

Reductive Groups with Involutions

Rijksuniversiteit Utrecht

T. A. Springer

§0. K を標数 $\neq 2$ の代数的閉体とし, G を K 上の reductive な連結線型代数群とする. G の involution (involutive, i.e. 位数 2 の自己同型) θ を持, θ による.

例. G を $\mathbb{R}$ 上の半単純代数群で, $G(\mathbb{R})$ がコンパクトとなるものとする. ($G = G(\mathbb{C})$) この実構造に関する複素共役写像を $\sigma: G \rightarrow G$ とおけば, G の任意の $\mathbb{R}$ -形式 G' に対し, G の involution θ が存在して

$$G'(\mathbb{R}) = G \text{ の } \theta \circ \sigma \text{ の固定部分.}$$

これを "無限小" 的に見れば, $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$, $\mathfrak{K}, \mathfrak{P}$ を $\mathfrak{g}$ の ± 1 , -1 固有空間とする時

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{P}$$

で、 $\mathfrak{g}' = \text{Lie } G'$ は

$$\mathfrak{g}'(\mathbb{R}) = \mathfrak{k}(\mathbb{R}) \oplus \sqrt{-1} \mathfrak{p}(\mathbb{R})$$

で与えられることがわかる。

この節の状況の下で、 $K = G^{\theta}$ (θ -固定元全体の群) は、自然に随伴作用で $\mathfrak{g}$ に働くが、この作用は Kostant - Rallis [KR] により詳しく調べられている ([Se] 参照)。

ここでは Vust [V], Richardson [R] において研究された $\mathfrak{g}$ の (K -作用も込めた) 代数群論的類似物 P について、[V][R] の結果も互に報告する。後で見えるように (§2) $P \simeq K \backslash G$ であり、右辺が Harish-Chandra の群の研究 (Beilinson-Bernstein, Lusztig, Vogan, cf. [T]) や、De Concini - Procesi によるコンパクト化の理論 [DP] と関係しているもので、 P の研究には興味深いものがある。

§1. 対 (G, θ) に関する基本的な性質を見てみよう。 $K = G^{\theta}$ (θ の固定点全体) とする。 (G が単純かつ、単連結ならば K は連結 [S₂, 8.1].)

定理 (Steinberg [S₂, 7.5]). θ -不変な G の Borel 部分群 B は必ず極大トーラス $T \subset B$ が存在する。
 この時, $(K \cap B)^\theta$, $(K \cap T)^\theta$ はそれぞれ K の Borel 部分群, 極大トーラスになる。

T, B が θ -不変ゆえ Weyl 群 $W = N_G(T)/T$ に θ が Coxeter 系の自己同型として働くことに注意しよう。

定義 トーラス S が anisotropic
 $\Leftrightarrow \theta(s) = s^{-1} \quad (\forall s \in S).$

anisotropic トーラスは必ず存在することが知られている [V, Prop. 1]。 A' を極大 anisotropic トーラスとし, Q' を, $M' = Z_G(A')$ を Levi 因子とする双曲型部分群とする。 Q と θQ は opposite (i.e. $Q' \cap \theta Q' = M'$) であることがわかるが, 更に次を示さねば:

命題 (Vust [V, pp. 321-323]).

(1) Q' は, Q' と $\theta Q'$ が opposite となるような

極小の放物型部分群。

(2) (1) の条件を満たす部分群 Q' は必ず K -共役。

(3) 必ずの極大 anisotropic トーラスは K -共役。

極大 anisotropic トーラス A' に関する相対ルート系も、実単純群の場合と同様に定義される ($[R, §4]$)。

§2. 上2.22に §0 で述べた実単純群における Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ での θ の -1 固有空間, $\mathfrak{p}$ の (K の随伴作用をもとめた) “群論的” 類似物を考察する。

定義. $P = \{ x^{-1} \theta(x) \mid x \in G \}$,
 $Q = \{ x \in G \mid \theta(x) = x^{-1} \} \supset P$.

