian foliation に対し, 証明され, 又. 正則 foliation に対しては, Baum-Bott により (b) の方は完全な形とは言えないが) 解かれている。

我々はこゝで, 2階の G -構造を持つ foliation のうち共形葉層構造 (conformal foliation) について a) が成立することを目指す。射影的葉層構造 (projective foliation) についても, 全く同様の方法で同様の事を証明できる。一般の 2階の G -構造については落合さんの these に詳しく述べられており, その称を G -foliation についても, 同様の方法の適用で可。又. 田中さんの Cartan connection の理論で Complex の中の real hypersurface の構造に対応する foliation に対しても同様の方法が可能であろう。

^{*} B. Cenk 氏は, Spencer の resolution と, Atiyah-Bott の定理を用いることにより, 孤立零点を持つ一階の楕円型擬群の構造を持つ vector field に対して, Atiyah-Singer の理論が上の a). b) を含むことを示した。

1. まず, foliation の定義を与えよう.

定義 $M: C^\infty$ -多様体,

$\mathcal{F} = \{U_\lambda, f_\lambda, \gamma_{\mu\lambda}\}$ は riemannian (conformal, projective) foliation of codimension q .

$\iff$ (1) $\exists B$, riemannian q -mfd.

(2) $M = \bigcup_\lambda U_\lambda$ open covering

$f_\lambda: U_\lambda \longrightarrow B$ C^∞ -submersion

(3) $\forall x \in U_\lambda \cap U_\mu, \exists \gamma_{\mu\lambda}^x: f_\lambda(x)$ のある近傍から $f_\mu(x)$ のある近傍への local isometry (conformal 変換, projective 変換) で $f_\mu = \gamma_{\mu\lambda} \circ f_\lambda$ が x の近傍で満たす.

我々の定理は次の形にのべることも出来る.

定理 $\mathcal{F} \in M$ の余次元 $q(\geq 3)$ 以上の conformal or projective foliation とする. $V = TM/E$ は $\mathcal{F}$ の商 bundle とする. k の時

$$\text{Pont}^k(V: \mathbb{R}) = 0 \quad \text{if } k > q.$$

但し, $\text{Pont}^k(V: \mathbb{R})$ は, $H^k(M: \mathbb{R})$ に含まれる V の Pontrjagin class によって生成される環の元の集まりを表す.

注意1. riemannian foliation に対し $q \geq 3$ は, 同い事である.

Pasternack によって証明されているが, 実際, conformal.

projective foliation は riemannian foliation である、
 意味ある別を合っている。即ち riemannian foliation に
 対しては、Godbillon-Vey の invariant を含む secondary
 characteristic は 消えていく か、Thurston,
 大和氏によって構成されている、secondary characteristic
 の消えていく foliation は conformal foliation となっている。

注意 2 - 一般の foliation (定義に於いて B を C^∞ -mtd と
 し、 $\gamma_{\lambda\mu}$ を γ の local diffeo としたものを) に対して、Bott
 が、

$$Pontr(\gamma: \mathbb{R}) = 0 \quad \text{for } k > 2g$$

を証明している。実際、適当な connection の下で、Pontrjagin
 form 自体が消えていく。

2. 証明の sketch 証明は Pasternack の riemannian
 connection に対して行う。次に、Cartan connection に対
 して同様のことを行い、それは normal bundle V を 1 回
 prolongation した bundle (= jet bundle) に対しての
 結果を与えるから、元の bundle の characteristic class と
 その jet bundle の characteristic class が等しいことを
 言えばよい。実際、証明は次の様子を step をへる。

STEP 1 bundle of higher order contact の構成.

まず, B 上の bundle を次の様に定義する.

