

氏 名	柳 瀬 真 一 郎 やな せ しんいちろう
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	理 博 第 650 号
学位授与の日付	昭 和 56 年 1 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 物 理 学 第 一 専 攻
学位論文題目	The Modified Cumulant Expansion for Two-dimensional Homogeneous Turbulence (変形キュムラント展開の2次元一様乱流への適用)
論文調査委員	(主 査) 教 授 巽 友 正 教 授 富 田 和 久 教 授 恒 藤 敏 彦

論 文 内 容 の 要 旨

本論文は、2次元乱流の統計的性質を、変形キュムラント展開の方法を用いて論じたもので、平均流のない乱流を対象とする第Ⅰ部と、平均流を伴う乱流を対象とする第Ⅱ部とからなる。

第Ⅰ部では、平均流のない一様等方性乱流を取扱う。流れの速度を $\mathbf{u}$ 、渦度を $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$ とするとき、2次元流においては、運動エネルギー $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle$ 、エンストロフィ $\mathcal{Q} = \frac{1}{2} \langle |\boldsymbol{\omega}|^2 \rangle$ 、パリンストロフィ $\mathcal{P} = \frac{1}{2} \langle |\text{rot } \boldsymbol{\omega}|^2 \rangle$ の間に、2つの関係式、

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -d\mathcal{E}/dt = 2\nu\mathcal{Q}, \\ \eta &= -d\mathcal{Q}/dt = 2\nu\mathcal{P}\end{aligned}\tag{1}$$

が成立つ。ただし、 ν は粘性率、 ε はエネルギー散逸率、 η はエンストロフィ散逸率を表わす。

一般に3次元乱流においては、 $\nu \rightarrow 0$ のとき、 ε は有限値に近づく。

Kolmogorov (1941) は、 ε と ν とを独立パラメーターとして、Reynolds 数 ($\propto 1/\nu$) が極めて大きい場合の3次元乱流のエネルギー・スペクトルとして、有名な

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}\tag{2}$$

の法則を導いた。ただし、 k は波数、 C は無次元数を表わす。

2次元流においては、(1)から、 $\nu \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon \rightarrow 0$ となるから、Kolmogorov スペクトル(2)は成立しない。Kraichnan (1967), Leith (1968) および Batchelor (1969) は、 η と ν とを独立パラメーターとして、Kolmogorov と類似の推論により、2次元乱流のスペクトルとして、

$$E(k) = C'\eta^{2/3}k^{-3}\tag{3}$$

の形を導いた。このスペクトルは、数値実験その他によってその存在が確かめられている。

一方、Pouquet その他 (1975) は、比較的緩やかな仮定のもとに、 $\nu \rightarrow 0$ のとき $\eta \rightarrow 0$ となることを証明した。これは明らかに、(3)の前提とは矛盾しており、この矛盾はこれまで解決されないままに残ってい

た。

本論文は、変形キュムラント展開を用いて、エネルギー・スペクトル $E(k)$ を支配する方程式を導き、これを数値計算で解くことによって、 $E(k)$ の形を求め、高 Reynolds 数において、(3)のスペクトルが実現することを見出した。また、 $E(k)$ が、低波数および高波数の2つの領域において異なった相似則を満たすこと、およびそれらの領域の共通領域において、(3)のスペクトルが必然的に導かれることを示した。

つぎに、以上の結果を用いて、エンストロフィ $\mathcal{E}$ の時間的変化を調べたところ、Reynolds 数 R が極めて大きい場合には、時間 t のある臨界値 t_c を境にして、

$$\left. \begin{array}{l} t < t_c \text{ のとき, } \mathcal{E} = \text{一定} \\ t > t_c \text{ のとき, } \mathcal{E} \propto t^{-2} \end{array} \right\} \quad (4)$$

となること、および

$$t_c \propto (\log R)^{1/2} \quad (5)$$

の関係が成立つことを見出した。これによって、上の矛盾した2つの結果は、それぞれ臨界時刻 t_c 以後および以前の状態に対応するものとして、矛盾は完全に解決された。また、(4)および(5)の関係は、数値計算の結果とも良く合致している。

最後に、以上に述べた相似則は、キュムラント展開のすべての項を考慮した場合においても成立する厳密な結果であることが示された。

第Ⅱ部は、一様な速度勾配をもつ平均流における一様な乱流を、やはり変形キュムラント展開を用いて取扱っている。平均流としては、(A) 乱流の速度面に垂直な一様伸長流、(B) 速度面に平行な一様変形流を考える。

(A)の場合には、乱流の等方性は維持され、平均流による渦度の増大と粘性による減衰とが均合った定常状態が可能である。このとき、

$$\mathcal{E} \propto A, \quad \mathcal{Q} \propto A^2 \quad (6)$$

となる。ただし、 A は平均流の速度勾配の大きさを表わす。

(B)の場合には、乱れは平均流によって非等方化され、また、平均流による $\mathcal{E}$ 、 $\mathcal{Q}$ の発生がないため、定常状態は存在し得ないことが示される。

参考論文2編は、いずれも鉛直方向に一定の温度勾配をもつ鉛直固体壁に囲まれた流体層の熱対流に関するもので、支配するいくつかのパラメーターの値によって、種々の不安定モードが交替する模様を詳しく調べている。

論文審査の結果の要旨

2次元乱流は、実際の3次元問題に対する一つの近似としてしばしば取扱われ、また、大気や海洋における長波長の変動や、強磁場のもとでのプラズマ乱流のモデルとしても考察されてきた。しかし、2次元乱流は、通常の3次元乱流とは本質的に異なった粘性散逸の機構をもっており、その統計的性質は従来の理論でかなり明らかにされたものの、なお基本的に不明確な点や内部矛盾が残されていた。

本論文は、この2次元乱流を変形キュムラント展開の方法を用いて取扱ったもので、エネルギー・スベ

クトル方程式を数値計算によって解くと共に、各波数領域における相似則を解析的に導くことによって、2次元等方性乱流の統計的性質を全面的に明らかにした。その結果、これまで Batchelor (1969) その他によって、エンストロフィ散逸の仮定のもとに導かれた k^{-3} スペクトルは、数値的にも解析的にも確立された。また、この仮定と Pouquet その他 (1975) によるエンストロフィ散逸の非存在の証明との間の矛盾は、2次元乱流の時間的变化が、一つの臨界時刻 t_c を境にして、エンストロフィ保存と散逸の二つの時期に分けられること、そして t_c が非粘性の極限で対数的に増大することを見出すことによって完全に解決された。

本論文の第2部においては、平均流がどれだけの強さの2次元乱流を定常的に維持し、また、乱流をどのように非等方的に変形するかという問題を初めて一般的に取扱い、それぞれ定性的な範囲で結果を与えている。

以上のように、本論文において得られた結果は、2次元乱流に関して決定的な成果であり、乱流理論の発展に寄与するところが大である。また、参考論文も申請者のこの方面の研究への寄与を示すに足るものである。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。