

On Harrington's conservation theorem

聖徳大学児童学部 池田一磨 (Kazuma Ikeda)
Faculty of Child Studies, Seitoku University

1 序

Harrington は 1997 年に次の Harrington's conservation theorem を示した.

定理 1 任意の 1 階論理式 σ に対して, $\text{WKL}_0 \vdash \sigma \Rightarrow \text{RCA}_0 \vdash \sigma$

この定理の証明は, 最初にモデル理論的な手法によって与えられた. (モデル理論的な証明は [4, 5] などにある.) その後, 証明論的な手法による証明を与えられることが試みられてきた. 例えば, Avigad([1]) による証明などがある. しかし, cut elimination theorem の応用としての証明は, 2008 年に F. Ferreira と G. Ferreira ([2]) によって初めて与えられた. Ferreira 達は, 弱ケーニッヒの補題を Fan theorem の形に置き換えることによって, Harrington の定理の証明を与えた.

本稿では, まず F. Ferreira と G. Ferreira の主補題を紹介する. そして, 弱ケーニッヒの補題を Σ_1^0 -分離公理に置き換え, それに主補題を適用して Harrington の定理の証明を与える.

2 RCA_0^- , RCA_0 , WKL_0 , $\Sigma_1^0\text{-SP}$

ここでは, 各体系について定義を確認する.

定義 2 RCA_0^- , RCA_0 , WKL_0 , $\Sigma_1^0\text{-SP}$ の言語は共通で, 定数記号として 0, 関数記号として原始帰納的関数の定義に対応する記号, 述語記号として $=$ と $\leq$ をもつものとする.

定義 3 公理図式を定義する.

1. Σ_n^0 -帰納法 ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)) \rightarrow \forall x\varphi(x)$$

ここで, $\varphi(x)$ は Σ_n^0 -論理式.

2. Δ_n^0 -内包公理 ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow \exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$$

ここで, $\varphi(x)$ は Σ_n^0 -論理式, $\psi(x)$ は Π_n^0 -論理式.

3. Σ_n^0 -分離公理 ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow \exists X \forall x[(\varphi(x) \rightarrow x \in X) \wedge (x \in X \rightarrow \psi(x))]$$

ここで, $\varphi(x)$ は Σ_n^0 -論理式, $\psi(x)$ は Π_n^0 -論理式.

4. 弱ケーニツヒの補題

任意の無限 2 分木は無数の path を持つ (ということを WKL_0 の言語で書いたもの).

定義 4 RCA_0^- の公理は, 原始帰納的関数の定義に対応する公理と, $=$ および $\leq$ に関する標準的な公理と, Σ_1^0 -帰納法および Δ_0^0 -内包公理である.

定義 5 RCA_0 , WKL_0 , Σ_1^0 -SP を次のように定義する.

1. $RCA_0 := RCA_0^- + \Delta_1^0$ -内包公理
2. $WKL_0 := RCA_0 +$ 弱ケーニツヒの補題
3. Σ_1^0 -SP $:= RCA_0 + \Sigma_1^0$ -分離公理

次の定理が成り立つことが知られている.

定理 6 $WKL_0 \equiv \Sigma_1^0$ -SP

証明. [4], [5] を参照. □

3 RCA_0^-

この節では, 後で必要になる RCA_0^- で成り立つ定理を与える. 次の定理はよく知られている.

定理 7 (bounded collection $B\Sigma_1^0$) 任意の Δ_0^0 -論理式 ($=$ bounded formula) $\varphi(x, y)$ に対して,

$$RCA_0^- \vdash \forall x \leq a \exists y \varphi(x, y) \rightarrow \exists z \forall x \leq a \exists y \leq z \varphi(x, y).$$

証明. 実際は RCA_0^- より弱い $I\Sigma_1^0$ で成り立つ. (cf. [3]) □

つぎに, RCA_0^- においては, $\varphi(X)$ が Δ_0^0 -論理式であるとき, $\forall X \varphi(X)$ も Δ_0^0 -論理式とみなせることを示す.