$U, V \subset \mathbb{R}^3$ 原点の近傍

$$P^r(B) = \{ j_x^r(f) \mid f: U \rightarrow B \text{ local diffeo } f(0)=x \}$$

$$G^r(q) = \{ j_0^r(g) \mid g: U \rightarrow V \text{ local diffeo } g(0)=0 \}$$

但し, $j_x^r(f)$ は f の x における r 回の jet とあらわす. その時 $P^r(B)$ は B 上の $G^r(q)$ を構造群と取り主 bundle とする. 特に $P^1(B)$ は構造群 $G^1(B) = GL(n, \mathbb{R})$ と取り B の linear frame bundle とする.

M 上の V からつくられる bundle を次の様に定義する.

$U \subset \mathbb{R}^n$ の原点の近傍とする. 写像 $f: U \rightarrow M$ を foliation に transversal とし, すべて $f_\lambda: U \rightarrow B$ に対し, 組合 $f_\lambda \circ f$ が submersion であることとする. f_λ に関する M の local coordinate を f_λ が

$$(y^1, \dots, y^{n-r}, y^{n-r+1}, \dots, y^n) \rightarrow (y^{n-r+1}, \dots, y^n)$$

とする. V を $\mathbb{R}^n$ の原点の近傍とし, $g: V \rightarrow M$ を foliation に transversal な写像とする. $f, g \in \text{Taylor 展開}$.

$$y^A \circ f = u^A + \sum u_{j_1}^A x^{j_1} + \sum u_{j_1 j_2}^A x^{j_1} x^{j_2} + \dots$$

$$y^A \circ g = v^A + \sum v_{j_1}^A x^{j_1} + \sum v_{j_1 j_2}^A x^{j_1} x^{j_2} + \dots$$

と書く. 但し, $1 \leq A \leq n$, $1 \leq j_1, j_2 \leq r$.

f と g が同じ transversal r -frame と定義する (at x) とは $(r=1, 2)$

$$u^A = v^A, \quad u_{j_1}^\alpha = v_{j_1}^\alpha, \quad u_{j_1 \dots j_r}^\alpha = v_{j_1 \dots j_r}^\alpha$$

であることと定義する。但し、 $1 \leq A \leq n$, $n-q+1 \leq \alpha \leq n$,
 $1 \leq j_1, j_2 \leq q$. y 点での ⁵²transversal r -frame を $\tilde{j}_y^r(t)$
とかく。これは f_x のほうの方による。

$$P^r(\nu) = \{ \tilde{j}_y^r(t) \mid f: U \rightarrow M \text{ transversal to the foliation} \\ f(0) = y \}$$

と定義すると, $P^r(\nu)$ は M 上の $G^r(q)$ の構造群となる
主 bundle となる。特に $P^1(\nu)$ は ν の linear frame bundle となる。

STEP 2 Cartan connection の構成

L/L_0 は次元 q の Möbius 空間となる。即ち

$$L = O(q+1, 1) = \{ X \in GL(q+2, \mathbb{R}) \mid {}^t X S X = S \}$$

$$\text{但し} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & I_q & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ v & A & 0 \\ -b & z & a \end{pmatrix} \in O(q+1, 1) \mid A \in O(q), a \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^q \right\}$$

とする。 $L_1 \in L_0$ の L/L_0 の接空間への linear isotropy 表現
の核を L , $G = L_0/L_1 \subset GL(n, \mathbb{R})$ とかく。この時

$$G = CO(q) = \{ Aa \mid A \in O(q), a \in \mathbb{R} - 0 \}$$

となる。 $P \in M$ 上の L_0 の構造群となる主 bundle となる。

Cartan 接続 (conformal connection) とは, P 上の L 値 Lie 環 $\mathcal{L}$ に値を持つ 1-form ω と

$$1) \quad \omega(A^\#) = A \quad \forall A \in \mathcal{L}_0$$

$$2) \quad (Ra)^\# \omega = \text{ad}(a^\#) \omega \quad \forall a \in \mathcal{L}_0$$

$$3) \quad \omega(X) \neq 0 \quad \forall X \neq 0, \quad X: \text{vector of } P$$

