

Zuckerman tensoring as a computational tool

大阪大学理学研究科数学専攻
森山知則 (Tomonori Moriyama)

目次

- §1 序：保型形式論からの動機
- §2 重さ 1 の Maass 形式の場合 — $G = SL(2, \mathbf{R})$
- §3 Bianchi 保型形式の場合 — $G = SL(2, \mathbf{C})$

§1 序：保型形式論からの動機

実簡約 Lie 群 G 上の保型形式 $\varphi: \Gamma \backslash G \rightarrow \mathbf{C}$ の (一般化された) Fourier 展開係数 (Fourier 係数函数)

$$(1.1) \quad c_{\varphi}^{\psi}(g) = \int_{H \cap \Gamma \backslash H} \varphi(hg) \psi(h)^{-1} dr$$

を考えよう (以下では, 積分 (1.1) の絶対収束性が保証されているものとする)。ここで, H は G の閉部分群で, $\psi: H \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$ を $H \cap \Gamma$ 上で自明な H の指標とする。例えば G が quasi-split な簡約代数群の $\mathbf{R}$ -points のなす Lie 群で, $H = N$ をその極大べき単部分群, ψ を H の「非退化な」指標とする。このとき, $c_{\varphi}^{\psi}(g)$ は $\varphi(g)$ の Whittaker 函数と呼ばれ, 1960 年代にはじまる多くの研究の蓄積がある。Whittaker 函数をはじめとする, この種の保型形式の Fourier 係数函数 $c_{\varphi}^{\psi}(g)$ (特にその扱いやすい公式) は, 保型形式の研究で重要な役割を果たす。

さて, このような Fourier 係数函数 $c_{\varphi}^{\psi}(g)$ は, 保型形式 $\varphi(g)$ の満たす微分方程式に由来する微分方程式系を満たすことに注意しよう。例えば, G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の普遍展開環を $Z(\mathfrak{g})$ とし, 保型形式 $\varphi(g)$ が適当な $\mathbf{C}$ -代数としての準同型 $\chi: Z(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbf{C}$ に対して, 微分方程式

$$(1.2) \quad \varphi(g; z) = \chi(z) \varphi(g), \quad z \in Z(\mathfrak{g})$$

を満たすとする, $c_{\varphi}^{\psi}(g)$ もまた同じ微分方程式

$$(1.3) \quad c_{\varphi}^{\psi}(g; z) = \chi(z) c_{\varphi}^{\psi}(g), \quad z \in Z(\mathfrak{g})$$

を満たす。ここで, $\varphi(g; z)$ や $c_{\varphi}^{\psi}(g; z)$ は, $\varphi(g)$ や $c_{\varphi}^{\psi}(g)$ の $z \in Z(\mathfrak{g})$ による右からの微分を表す (Harish-Chandra の記法)。 K を G の極大コンパクト部分群とする。いま簡単の為, $\varphi(g)$ が右 K -相対不変であり, $G = HAK$ なる G の閉部分群 A が存在するとしよう。このとき, $c_{\varphi}^{\psi}(g)$ は左 H -相対不変性

$$c_{\varphi}^{\psi}(hg) = \psi(h) c_{\varphi}^{\psi}(g) \quad (h, g) \in H \times G$$

も持つので, $c_\psi^\psi(g)$ は A 上での値で完全に決定される。そこでこの A 上で (1.3) をはじめとする微分方程式を書き下して解いてやれば $c_\psi^\psi(g)$ の具体的な形がわかるであろう。実際, 右 K -有限な φ に対して, おおよそこの方針によって様々な (G, H, ψ) について $c_\psi^\psi(g)$ の公式が求められている。

ところで, 上記の方針で Fourier 係数函数 $c_\psi^\psi(g)$ を決定しようとするとき, しばしば直面する困難は, $c_\psi^\psi(g)$ の満たす微分方程式系がもつ複雑さである。本稿の目的は, これを回避する一つの手段として, 表題にある Zuckerman's tensoring ([Zu], [Kn, Ch. XIV, §12]) を用いる方法が有効であることを説明することである。具体的には, (i) $(G, H) = (SL(2, \mathbf{R}), \mathbf{R}^\times)$, (ii) $(G, H) = (SL(2, \mathbf{C}), \mathbf{C}^\times)$ の場合を例にとりて, Zuckerman's tensoring の技法が, 微分方程式が持つ複雑さを解消する手段となることを解説する。なお, ここで述べる上記の (i), (ii) に関する研究の主要部はそれぞれ前田恵氏 [Ma], 源嶋孝太氏 [Ge-1] により筆者 (森山) の指導の下で書かれた修士論文に基づくことを注意しておく。(ii) については, 源嶋氏自身による解説が数理解析研究所講究録「モジュラー形式と保型表現」に掲載されるはずなので, 重複を避けるために方程式の具体的な形と Riemann 図式を与えることにとどめる。

