

Ball Coverings and Products of Manifolds

相模工大 津久井 康之

Definition 1. M^m が compact connected (PL) m -manifold で,
 M 内の m -ball の finite set $\beta = \{B_1^m, B_2^m, \dots, B_k^m\}$ が,

$$(1) \bigcup_{i=1}^k B_i^m = M,$$

をみたすとき β を M の weak ball covering, さらに,

$$(2) B_i^m \cap B_j^m = \partial B_i \cap \partial B_j \quad (i \neq j)$$

(3) (2) の $(\partial B_i \cap \partial B_j)$ が $(m-1)$ -manifold (Conn.を要求しない),

をみたすとき β を M の ball covering と呼ぶ。このとき

$$\beta(M) = \min. \{ \# \beta ; \beta \text{ は } M \text{ の weak ball covering } \},$$

$$b(M) = \min. \{ \# \beta ; \beta \text{ は } M \text{ の ball covering } \},$$

と定める。($\# \beta$ は β の elements の数)

1. < Products of Manifolds >

Theorem 1. M, N が connected compact PL manifolds のとき,

$$b(M \times N) \leq b(M) + b(N) - 1.$$

Theorem 2. V が connected compact PL manifold で $\partial V \neq \emptyset$ のとき $D(V)$ で V の double ($\cong \partial(V \times I)$) を表わす.

$$b(D(V)) \leq b(V) + 1.$$

Corollary 1. $b(S^{P_1} \times S^{P_2} \times \cdots \times S^{P_m}) = m + 1$, ($P_i \geq 1$).

Corollary 2. 任意の integers m, n ($2 \leq m \leq n+1$) に対して, $b(M^n) = m$ となる connected closed n -manifold M が存在する.

Remark 1. Corollary 1 には $S^{P_1} \times \cdots \times S^{P_m}$ に対する handle 分解による大川氏(東大理)の別証がある.

2. Theorem 1, 2 とともに best possible であり, また等号の成立しない例は多くある.

次の lemma は induction によって証明される.

Lemma. M を connected compact manifold で $b(M) = k$ とするとき, 任意の自然数 n に対して, 条件 (★) をみたす M の ball coverings $\mathcal{B}_i = \{B_{i,1}, B_{i,2}, \dots, B_{i,k}\}$, $i=1, 2, \dots, n$, が存在する.

$$(★) \quad B_{i,j} \cap B_{p,q} = \emptyset \quad \text{if} \quad \begin{cases} (i,j) \neq (p,q) \\ i+j = p+q. \end{cases}$$

Theorem 1 の proof の outline: $b(M) = p$, $b(N) = q$ とする. lemma (N に対して) から, N の ball coverings

$$\mathcal{B}_i = \{B_{i,1}, B_{i,2}, \dots, B_{i,q}\}, \quad i=1, 2, \dots, p,$$

が存在して (※) をみたす。 $\{B_1, B_2, \dots, B_p\}$ を M の ball covering とすると,

$$\begin{aligned} M \times N &= (B_1 \cup \dots \cup B_p) \times N = \bigcup_{i=1}^p (B_i \times N) \\ &= \bigcup_i (B_i \times \bigcup_j B_{i,j}) = \bigcup \{B_i \times B_{i,j} ; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}. \end{aligned}$$

このままでは $\{B_i \times B_{i,j}\}$ は definition 1 の (3) を満してはいない。 ball $B_i \times B_{i,j}$ の regular neighborhood を順番に取り直してやることで新しく $M \times N$ の ball covering $\{C_{i,j}\}$ $1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$, が得られ, (※) をみたしていることが確かめられる。したがって順番に $\{C_{i,j} : i+j=k\}$ $k=2, 3, \dots, p+q$, を $\bigcup \partial C_{i,j}$ の上の arcs で結んで regular neighborhood をとることで $p+q-1$ 個の ball が得られ, 作り方から $M \times N$ の ball covering であることが確かめられる。

Theorem 2 の証明もほぼ同様である。

2. theorems の詳しい証明は [14] にゆづって, ここでは (Weak) ball covering と Lusternik-Schnirelman category および product space 等の関係について述べてみよう。

Definition 2. (Lusternik-Schnirelman category) X を polyhedron (もっと広く topological space で良いがここでは必要でない) ので無限する) とする。

$$\text{cat}(X) = \min. \{k \geq 1 \mid \bigcup_i (1 \leq i \leq k) \text{ は } X \text{ の open set で}$$

X において contractible で, $\bigcup_{i=1}^k U_i = X$ }
 $\text{Cat}(X) = \min. \{ k \geq 1 \mid U_i (1 \leq i \leq k) \text{ は } X \text{ の open set で}$
 $U_i \text{ 自身は Contractible, } \bigcup_{i=1}^k U_i = X \}.$

$\text{Cat}(X)$ を strong category と呼ぶ。

Definition 3. M^m を closed m -manifold (Top. Diff. PL-, 但しここでは PL-manifold で考える) とする。

$C(M) = \min. \{ k \geq 1 \mid B_i^m (1 \leq i \leq k) \text{ は } M \text{ 内の } m\text{-ball で,}$
 $\bigcup_{i=1}^k B_i = M \}.$ (M の cell number)

