

Shintani Functions and Automorphic L-functions

京大文・理 村瀬 篤 (Atsushi Murase)

広島大・理 菅野 孝史 (Takashi Sugano)

§0. Introduction

G を $\mathbb{Q}$ 上 定義された reductive な代数群, H をその部分群とし, G_A, H_A を各々のアーベル化とする. G および H 上の cusp forms F, f ($F: G_{\mathbb{Q}} \backslash G_A \rightarrow \mathbb{C}$, $f: H_{\mathbb{Q}} \backslash H_A \rightarrow \mathbb{C}$) に対し, 積分

$$(0.1) \quad W_{f,F}(g) = \int_{H_{\mathbb{Q}} \backslash H_A} f(h) F(hg) dh$$

が収束するとし, この G_A 上の関数 $W_{f,F}$ を研究すること, 特にその保型 L-関数の理論への応用を考えることが, このノートのものである. このような対象はすでに, 以下にみるようにいくつかの場合に研究されてきた.

例 1 Whittaker function

$G \in \text{quasi split}$, $N \in G$ の Borel 部分群の unipotent radical とする. $H = N$, $f = N$ の non-degenerate character とすると, $W_{f,F}$ は $F_1 = 1$ に随する global Whittaker function であり, 以下のことが知られている:

- (A) F が Hecke eigenform ならば $W_{f,F}$ は decomposable, すなわち local Whittaker functions W_v (v は $\mathbb{Q}$ の素点) の積でかける.
- (B) W_v の explicit formula (Shintani, S. Kato, Casselman-Shalika).
- (C) 保型 L -関数の Rankin-Selberg method への応用 (local factor の explicit な計算).

例 2 spherical function

$G = H$, $F = f$ のとき, $W_{f,F}$ は spherical function であり, (A) ~ (C) に対応する事実が知られている.

この二つの場合, F は任意だが, f としては特別なものに限定していることに注意する.

問題 任意の (f, F) に対し, $(A) \sim (C)$ が
うまくいくような pair (G, H) をみつけよ。

候補 このノートでは, 次の4つの pair の系列に対し
 $(A) \sim (C)$ (の一部) が成立することを示す。

(★)

case	(GL)	(O)	(U)	(Sp)
G	$GL(m)$	$O(m)$	$U(m)$	$Sp(m)$
H	$GL(m-1)$	$O(m-1)$	$U(m-1)$	G_{m-1}^J

== には, G_{m-1}^J は degree $m-1$ の Jacobi 群, すなわち
 $Sp(m-1)$ と Heisenberg 群との半直積である。

1970年代末に, Shintani ([Sh]) は, (Sp) の
場合には, $W_{f,F}$ を導入し, $(A) \sim (C)$ が成立すること
を予想した。このノートでは, ★の系列のものに
対しては, $W_{f,F}$ を Shintani function と呼びこ
にする。

§ 1. Local Shintani functions

(G, H) を リスト (★) の中の pair とする。この
節では $\mathbb{Q}$ の有限素点 p を fix し, $G_p = G_{\mathbb{Q}_p}$ などとかく。

G_p の Hecke 環を, $\mathcal{H}_{G_p} = \{ \Phi: G_p \rightarrow \mathbb{C} \mid \Phi \text{ は} \\ \text{両側 } G_{\mathbb{Z}_p}\text{-不変で compactly supported} \}$ とする。同様に $\mathcal{H}_{H_p}$ も定義する。以下簡単のため, p は "good" prime と仮定する。このとき, $\mathcal{H}_{G_p}, \mathcal{H}_{H_p}$ は $\mathbb{C}$ 上の多項式環に同型である (Satake)。

定義 $\lambda_p \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{H_p}, \mathbb{C})$, $\Lambda_p \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{G_p}, \mathbb{C})$

に対し

$$\text{Sh}(\lambda_p, \Lambda_p) \stackrel{\text{def}}{=} \{ W: H_{\mathbb{Z}_p} \backslash G_p / G_{\mathbb{Z}_p} \rightarrow \mathbb{C} \mid$$

$$\varphi * W * \Phi = \lambda_p(\varphi) \Lambda_p(\Phi) \cdot W \text{ for } \forall \varphi \in \mathcal{H}_{H_p}, \\ \forall \Phi \in \mathcal{H}_{G_p} \}$$

に対し,

$$\varphi * W * \Phi(g) = \int_{H_p} dx \int_{G_p} dy \varphi(x) W(\bar{x}'gy) \Phi(y).$$

$\text{Sh}(\lambda_p, \Lambda_p)$ の元を (λ_p, Λ_p) に付随する (local) Shintani function という。

予想 1 任意の (λ_p, Λ_p) に対し

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Sh}(\lambda_p, \Lambda_p) = 1.$$

定理 2 (i) (Sp) の場合 $\dim Sh(\lambda_p, \Lambda_p) \leq 1$

(ii) (GL) の場合, 予想 1 は正しい.

(cf. [MS1], [MS3])

注意

(i) 予想 1 は (Sp) の場合に Shintani により初めて提唱された.

(ii) §0 の状況で, f, F とともに Hecke eigenform ならば, $W_{f, F}$ の G_p への制限は $Sh(\lambda_p, \Lambda_p)$ に属する (λ_p, Λ_p は f, F の固有値で決まる). 従って (A) は予想 1 から得られる. (実際は $\dim \leq 1$ だけでなくよい.)

(iii) (O), (U) の場合は, m が小さい時確かめられているが, 一般には未解決である.