なお, 上記の例で興味深いのは, Fourier 係数函数 $c(g)$ の満たす方程式系は特異点を 4 つないしは 5 つ持つ一見複雑な 2 階 Fuchs 型常微分方程式に帰着されるが, その解が式 (2.11) のように超幾何関数の有理式を係数とする簡単な線形結合で書かれるということである。したがって, この方程式の大域的な挙動 (接続係数) も超幾何関数のそれから容易にわかることになる。この種の微分方程式がどの程度知られているかは, 筆者には詳らかでないが, Zuckerman's tensoring から自然にその解が導かれるという点で興味深いと考える。

§2 重さ 1 の Maass 形式の場合 — $G = SL(2, \mathbf{R})$

(2.1) **Maass 形式.** まず重さ m の Maass 形式の定義を思い出そう。 Γ を $G = SL(2, \mathbf{R})$ の離散部分群とする。 $m \in \mathbf{Z}$ と $\lambda \in \mathbf{C}$ に対して, $\mathcal{A}(\Gamma \backslash G, m, \lambda)$ を C^∞ -級関数 $\varphi : G \rightarrow \mathbf{C}$ で以下の 3 条件を満たすものとする:

- (i) $\varphi(\gamma g r(\theta)) = e^{\sqrt{-1}m\theta} \varphi(g) \quad \forall \gamma \in G, r(\theta) \in K$
- (ii) $\varphi(g; \Omega) = \lambda \varphi(g)$
- (iii) $C > 0$ と $N > 0$ が存在して次を満たす

$$|\varphi(g)| < C(\max\{|a|, |b|, |c|, |d|\})^N, \quad \forall g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G.$$

ここで, Ω は, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ の Casimir element を表す。すなわち, $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の $\mathbf{C}$ -basis として

$$\hat{h} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad x_{\pm} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm\sqrt{-1} \\ \pm\sqrt{-1} & -1 \end{pmatrix}$$

を取るとき

$$8\Omega = \widehat{h}^2 - 2\widehat{h} + 4x_+x_- \in U(\mathfrak{g})$$

とする。線形空間 $\mathcal{A}(\Gamma \backslash G, m, \lambda)$ を、 $\Gamma \backslash G$ 上の重さ m の Casimir 固有値 λ の **Maass 形式** の空間と呼ぶ。単に Maass 形式というときには、重さ $m = 0$ のときを指すこともある。後の都合上、 λ を $\nu \in \mathbf{C}$ を用いて

$$\lambda = \lambda_\nu = (\nu^2 - 1)/8$$

という形に書いておこう。

Maass 形式の Fourier 展開というとき、最も普通には H が冪単部分群

$$H = N := \left\{ n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{R} \right\}$$

の場合を指す。簡単の為、 $N \cap \Gamma = \{n(x) \mid x \in \mathbf{Z}\}$ としよう。重さ m で Casimir 固有値 λ_ν の Maass 形式 φ の、 $H = N$ の非自明な指標 $\psi(n(x)) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$ に関する Fourier 係数函数

$$(2.1) \quad c_\varphi^\psi(g) = \int_0^1 \varphi(n(x)g) \exp(-2\pi\sqrt{-1}x) dx$$

は、古典的な Whittaker 函数 $W_{m/2, \nu/2}(y)$ [W-W, Chapter XVI] を用いて表示される。そのような事情から、函数 (2.1) は (G 上の) Whittaker 函数と呼ばれる ([Bu, Ch 2])。

(2.2) 新谷函数。以下 §2 では、断らない限り、

$$H = \left\{ h(y) = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} \mid y > 0 \right\} (\cong \mathbf{R}_+^\times)$$

の場合を考える。 $\mu \in \mathbf{C}$ を H の指標

$$\psi(h(y)) = \psi_\mu(h(y)) = y^\mu, \quad y > 0$$

が、 $H \cap \Gamma$ 上自明になるようにとる。この場合のフーリエ展開係数

$$(2.2) \quad c_\varphi^\psi(g) = \int_{1/\sqrt{y_0}}^{\sqrt{y_0}} \varphi(h(y)g) y^\mu d^\times y, \quad y_0 := \inf\{y > 1 \mid h(y) \in \Gamma \cap H\} \in (0, \infty]$$

は、[MS] で導入された ($\mathbf{R}$ 上の) 新谷函数である。 $y_0 = \infty$ のときは、積分 (2.2) の絶対収束を仮定しておこう ($g = e$ のとき、これは実質的に Hecke-Jacquet-Langlands による φ の L 函数の積分表示 [Bu, Ch1] であることを思い出そう)。

このように、新谷函数は Whittaker 函数と形式的には類似のやり方で定義されるが、Whittaker 函数ほど popular なものではなく、また将来的に Whittaker 函数に取って代わる存在になるというわけでも (おそらく) ない。しかし現状でも、例えば、(a) Murase-Sugano [MS] による保型的 L 函数の積分表示法 (ゼータ積分) 及び (b) Tsuzuki [Tsu] による相対跡公式の研究などで用いられていることを注意しておこう。(正確に言うと、[Tsu] では、上