例. (a) $G = SL_n$, $\theta(x) = ({}^t x)^{-1}$ の場合は
 $P = Q = \{ \det = 1 \text{ の 対称行列} \}$
 (b) (inner type) G は一般, $\theta(x) = a x a^{-1}$
 ($a^2 = 1$) の場合は. $I = \{ b \in G \mid b^2 = 1 \}$

(involution 全体) とおくと, $Q = I\alpha$, $P = C(\alpha)\alpha$.
ただし $C(\alpha)$ は α の G -共役類である。

P, Q には $x \mapsto gx\theta(g)^{-1}$ ($g \in G$) により,
 G が作用する。特に K の作用は共役に一致。
また P, Q 共に θ -不変である。さて, $P \simeq K \backslash G$
([R, 2.4]) であることに注意しよう。この P が
 $\mathcal{P}$ の類似になっている: A を極大 anisotropic トー
スとすると $A \subset P$. また $K \cdot A$ は P 中 dense
[R, §3]. 任意の P の元は P 内で Jordan 分解
可能, つまり $x = x_s x_u$ を Jordan 分解とすると,
 $x \in P \Leftrightarrow x_s \in P, x_u \in P$ ([R, 6.2]).
しかも [KR] と同様に

定理 (Richardson [R, 6.3]).

P の任意の半単純元は A の元と K -共役。

がわかる。また巾単元についても [KR] と類似の
結果がある。(例えば, $\mathcal{U}(P) = \{P \text{ の巾単元全体} \}$
は有限個の K -軌道からなる。)

問題

- (a) 巾単多様体 $\mathcal{U}(P)$ の特異点の解消を与えよ。
 (b) $\mathcal{U}(P)$ の K -軌道を分類せよ。

§3. 1°. P の B -軌道分解. T, B をそれぞれ G の θ -不変極大トーラス, Borel 部分群 ($T \subset B$) とする。 $P \simeq K \backslash G$ であることより, P の B -軌道分解は両側コセット分解 $K \backslash G / B$ もしくは旗多様体 G/B の K -軌道分解と同値である。

$N = N_G(T)$ に対し

$$V = \{v \in G \mid v^{-1}\theta(v) \in N\}$$

$$\tilde{N} = \{v^{-1}\theta(v) \mid v \in V\} \subset N$$

と置く。 $T \times K$ は V に $v \mapsto kv t^{-1}$ ($v \in V, k \in K, t \in T$) で作用する。 A をこの作用に関する V 中の $T \times K$ -軌道の代表系, $\tilde{A}$ を $\tilde{N}$ での A の像としよう。

補題. オペラの $Q(A)$ の B -軌道は N と交わる。 また B -軌道の個数は有限個となる。

(証明は Bruhat 分解による。)

命題. (i) $G = \bigsqcup_{v \in A} K \cup B$ (disjoint union)

(ii) G/B の K -軌道は A で parametrize される.

(iii) P の B -軌道は $\tilde{A}$ で parametrize される.

$\tilde{N}$ の元 w の W での像を w とすると $\theta(w) = w^{-1}$.
特に θ が inner type ならば $\theta = \text{id}$ ゆえ $\tilde{N}$ の像は involutions からなる。(ただし $\tilde{N}$ もしくは $\tilde{A}$ の元は必ずしも involution ではない。)

例. $G = \text{SL}_n$, $\theta(x) = ({}^t x)^{-1}$ の場合,

$\tilde{N} =$ 対称単項行列全体である。

注意. P の K -軌道分解は 松本 [M] において得られている。そこでは K -軌道は、次のような対全体

$(T_i, B_i) : T_i$ は θ -不変極大トーラス

B_i は T_i を含む Borel 部分群

を K -共役を用いて考えた商集合で parametrize

されることが示されている。この結果は $\forall v \in N$ に対して

対して $T_i = v T v^{-1}$, $B_i = v B v^{-1}$ とおくこ

とによって、上の命題から得られる。

2° 軌道・束包の包含関係 (ただし、以下は不完全である。) $n \in \tilde{N}$ に対し、 W の n の W における像 $O(n)$ を P の n を通る B -軌道とする。 $R \in (G, T)$ のルート系とし、 $\alpha \in R^+$ (正のルート系 $\leftrightarrow B$) に対して対応する鏡映 $s_\alpha \in W$ の持ち主 $\dot{s}_\alpha \in N$ を

$$\chi_\alpha(\xi) \chi_{-\alpha}(-\xi^{-1}) \chi_\alpha(\xi) = \check{\alpha}(\xi) \dot{s}_\alpha$$

に normalize しておく。ただし

$$\chi_\alpha : R \xrightarrow{\sim} (\alpha \text{ に対応するルート部分群})$$

$$\check{\alpha} : R^\times \rightarrow T, \quad \alpha \text{ に対応するコルート}$$

はそれぞれ、例えば $[s_1]$ のようにとる。

$\ell : W \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を Coxeter 群 W の length function としよう。この時、次の成立。