M が closed ならば weak ball covering は collar を使って $\bigcup B_i = M$ とできるので, $\beta(M) = C(M)$ である。

明らかに connected compact manifold M について,

$$\text{cat}(M) \leq \text{Cat}(M) \leq \beta(M) \leq b(M).$$

cat , Cat は連続写像を通して他のさまざまな概念と関連し, homotopy 論との関係で早くから多くの研究がされている。

cell number $C(M)$ ($=\beta(M)$) の概念は Lusternik-Schnirelmann category の manifold へのごく自然な拡張(制限)であるが, generalized Poincaré Conjecture の解決をもたらした。

Engulfing technique を得てはじめて研究されるようになったようで, 1960年代後半からこれについての論文が見られる。

homotopy 論からゆかれ Geometry な性格が強いが, Engulfing を手段とするため, connectivity や dimension の制限が強く,

この概念を用いて新しい結果を導き出すというよりは、今までに分っている結果を *cell covering* という見地から見直すという場合が多い。基本的なものとしては、

Proposition 1. (Luft [6])

M^n : connected closed n -manifold, k -connected, $k \leq n-3$

$$\Rightarrow \beta(M) \leq \langle n+1/k+1 \rangle,$$

$\langle x \rangle$ は integer で $\langle x \rangle \geq x$ なる minimum.

これに対して *ball covering* は boundary を持つ manifold にまで *cell covering* を拡張したこと (*cell covering* は別に *open manifold* に対しても定義できる)。しかしその特徴は $B_i^m \cap B_j^m = \partial B_i \cap \partial B_j$ が $(m-1)$ -manifold という点にあり、 S^{m-1} 内の $(m-1)$ -manifolds の homeo から 1次元上の m -manifold の様子を知らうという立場である。したがって *cell covering* (C1) が *Engulfing* の活躍する 6次元以上の manifold に対して威力があるのに対し、おそらく、もっと低次元での有効性が期待される。3次元の compact manifold M に対しては $\beta(M) = b(M)$ が証明される見込みがあり、4次元では contractible 4-manifold W^4 で、

$$\text{cat}(W) = 1, \quad \beta(W) = 2, \quad b(W) = 3,$$

なるものが存在するので、このへんが当面研究されるべきところであろう。もっとも、やさしくはなさそうであるが。

Product space に関しては,

Proposition 2.

$$(1) \quad \max\{\text{cat}(X), \text{cat}(Y)\} \leq \text{cat}(X \times Y) \leq \text{cat}(X) + \text{cat}(Y) - 1,$$

$$(2) \quad \text{Cat}(X \times Y) \leq \text{Cat}(X) + \text{Cat}(Y) - 1,$$

$$(3) \quad \text{Cat}(X) \leq \text{cat}(X) + 1.$$

という結果があり, Theorem 1. に対応している.

現在, $C(M) (= \beta(M))$ についてはこのような product についての結果は得られていない。

REFERENCES

- [1] R.H. Fox, On the Lusternik-Schnirelmann Category, *Ann. of Math.* 42(1941)333-370.
- [2] L.C. Glaser, Intersections of combinatorial balls and of Euclidean Spaces, *Trans. AMS.* 122(1966)311-320.
- [3] J.P. Hempel and D.R. McMillan Jr., Covering three-manifolds with open cells, *Fund. Math.* 64(1969)99-104.
- [4] K. Kobayashi and Y. Tsukui, The ball coverings of manifolds, *J. Math.Soc. Japan* 28(1976)133-143.
- [5] ———, ———, Manifold の Ball Covering ニツイテ, *スウリケン.コウキユウロク* 243(1975)77-87.
- [6] E. Luft, Covering of manifolds with open cells, *Illinois J. Math.* 13(1969)321-326.
- [7] M.V. Mielke, Spherical modifications and coverings by cells, *Duke Math. J.* 36(1968)49-53.
- [8] D.A. Moran, Minimal cell coverings of some sphere bundles, *Comment. Math.Univ. Carolinae* 14(1973)647-650.
- [9] ———, Cell coverings and Residual sets of closed manifolds, ? (1976)516-518.
- [10] R.R. Summerhill, A characterization of the connectivity of a manifold in terms of large open cells, *Proc.AMS.* 45(1974)285-290.
- [11] F. Takens, The Lusternik-Schnirelman categories of a product Space, *Compositio Math.* 22(1970)175-180.
- [12] H. Toda and M. Mimura, ホモトピー-理論, キノクニヤ.スウガクキヨウシヨ 3 (1975).
- [13] Y. Tsukui, 1-conn. 4-manifold M^4 with $b(M)=3$ and $H_2(M)=\mathbb{Z}$, *スウリケン.コウキユウロク* (to appear).
- [14] ———, On ball coverings for products of manifolds, (to appear).
- [15] K. Varadarajan, On fibrations and category, *Math. Z.* 88(1965)267-273.
- [16] E.C. Zeeman, The Poincare conjecture for $n \geq 5$, *Topology of 3-manifolds*, Prentice Hall (1962)198-204.