記の積分 (1.1) で定義される新谷函数そのものではなく、測度ゼロの閉集合 $HK \subset G$ 上での連続性を敢えて犠牲にした新谷函数の変種が用いられている。詳細は原論文を参照)。

ところで、 $G = SL(2, \mathbf{R})$ 上の新谷函数に関しては Hirano [Hi-1] による先行研究があり、特にその超幾何函数による明示公式が $m = 0, 1$ に対して与えられている。しかしながら、[Hi-1] で得られた $m = 1$ の場合の公式は扱いづらい形をしており、また (a) (ここでは述べない) 別ルートでの考察、及び (b) 模型の一意性に関する general belief、の 2 つの事柄との整合性がよくないように思われた。そのため、 $m = 1$ の場合が Maeda[Ma] により再度詳しく調べられた。その結果、重さ 1 の新谷函数 $c_\varphi^\psi(g)$ の大域的な挙動が分かりやすい公式が得られた。さらに、Hirano [Hi-1, Theorem 6.2] では成立しないとされていた、「重さ奇数の Maass 形式に対応する ($GL(2, \mathbf{R})$ の) 新谷函数 (模型) の一意性」が成立することも分かった。以下、これについて概要を述べる (詳しい定義や計算の詳細は [Ma], [Ma-Mo] に譲る)。

(2.3) 新谷函数の満たす微分方程式. $\varphi_1 \in \mathcal{A}(\Gamma \backslash G, 1, \lambda_\nu)$ を、重さ 1 の Casimir 固有値 λ_ν を持つ Maass 形式とする。必要ならば Γ を小さなものに取り換えることで、

$$w_0 \Gamma w_0^{-1} = \Gamma, \quad w_0 := \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{C})$$

としてよい。このとき $\varphi_{-1}(g) = \varphi_1(w_0 g w_0^{-1})$ は、重さ -1 の Casimir 固有値 λ_ν を持つ Maass 形式となる。また、簡単な計算により、 $\varphi_{-1}(g; x_+) = (\pm \nu/2) \varphi_1(g)$ となることがわかる。どちらでも同じなので、

$$(2.3) \quad \varphi_{-1}(g; x_+) = \frac{\nu}{2} \varphi_1(g)$$

とする。さらに、簡単のため、 $\nu \neq 0$ すなわち、 $\lambda \neq -1/8$ を仮定する。

$$c_1^\mu(g) := c_{\varphi_1}^{\psi_\mu}(g), \quad c_{-1}^\mu(g) := c_{\varphi_{-1}}^{\psi_\mu}(g)$$

と略記する。 G の極大コンパクト部分群として $K = SO(2)$ をとる。 G の閉部分群 A を $A := \{a(r) = \begin{pmatrix} \cosh r & \sinh r \\ \sinh r & \cosh r \end{pmatrix} \in G \mid r \in \mathbf{R}\}$ で定めると、掛け算写像は微分同相 $H \times A \times K \cong G$ を与えることが容易に示せる。したがって、 $c_{\pm 1}^\mu(g)$ は A 上の値 $c_{\pm 1}^\mu(a(r))$ で完全に決定される。そこで 2 つの函数 $u_\pm: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ を

$$u_+(r) := c_1^\mu(a(r)) + c_{-1}^\mu(a(r)), \quad u_-(r) := c_1^\mu(a(r)) - c_{-1}^\mu(a(r))$$

で定義しよう。このとき、重さ 1 の Maass 形式の条件 (i)(ii) から、 $u_\pm(r)$ に対する次の微分方程式を得ることができる：

$$(2.4) \quad \left[\frac{d^2}{dr^2} + \tanh 2r \left(2 + \frac{4\mu}{2\mu \pm \nu \cosh 2r} \right) \frac{d}{dr} + \frac{4\mu \tanh^2 2r}{2\mu \pm \nu \cosh 2r} + \frac{4\mu^2 + 1}{\cosh^2 2r} - \nu^2 + 1 \right] u_\pm(r) = 0.$$

どちらでも同じことなので、ここでは $u_+(r)$ について考えよう。変数変換

$$(2.5) \quad x = x(r) = \frac{1}{\cosh 2r}, \quad u_-(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2x}} \times \tilde{u}_+(x)$$

を行うと、この方程式は

$$\tilde{P}(x, \delta_x) \tilde{u}_+(x) = 0$$

と書き換えられる。ここで、微分作用素 $\tilde{P}(x, \delta_x)$ は

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \tilde{P}(x, \delta_x) := & 2\mu x^3 \left(\delta_x - \frac{1}{2} - \mu \right) \left(\delta_x - \frac{1}{2} + \mu \right) + x^2 \left(\nu \delta_x^2 - 2\mu \delta_x + 2\mu - \mu^2 \nu - \frac{\nu}{4} \right) \\ & + x \left(-2\mu \delta_x^2 + (6\mu - \nu) \delta_x - 4\mu + \frac{\nu}{2} + \frac{\mu \nu^2}{2} \right) \\ & - \nu \left(\delta_x - 1 + \frac{\nu}{2} \right) \left(\delta_x - 1 - \frac{\nu}{2} \right) \end{aligned}$$