を満たすものである。

P が conformal foliation となる時, $P^1(V)$ は $\mathcal{O}(g)$ -主 bundle となり, $P^2(V)$ は $\mathcal{L}_0$ -主 bundle と思える。

$P^2(B)$ には, 只 1 つの normal conformal connection ω が入るが, ω は conformal transformation に invariant となる。従って, $P^2(V)$ には ω を induce する $\tilde{\omega}$ ができ, (3) の条件は満たさなくなる。即ち上の 1), 2) を満たす $\mathcal{L}$ -valued 1-form $\tilde{\omega}$ が $P^2(V)$ に存在して, 任意の f_λ に対し, $\tilde{\omega} = f_\lambda^\# \omega$ となる。今, $P^2(V)$ の構造群を $\mathcal{L}$ に拡大した主 bundle

$$P^4(V) = \underset{\mathcal{L}_0}{P^2(V)} \times \mathcal{L}$$

をつくらると, $P^4(V)$ には普通の意味の connection $\tilde{\omega}$ が自然に $\tilde{\omega}$ より定義され, それは, $P^4(B) = \underset{\mathcal{L}_0}{P^2(B)} \times \mathcal{L}$ の connection となり, induce (したものを) する。Curvature は $P^2(B)$ より induce される。任意の次元 n より大きい

form は B 上消える。今群 L は単純, 従って L は reductive.
 Chem-Weil 理論を apply して, $P^L(B)$ の, 従って $P^L(V)$ の characteristic form は次数が十分に大きければ vanish するに容易に導かれる。

STEP 3 bundle V と $P^L(V)$ の特性数の比較.

自然な filtering

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}(q) & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & L_0 / \mathcal{O}(q) \cong \mathbb{R}^{q+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(q+1) & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L / \mathcal{O}(q+1) \cong \mathbb{R}^{q+1} \end{array}$$

より, 次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc} & & B_{L_0} & \longrightarrow & B_L \\ & \nearrow & \uparrow & & \uparrow \cong \\ M & \longrightarrow & B_{\mathcal{O}(q)} & \xrightarrow{\oplus 1} & B_{\mathcal{O}(q+V)} \\ & \searrow & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ & & B_{\mathcal{CO}(q)} & \xrightarrow{\oplus 1} & B_{GL(q+V)} \end{array}$$

従って

$$P_i(V) = P_i(V \oplus 1) = P_i(P^L(V)) \in H^i(M, \mathbb{R}).$$

定理の証明は, 終る。

BIBLIOGRAPHY

- Baum-Bott ; On the zeroes of meromorphic vector fields.
Essays on Topology and related Topics, Springer, Berlin 1970, 29-49.
- ; Singularities of holomorphic foliations,
J. Differential Geometry 7 (1972) 279-342
- Baum-Cherger ; Infinitesimal isometries and Pontryagin numbers,
Topology 8 (1969) 173-193
- Bott ; Vector fields and characteristic numbers. Mich. Math. J. 14
(1967) 231-244
- ; A residue formula for holomorphic vector fields.
J. Differential Geometry 1 (1967) 311-330.
- ; On a topological obstruction to integrability.
Proc. Sympos. Pure Math. 16. Amer. Math. Soc. 1970, 27-36.
- Cenkci ; Zeros of vector fields and characteristic numbers.
J. Differential Geometry 8 (1973) 25-46
- Kobayashi Transformation groups in differential geometry.
Springer (1972).
- Pasternack ; Foliations and compact Lie group actions
Comment. Math. Helv. 46 (1971) 467-477.
- Yamato. ; Examples of foliations with non trivial exotic
characteristic classes. Proc. Japan. Acad 50 (1974) 127-129.
- Ochiai ; Geometry associated with semi-simple flat homogeneous
spaces. Trans. A.M.S. 152 (1970) 159-193.