補題 1 $\alpha \in R^+$, $\ell(s_\alpha w \theta(s_\alpha)) < \ell(w)$ ならば

$$\dot{s}_\alpha n (\theta(\dot{s}_\alpha))^{-1} \in \overline{O(n)}$$

補題 2 $\alpha \in R^+$, $\ell(s_\alpha w) < \ell(w)$, $s_\alpha w \theta(s_\alpha) = w$ かつ $w \theta(\alpha) = -\alpha$ ならば

$$\dot{s}_\alpha n \in \overline{O(n)}$$

例11. $G = SL_3$, $\theta(x) = ({}^t x)^{-1}$ の場合は. $\tilde{A}$ は

次の4個. $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & i & \\ i & & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & \\ & i & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & & i \\ & 1 & \\ i & & \end{bmatrix},$

$X_1 \qquad X_2 \qquad X_3 \qquad X_4$

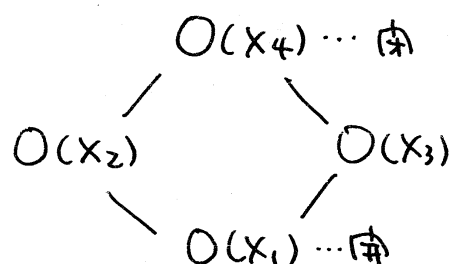
で与えられ, closure relation は

右図のようになる。ただし,

一般には上の補題1, 2で

すべての relation がわかる

わけではない。(上で, $T = \text{対角}$, $B = \text{上三角}$.)



注意. (W, S) は Coxeter 系, $\theta \in \theta^2 = 1$ とす

(W, S) の自己同型として $W' = \{w \in W \mid \theta(w) = w^{-1}\}$

とおく。 W' 上に次の (1), (2) で生成される半順序 $\leq$ を与える:

(1) $\ell(w') = \ell(w) - 2$ かつ ある鏡映 κ に対して

$$w' = \kappa w \theta(\kappa) \Rightarrow w' < w.$$

(2) $\ell(w') = \ell(w) - 1$ かつ ある鏡映 κ に対して

$$\kappa w = w \theta(\kappa), \quad w' = \kappa w \Rightarrow w' < w.$$

これは補題1.2の Coxeter 群版であるが, 一般に

この順序は通常の Bruhat 順序とは異なる。例え

$$W = \mathfrak{S}_4 \text{ (4=2 対称群)}$$

$$S = \{ s_1, s_2, s_3 \}, \theta: \begin{array}{c} \circ \xrightarrow{\quad} \circ \xrightarrow{\quad} \circ \\ \circ \xrightarrow{\quad} \circ \end{array}$$

の時, Bruhat 順序では $s_2 \leq s_2 s_1 s_3 s_2$ だが,
この順序では $s_2 \not\leq s_2 s_1 s_3 s_2$ である。

- 問題. (a) P の各 B -軌道の内包を記述せよ。
(b) De Concini - Procesi による $\tilde{P}$ のコンパクト化
 $\tilde{P}([DP])$ に対して (a) と同様の問題を考へよ。
(B -軌道は有限個であることが知られている。)

References

- [DP] C. De Concini and C. Procesi, Complete symmetric varieties I, II. Preprint; see also this Proceeding.
- [KR] B. Kostant and S. Rallis, Orbits and representations associated with symmetric spaces. Amer. J. Math. 93 (1971), 753-809.
- [M] T. Matsuki, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups. J. Math. Soc. Japan 31 (1979), 331-357.
- [R] R. W. Richardson, Orbits, invariants and representations associated to involutions of reductive groups. Invent. Math. 66 (1982), 287-312.

- [Se] J. Sekiguchi, this Proceeding.
- [S₁] R. Steinberg, Lectures on Chevalley groups. Yale Univ. 1967.
- [S₂] R. Steinberg, Endomorphisms of linear algebraic groups.
Mem. Amer. Math. Soc. 80, 1968.
- [T] T. Tanisaki, this Proceeding.
- [V] T. Vust, Opération de groupes réductifs dans un type de cônes
presque homogènes Bull. Soc. Math. France 102 (1974), 317-333.

(加藤 (一) 記)