で与えられる。この2階線形常微分方程式は、Fuchs型でありそのリーマン図式は

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x=0 & 1 & -1 & -\nu/2\mu & \infty \\ 1-\nu/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2+\mu \\ 1+\nu/2 & 1/2 & -1/2 & 2 & -1/2-\mu \end{array} \right\}.$$

で与えられる。ここで、 $x = -\nu/2\mu$ は見かけの特異点である。この場合、特性指数が $0, 2$ (基底状態) となっているのは、1階のシステムの常微分方程式系を高階の単独微分方程式に書き換えたときに特徴的な現象である。

(2.4) 微分作用素の交換関係式. 上記の微分方程式 (2.4) を解くために、次の微分作用素の間の関係式を証明する。以下で見るように、この関係式により5点に特異点を持つ微分方程式 $\tilde{P}(x, \delta_x) = 0$ の解を求める問題が、より簡単な微分方程式 $\tilde{S}(x, \delta_x)$ (これは実質的に Gauss の超幾何方程式である) の解を求める問題に置きかえることができる。その意味で、この関係式を交換関係式 (commutation relation) と呼ぶことにする。

Proposition 2.1. 3つの微分作用素 $\tilde{Q}(x, \delta_x)$, $\tilde{R}(x, \delta_x)$, および $\tilde{S}(x, \delta_x)$ を

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &\equiv \tilde{Q}(x, \delta_x) := x \left(\delta_x - \frac{1}{2} + \mu \right) - \left(\delta_x - \frac{\nu}{2} \right), \\ \tilde{R} &\equiv \tilde{R}(x, \delta_x) := x^2 (2\mu \delta_x + 2\mu^2 - 3\mu) + x \left((-2\mu + \nu) \delta_x + 4\mu + 2\mu\nu - \frac{\nu}{2} \right) \\ &\quad - \nu \delta_x + \nu + \frac{\nu^2}{2}, \\ \tilde{S} &\equiv \tilde{S}(x, \delta_x) := x^2 \left(\delta_x - \frac{1}{2} + \mu \right) \left(\delta_x + \frac{1}{2} - \mu \right) - \left(\delta_x - \frac{\nu}{2} \right) \left(\delta_x - 1 + \frac{\nu}{2} \right). \end{aligned}$$

で定める。このとき、次の微分作用素の間の等式が成立する。:

$$(2.7) \quad \tilde{P}(x, \delta_x) \tilde{Q}(x, \delta_x) = \tilde{R}(x, \delta_x) \tilde{S}(x, \delta_x).$$

注意: 証明は, 両辺を計算すればよい。関係式 (2.7) を成立させるような微分作用素 $\tilde{Q}(x, \delta_x)$, $\tilde{R}(x, \delta_x)$, および $\tilde{S}(x, \delta_x)$ は作用素の階数をそのままにしても複数通りある。ここでは, そのうちの一つを挙げた。

(2.5) 微分方程式 (2.4) の解. 命題の関係式 (2.7) により, すぐにわかることは (少々雑な書き方をすると)

$$(2.8) \quad \tilde{Q}(x, \delta_x)(\text{Ker } \tilde{S}(x, \delta_x)) \subset \text{Ker } \tilde{P}(x, \delta_x).$$

ということである。これを用いて, $u_+(r)$ に関する微分方程式 (2.4) の解空間の基底として, 次の 2 つの函数

$$(2.9) \quad \begin{aligned} F_{\mu, \nu}^{[1]}(r) &:= \cosh r \left(\frac{1}{\cosh 2r} \right)^{1+\nu/2} \\ &\times \left\{ \frac{(\nu + 2\mu + 1) \cosh 2r - 1}{2 \cosh^2 2r} {}_2F_1 \left(\frac{\nu + 3}{4} + \frac{\mu}{2}, \frac{\nu + 5}{4} - \frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}; \tanh^2 2r \right) \right. \\ &\quad \left. + {}_2F_1 \left(\frac{\nu - 1}{4} + \frac{\mu}{2}, \frac{\nu + 1}{4} - \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2}; \tanh^2 2r \right) \right\} \end{aligned}$$

及び

$$(2.10) \quad \begin{aligned} F_{\mu, \nu}^{[2]}(r) &:= \cosh r \left(\frac{1}{\cosh 2r} \right)^{1+\nu/2} \tanh 2r \\ &\times \left\{ \frac{(\nu + 3 - 2\mu)(\nu + 1 + 2\mu) \cosh 2r - 1}{12 \cosh^2 2r} {}_2F_1 \left(\frac{\nu + 5}{4} + \frac{\mu}{2}, \frac{\nu + 7}{4} - \frac{\mu}{2}, \frac{5}{2}; \tanh^2 2r \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu + 1 + 2\mu + (\nu - 1 + 2\mu) \cosh 2r}{2(1 + \cosh 2r)} {}_2F_1 \left(\frac{\nu + 1}{4} + \frac{\mu}{2}, \frac{\nu + 3}{4} - \frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}; \tanh^2 2r \right) \right\} \end{aligned}$$