§2. Rankin-Selberg convolution (cf. [MS2], [MS3])

この節では, Shintani function の保型 L -関数への応用を考える. (★) の各系列に対し, G と部分群として含む古典群 H_1 を次のように定める.

	(GL)	(O)	(U)	(Sp)
H_1	$GL(m+1)$	$O(m+1)$	$U(m+1)$	G_m^J

H_1 の parabolic subgroup P_1 を, その Levi component が $GL(1)^d \times H$ ($d = \begin{cases} 1 & (GL) \\ 2 & \text{その他} \end{cases}$) に同型になるようなものが存在する。よって H 上の cusp form f に付随する d 変数の $H_{1,A}$ 上の実解析的 Eisenstein 級数を以下のように構成できる。(簡単のため $d=1$ とする。) P_1 の unipotent radical を N_1 , $K_{1,A}$ を $H_{1,A}$ の適当な極大コンパクト部分群とすると, $H_{1,A}$ の任意の元 h_1 は $h_1 = n_1 (\alpha(h_1) \times \beta(h_1)) k_1$ ($n_1 \in N_{1,A}$, $\alpha(h_1) \in A^\times$, $\beta(h_1) \in H_A$, $k_1 \in K_{1,A}$) と岩澤分解される。 $s \in \mathbb{C}$ に対し

$$\phi_f(h_1; s) = |\alpha(h_1)|_A^s f(\beta(h_1))$$

と置く。 $\|\cdot\|_A$ は $A^\times$ のノルムである。

級数

$$E_f(h_1; s) = \sum_{\gamma \in P_{1,\mathbb{Q}} \backslash H_{1,\mathbb{Q}}} \phi_f(\gamma h_1; s)$$

は $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ ならば絶対収束する。 Eisenstein 級数 $E_f(h_1; s)$ は, f が Hecke eigenform ならば

全 s -平面へ解析接続し、関数等式をもつ ($F=F^*$, このことは (Sp) の場合にはまだ証明されていない)。

以下, $f, F \in H, G$ 上の cusp form で, Hecke eigenform とする。以下 f, F に付随する Rankin-Selberg convolution を定義するが, (GL) の場合は多少修正する必要がある (ここでは触れない ([MS3] を参照して下さい))。

定義

$$(2.1) \quad Z_{f,F}(s) = \int_{G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}} F(g) E_f(g; s) dg$$

積分 (2.1) は, $\operatorname{Re} s \gg 0$ のとき絶対収束し, $((Sp)$ を除いて) 全 s -平面へ有理型関数として解析接続し関数等式をもつ。Shintani function との関係は次で与えられる。

命題 3 (Basic identity)

$$Z_{f,F}(s) = \int_{H_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}} W_{f,F}(\beta(g)^{-1}g) |\alpha(g)|_{\mathbb{A}}^s dg$$

定理 4 $p < \infty$ と good prime, $W_p \in \text{Sh}(\lambda_p, \Lambda_p)$ とある。 $z = z_1 z_2$

$$\int_{H_p \backslash G_p} W_p(\beta(g)^{-1}g) |\omega(g)|_p^s dg \\ = \frac{L_p(\Lambda_p; s')}{\zeta_p(s'') L_p(\lambda_p; s' + \frac{1}{2})} \times W_p(1),$$

$z = z_1$ $||_p$ は p -進付随, $L_p(\lambda_p; s)$, $L_p(\Lambda_p; s)$ は "standard" L -factor, $s' = s + a'$, $s'' = s + a''$ ($a', a'' \in \mathbb{R}$) と a', a'' は (G, H) のみに依存する。

命題 3 と 定理 4 とをあわせて次を得る,

系 5 $\forall \lambda, \Lambda$ の p が good prime

$$Z_{f, F}(s) = \frac{L(F; s')}{\zeta(s'') L(f; s' + \frac{1}{2})} \times W_{f, F}(1)$$

$F = F$, $L(F; s)$, $L(f; s)$ は F, f の standard L -関数.

注意 定理 4 は $p = \infty$ のときも類似のことが成り立つ.

系とは, もし $W_{f,F}(1) \neq 0$ ("initial condition")
 ならば, $L(F;s)$ の解析的性質 (解析接続,
 関数等式, 極の location 等) が, $L(f;s)$ の
 それらに, 原理的には帰着されることを示している
 ((Sp) をめく)。

特に, G が 定値偶2次形式 S の直交群で,
 S が maximal ならば, initial condition を外すこと
 ができ, 上の方法が働く。 により, G 上の
 保型形式 F の standard L -関数 $L(F;s)$ の
 "完全な" 関数等式 及び 極の location を
 決定することが出来る ([MS2], [MS4])。

紙数の関係で explicit formula には触れる
 ことができなかったが, これについては, いくつかの
 部分的結果 ([Mu], [MS3]) と (GL) の場合の
 予想 ([MS3]) がある他は, 未解決である。

Reference

- [MS 1] Murase, A., Sugano, T.: Whittaker functions on the symplectic group of Fourier-Jacobi type. *Compositio Math.* **79**, 321-349 (1991)
- [MS 2] Murase, A., Sugano, T.: Shintani function and its application to automorphic L-functions for classical groups I. The case of orthogonal groups, to appear in *Math. Ann.*
- [MS 3] Murase, A., Sugano, T.: Shintani functions and automorphic L-functions for $GL(n)$. preprint
- [MS 4] Murase, A., Sugano, T.: On standard L-functions attached to automorphic forms on definite orthogonal groups. preprint
- [Mu] Murase, A.: On an explicit formula for Whittaker-Shintani functions on $Sp(2)$, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **61**, 153-162 (1991)
- [Sh] Shintani, T.: Unpublished notes.