が取れることを示そう。いま, 微分方程式 $\tilde{S}(x, \delta_x)V(x) = 0$ の区間 $(0, 1)$ における解空間の基底 $(V^{[1]}(x), V^{[2]}(x))$ として

$$\begin{aligned} V^{[1]}(x) &= x^{\nu/2} {}_2F_1 \left(\frac{\nu - 1}{4} + \frac{\mu}{2}, \frac{\nu + 1}{4} - \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2}; 1 - x^2 \right), \\ V^{[2]}(x) &= (1 - x^2)^{1/2} x^{\nu/2} {}_2F_1 \left(\frac{\nu + 1}{4} + \frac{\mu}{2}, \frac{3 + \nu}{4} - \frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}; 1 - x^2 \right). \end{aligned}$$

が取れる。したがって包含関係 (2.8) から

$$\begin{aligned} \cosh r (\tilde{Q}V^{[1]})(\cosh^2 2r) &= \left(\frac{\nu - 1}{2} + \mu \right) F_{\mu, \nu}^{[1]}(r) \\ \cosh r (\tilde{Q}V^{[2]})(\cosh^2 2r) &= F_{\mu, \nu}^{[2]}(r) \end{aligned}$$

が, $u_+(r)$ に関する 2 階微分方程式 (2.4) の解であることがわかる。 $(F_{\mu, \nu}^{[1]}(r), F_{\mu, \nu}^{[2]}(r))$ が線形独立であることはすぐわかるので, $u_+(r)$ がこれらの線形結合で表されることがわかる。さらに (2.3) を考慮すると, 定数 $C \in \mathbb{C}$ を用いて

$$(2.11) \quad c_1^\nu(g) = C \times \left\{ F_{\mu, \nu}^{[1]}(r) + \sqrt{-1} F_{\mu, \nu}^{[2]}(r) \right\}$$

となることがわかる。

注意. 重さ 1 の Maass 形式の双曲的 Fourier 係数函数 $c_1^\varphi(g)$ は, (2.3) なる条件下で, 上記 (2.11) のように一通りに決まった。これは, $GL(2, \mathbf{R})$ の主系列表現の新谷汎函数の一意性を意味する。[Hi-1, Theorem 6.2] の後半部で, 「重さ奇数の Maass 形式に対応する $GL(2, \mathbf{R})$ の主系列表現の新谷汎函数の一意性は不成立」とあるがこれは誤りである。この誤りは, K -作用と $\mathfrak{g}$ -作用の整合性, すなわち条件 (2.3) が考慮に入れられていないことに起因する。なお, 定式化は異なるが新谷汎函数の一意性がいろいろな状況で Sun-Zhu[S-Z] によっても示されているが, それはここでの結果と整合的である。

(2.6) 微分作用素の交換関係式と Zuckerman tensoring. 前小節の計算を見て自然に湧き上がる疑問は, 「どのようにして上記の微分作用素の交換関係式 (2.7) を見つけるのか?」ということであろう。もう少し細かくみると, (2.5) で従属変数の変換にある $\sqrt{\frac{1+x}{2x}}$ なる因子があるおかげで超幾何方程式に帰着できた, ということに気が付く (これがないと, 仮に Frobenius の方法で級数解を求めようとしても, 係数の複雑な漸化式を前に途方に暮れるばかりであろう)。したがって, この変数変換の由来も気になるところである。すでに述べたように, これらの疑問に対する答えは Zuckerman tensoring によってもたらされる。以下, それを説明する。

$\pi = I(\sigma, \nu)$ を $SL(2, \mathbf{R})$ の非ユニタリ主系列表現とする。ここで, σ は, $SL(2, \mathbf{R})$ の Borel 部分群の Levi 部分 $\cong \{\pm 1\}$ の指標とする。それは 2 つあるので, 自明なものを $\sigma = 1$, 非自明なものを $\sigma = \text{sgn}$ で表す。このとき, $\pi = I(\sigma, \nu)$ の $(\mathfrak{g}, K)$ -加群としての構造は, 次のように記述される:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} I(1, \nu) &= \bigoplus_{m \in 2\mathbf{Z}} C v_m^\nu, & I(\text{sgn}, \nu) &= \bigoplus_{m \in 1+2\mathbf{Z}} C v_m^\nu, \\ \kappa(\theta) v_m^\nu &= e^{\sqrt{-1}m\theta} v_m^\nu, & \forall \kappa(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in K = SO(2), \\ x_+ v_m^\nu &= \frac{\nu+1+m}{2} v_{m+2}^\nu, & x_- v_m^\nu &= \frac{\nu-1+m}{2} v_{m-2}^\nu. \end{aligned}$$

また, 次の誘導表現の空間

$$(2.13) \quad C^\infty(H \backslash G; \mu) := \left\{ c \in C^\infty(G) \mid c(h(y)g) = y^\mu c(g), \quad \forall y > 0, g \in G \right\}$$

を考える。これは, 自然に右移動によって G のスムーズ表現となる。このとき, $c_1^\varphi(g)$ に対して, ある $(\mathfrak{g}, K)$ -準同型 $\Phi: I(\text{sgn}, \nu) \rightarrow C^\infty(H \backslash G; \mu)$ が存在して, $\Phi(v_1)(g) = c_1^\varphi(g)$ と書けることに注意しよう。そこで, 一般に $(\mathfrak{g}, K)$ -準同型 $\Phi: I(\sigma, \nu) \rightarrow C^\infty(H \backslash G; \mu)$ による $v_m \in I(\sigma, \nu)$ の像 $\Phi(v_m)$ を $G = SL(2, \mathbf{R})$ 上の重さ m の新谷函数と呼ぶことにしよう。重さ $m = 0$ の新谷函数については, Hirano[Hi-1, Theorem 6.2] により次が知られている (これは, §1 で述べたように (1.3) を具体的に書き下すことによって示される):

Theorem 2.2. (Hirano) 絡作用素の空間 $\text{Hom}_{\mathfrak{g},K}(I(1, \nu), C^\infty(H \setminus G; \mu))$ は 2 次元で, その基底 $(\Phi_{\text{even}}, \Phi_{\text{odd}})$ として

$$\begin{aligned}
 & \Phi_{\text{even}}(v_0)(a(r)) \\
 &= \left(\frac{1}{\cosh 2r}\right)^{\frac{1+\nu}{2}} \times {}_2F_1\left(\frac{-2\mu+1+\nu}{4}, \frac{2\mu+1+\nu}{4}, \frac{1}{2}; \tanh^2 2r\right), \\
 & \Phi_{\text{odd}}(v_0)(a(r)) \\
 &= \left(\frac{1}{\cosh 2r}\right)^{\frac{1+\nu}{2}} \tanh 2r \times {}_2F_1\left(\frac{-2\mu+3+\nu}{4}, \frac{2\mu+3+\nu}{4}, \frac{3}{2}; \tanh^2 2r\right)
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

を満たすものが存在する。

以下の基本的な戦略は, 既知の $(\mathfrak{g}, K)$ -準同型 $\Phi : I(1, \nu-1) \rightarrow C^\infty(H \setminus G; \mu-1/2)$ から出発して, 新しい $(\mathfrak{g}, K)$ -準同型 $\tilde{\Phi} : I(\text{sgn}, \nu-1) \rightarrow C^\infty(H \setminus G; \mu)$ を構成するということである。 $F_1 = \mathbf{C}^2$ を $G = SL(2, \mathbf{R})$ の 2 次元既約表現 (tautological 表現) とするとき, $\nu \neq 0$ に対して

$$I(1, \nu) \otimes F_1 \cong I(\text{sgn}, \nu-1) \oplus I(\text{sgn}, \nu-1) \tag{2.15}$$

なる分解を持つ。これは [Kn, Ch. XIV, §12] にあるように, ごく簡単な議論で得られる。(2.15) のように無限次元表現と有限次元表現をテンソルの部分加群として無限次元表現のパラメータをずらす手法を Zuckerman tensoring と呼ぶ。これを利用するために, まず G -準同型

$$\Phi_{F_1} : F_1 = \mathbf{C}^2 \hookrightarrow C^\infty(H \setminus G; \tfrac{1}{2})$$

を $\Phi_{F_1}(v)(g) := (1, 0)gv \in \mathbf{C}^2$ によって定義する。 $(\mathfrak{g}, K)$ -準同型 $\Phi : I(1, \nu-1) \rightarrow C^\infty(H \setminus G; \mu-1/2)$ に対して, 新しい $(\mathfrak{g}, K)$ -準同型

$$\tilde{\Phi} : I(\text{sgn}, \nu) \rightarrow C^\infty(H \setminus G; \mu)$$

を次の 3 つの $(\mathfrak{g}, K)$ -準同型の合成として定義する：

$$\begin{aligned}
 & T_{\text{sgn}, \nu} : I(\text{sgn}, \nu) \rightarrow I(1, \nu-1) \otimes F_1, \\
 & \Phi \otimes \Phi_{F_1} : I(1, \nu-1) \otimes F_1 \rightarrow C^\infty(H \setminus G; \mu-1/2) \otimes C^\infty(H \setminus G; \tfrac{1}{2})
 \end{aligned}$$

及び掛け算写像

$$\text{mult} : C^\infty(H \setminus G; \mu-1/2) \otimes C^\infty(H \setminus G; \tfrac{1}{2}) \rightarrow C^\infty(H \setminus G; \mu).$$

ここで $T_{\text{sgn}, \nu}$ はテンソル積の分解 (2.15) から得られる単射準同型である。これを定義に戻って追跡して計算すると,

$$\begin{aligned}
 u_+(r) &= \cosh(r) \left\{ \frac{\tanh(r)}{\nu} \frac{d}{dr} + \left(1 + \frac{2\mu-1}{\nu \cosh(2r)} \right) \right\} c_0^{(\nu-1)}(r) \\
 &= \frac{2}{\nu} \times \sqrt{\frac{1+x}{2x}} \tilde{Q}(x, \delta_x) c_0^{(\nu-1)}(x), \quad x = x(r) = \frac{1}{\cosh(2r)}
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

を得る。ただし、ここで $c_0^{(\nu-1)}(g) = \Phi(v_0)(g) \in C^\infty(H \setminus \mu - 1/2)$ を Φ に対応する新谷函数とし、 $c_0^{(\nu-1)}(x(r)) = c_0^{(\nu-1)}(a(r))$, $x(r) = 1/\cosh(2r)$ と略記した。函数 $c_0^{(\nu-1)}(x)$ は

$$\tilde{S}(x, \delta_x) c_0^{(\nu-1)}(x) = 0,$$

を満たすから、微分作用素 $\tilde{P}(x, \delta_x) \tilde{Q}(x, \delta_x)$ が右から $\tilde{S}(x, \delta_x)$ で割れることを期待するのは自然である。また、この計算により、従属変数の変更 (2.5) における $\sqrt{\frac{1+x}{2x}} = \cosh(r)$ なる因子は F_1 の行列係数 (i.e. Φ_{F_1} の像) に由来することもわかる。以上が、交換関係式 (2.7) が成立すべき理由の説明である。表現のテンソル積の分解 (2.15) を、微分方程式レベルで「実現」したものが交換関係式 (2.7) といってもよいであろう。

§3 Bianchi 保型形式の場合 — $G = SL(2, \mathbb{C})$

この節では $G = SL(2, \mathbb{C})$ 上の保型形式 φ の斜航的 (loxodromic) Fourier 係数函数についての源嶋氏 [Ge-1], [Ge-1] の結果から抜粋して紹介する ($\mathcal{O}_F$ を虚 2 次体 F の整数環とし、離散部分群 $\Gamma \subset G$ として $SL(2, \mathcal{O}_F)$ を取った場合などには、 φ は Bianchi 保型形式と呼ばれる)。ただし、斜航的 Fourier 係数函数とは、 $H = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C}^\times \right\}$ の指標 $\psi: H \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に関して積分 (1.1) で定義される函数のこととする。 ψ は $(\ell, \mu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ を用いて

$$\psi\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}\right) = \psi_{\ell, \mu}\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}\right) = |\alpha|^\mu (\alpha/|\alpha|)^\ell$$

と書かれる。いま、保型形式 φ が $G = SL(2, \mathbb{C})$ の主系列表現 $\pi = I(m, \nu)$, $(m, \nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ を生成するものとする。 $I(m, \nu)$ の定義は詳しく述べないがその極小 K -type ($K = SU(2)$) は、 K の $(|m| + 1)$ -次元既約表現である。また ν が一般の位置にいるとき、表現の同値 $I(m, \nu) \cong I(-m, -\nu)$ が成立するので、以下では $m \geq 0$ とする。次の絡空間を

$$Sh(I(m, \nu); \psi_{\ell, \mu}) = \text{Hom}_{\mathfrak{g}, K}(I(m, \nu), C^\infty(H \setminus G; \psi_{\ell, \mu}))$$

を新谷汎函数の空間と呼ぼう。ここで、誘導表現の空間 $C^\infty(H \setminus G; \psi_{\ell, \mu})$ は $G = SL(2, \mathbb{R})$ のときと同様に定める。斜航的 Fourier 係数函数は新谷汎函数の像 (それを $G = SL(2, \mathbb{C})$ 上の新谷函数と呼ぼう) であることに注意しよう。 $G = SL(2, \mathbb{C})$ 上の新谷函数は、 $m = 0$ のとき (i.e. K -不変ベクトルに対応する場合) は、やはり Hirano [Hi-2] によって超幾何関数による表示が得られていた。 $m \geq 1$ の場合には、新谷函数の満たす微分方程式系は [Hi-2] で書き下されているのだが、それはかなり複雑で解を求めるのは困難に見える。しかし、源嶋氏 [Ge-2] は、Zuckerman tensoring を用いて

$$(2.17) \quad Sh(I(m, \nu); \psi_{\ell, \mu}) \rightarrow Sh(I(m+1, \nu+1); \psi_{\ell+1, \mu+1})$$

なる線形写像を構成して、それを用いて新谷函数の $m \geq 0$ に関する帰納的な公式を得た。特に、 $m = 1, 2$ の場合に新谷函数の明示的な公式を得た (ただし、例外的なパラメータについては、この帰納的な公式はゼロを与えてしまうので個別の処理が必要となる)。 $m = 1$

の場合は, 5 点に特異点を持つ 2 階 Fuchs 型方程式が出てきて, $G = SL(2, \mathbf{R})$ の場合と同様に解が求められる。 $m = 2$ の場合は, さらに特異点が増えるのではなく, 今度は, 次のような Heun の微分方程式 (i.e. 4 点に特異点を持つ 2 階 Fuchs 型方程式, Takemura [Tak] 参照) が現れる:

$$(2.18) \quad \left\{ 16y^2(1-y)^2(\mu^2y - \nu^2) \frac{d^2}{dy^2} + 16(\nu^2 - \mu^2)y^2(1-y) \frac{d}{dy} - \mu^2(\mu^2 - 4)y^3 - \{(-2\mu^2 - 4)\nu^2 + 4\mu\nu\ell - \mu^4 + (\ell^2 + 16)\mu^2\}y^2 - \{\nu^4 + (2\mu^2 - \ell^2)\nu^2 - 4\mu\nu\ell - 12\mu^2\}y + \nu^2(\nu^2 - 4) \right\} c(y) = 0.$$

微分方程式 (2.18) の Riemann 図式は

$$\left\{ \begin{array}{cccc} y=0 & 1 & \nu^2/\mu^2 & \infty \\ (\nu+2)/4 & \ell/4 & 0 & (\mu-2)/2 \\ (-\nu+2)/4 & -\ell/4 & 2 & (-\mu-2)/2 \end{array} \right\}.$$

で与えられ (特異点 $y = \nu^2/\mu^2$ は基底状態) である, しかもその解が超幾何関数の初等関数を係数とする線形結合で表示されることがわかる。

Concluding remark. ここで述べたことは, Lie 群の表現に由来するある種の微分方程式系について, その見かけの複雑さにもかかわらず, Zuckerman's tensoring を利用することでその (大域的な挙動がわかる) 解が見いだせることがある, ということである。Whittaker 関数や新谷関数をはじめとする Lie 群上の特殊関数は, 保型形式に付随する L 関数の積分表示理論をはじめとして様々な応用を持つ。今回述べた手法は, 極めて単純な原理に基づくので, それだけに適用範囲は広いと思われる。例えば, $(G, H) = (Sp(2, \mathbf{R}) \times SL(2, \mathbf{C}), \Delta SL(2, \mathbf{C}))$ の場合に, [Mo, Theorem 7.5] では, 4 点に特異点を持つ 4 階の合流型微分方程式の解を (漸近展開を足掛かりにした推測を通じて) 求めたが, これもここで述べた方法によって, もっと素直に解が見いだせる可能性もあるように思う。この手法をさらに洗練して, 保型形式の無限素点における様々な計算・考察の汎用的なツールとして用いることができるに違いない, という推測あるいは期待を述べて本稿を終える。

REFERENCES

- [Bu] BUMP, D., Automorphic Forms and Representations, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 55(1998).
- [Ge-1] GEJIMA, K., $SL(2, \mathbf{C})$ 上の保型形式と付随する新谷関数の研究, 大阪大学理学研究科修士論文 (2013).
- [Ge-2] _____, Shintani functions on $SL(2, \mathbf{C})$ and Heun's differential equations, preprint.
- [Hi-1] HIRANO, M., Shintani Functions on $GL(2, \mathbf{R})$., Trans. of Amer. Math. Soc. **352**(2000), 1709-1721.
- [Hi-2] _____, Shintani functions on $GL(2, \mathbf{C})$, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 4, 1535—1550
- [Ma] MAEDA, M. Maass 形式の双曲的 Fourier 展開と 5 点に特異点を持つ 2 階 Fuchs 型方程式, 大阪大学理学研究科修士論文 (2012).

- [Ma-Mo] MAEDA, M. AND MORIYAMA, T, The hyperbolic Fourier expansion of Maass forms and Zuckerman's tensoring, preprint.
- [Mo] MORIYAMA, T, Spherical functions for the semisimple symmetric pair $(Sp(2, \mathbf{R}), SL(2, \mathbf{C}))$, Canadian Journal of Mathematics **54** (2002) 828–865.
- [M-S] MURASE, A. AND SUGANO, T, Shintani functions and automorphic L-functions for $GL(n)$. Tohoku Math. J. (2) **48** (1996), no. 2, 165–202.
- [Su-Zh] SUN, B. AND ZHU, C-B, Multiplicity one theorems: the Archimedean case. Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 1, 23–44.
- [Tak] TAKEMURA, K., Heun の微分方程式, 数学 Vol. 60 (2008) p. 272-294.
- [Tsu] TSUZUKI, M., Spectral means of central values of automorphic L -functions for $GL(2)$. Mem. Amer. Math. Soc. 235 (2015), no. 1110, vii+129 pp.
- [W-W] WHITTAKER, E.T. AND WATSON, G.N, A course of modern analysis, Fourth edition, Cambridge University Press (1996).
- [Z] ZUCKERMAN, G, Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie groups. Ann. of Math. (2) **106** (1977), no. 2, 295–308.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA UNIVERSITY, MACHIKANHEYAMA-CHO 1-1, TOYONAKA, OSAKA, 560-0043, JAPAN

E-mail address: moriyama[at]math.sci.osaka-u.ac.jp