定義 8 p_x を, x に x 番目の素数を対応させる, 原始帰納的関数とする. このとき, 次の原始帰納的関数 $(a)_x$, $\ln(a)$ と, 原始帰納的關係 $s \in \{0, 1\}^a$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} (a)_x &= \mu z \leq a(p_x^z | a \wedge p_x^{z+1} \nmid a) \\ \ln(a) &= \mu z \leq a(p_z \nmid a) \\ s \in \{0, 1\}^a &\Leftrightarrow s \leq \prod_{x < a} p_x^{1+s_x} \wedge \ln(s) = a \end{aligned}$$

これらは, RCA_0^- の言語の記号としてもそのまま用いることにする. $\varphi(x)$ が Δ_0^0 -論理式のとき, $\forall s \in \{0, 1\}^a \varphi(s)$ および $\exists s \in \{0, 1\}^a \varphi(s)$ も Δ_0^0 -論理式である.

補題 9 $\text{RCA}_0^- \vdash \forall y \exists s \in \{0, 1\}^y \forall x < y [x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0]$

証明. 以下, RCA_0^- において議論する. 次の Δ_0^0 -論理式を, a についての Σ_1^0 -帰納法により示す.

$$\exists s \in \{0, 1\}^a \forall x < a [x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0]$$

$a = 0$ のときは明らかである. よって, a の場合を仮定し, $a + 1$ の場合を示す. 帰納法の仮定より, $\forall x < a [x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0]$ となる $s \in \{0, 1\}^a$ が存在する.

$a \in A$ と仮定する. このとき, $s' = (\prod_{x < a} p_x^{(s)_x}) \cdot p_a^{0+1}$ とおく. すると, $s' \in \{0, 1\}^{a+1} \wedge \forall x < a + 1 [x \in A \leftrightarrow (s')_x = 0]$. よって, $\exists s' \in \{0, 1\}^{a+1} \forall x < a + 1 [x \in A \leftrightarrow (s')_x = 0]$.

$a \notin A$ と仮定する. このとき, $s' = (\prod_{x < a} p_x^{(s)_x}) \cdot p_a^{1+1}$ とおく. すると, $a \in A$ と仮定したときと同様に, $\exists s' \in \{0, 1\}^{a+1} \forall x < a + 1 [x \in A \leftrightarrow (s')_x = 0]$ となる.

従って, $\exists s' \in \{0, 1\}^{a+1} \forall x < a + 1 [x \in A \leftrightarrow (s')_x = 0]$ が RCA_0^- で証明できる. $\square$

補題 10 $\varphi(\bar{a}, A)$ を Δ_0^0 -論理式とする. ここで, $\bar{a}$ は 1 階の自由変数の列, A は 2 階の自由変数. このとき,

$$\forall s \in \{0, 1\}^{t_\varphi(\bar{a})} [\forall x < t_\varphi(\bar{a}) (x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0) \rightarrow (\varphi(\bar{a}, A) \leftrightarrow \varphi^*(\bar{a}, s))]$$

となる項 $t_\varphi(\bar{a})$ を見つけることができる. ここで, $\varphi^*(\bar{a}, s)$ は, $\varphi(\bar{a}, A)$ に現れる $r \in A$ という形の原始論理式を $(s)_r = 0$ という形の論理式に置き換えたものである.

証明. $\varphi(\bar{a}, A)$ の構造に関する帰納法により $t_\varphi(\bar{a})$ を次のように構成する.

- (1) $\varphi(\bar{a}, A)$ が $t(\bar{a}) \in A$ の場合. このとき, $t_\varphi(\bar{a}) := t(\bar{a}) + 1$.
- (2) $\varphi(\bar{a}, A)$ が A を含まない原始論理式の場合. このとき, $t_\varphi(\bar{a}) := 0$.
- (3) $\varphi(\bar{a}, A)$ が $\neg\psi(\bar{a}, A)$ の場合. このとき, $t_\varphi(\bar{a}) := t_\psi(\bar{a})$.
- (4) $\varphi(\bar{a}, A)$ が $\psi_1(\bar{a}, A) \circ \psi_2(\bar{a}, A)$ の場合. ここで, $\circ$ は $\wedge, \vee$ または $\rightarrow$.
このとき, $t_\varphi(\bar{a}) := t_{\psi_1}(\bar{a}) + t_{\psi_2}(\bar{a})$.

(5) $\varphi(\bar{a}, A)$ が $Qy \leq s \psi(y, \bar{a}, A)$ の場合. ここで, Q は $\forall$ または $\exists$.

このとき, $t_\varphi(\bar{a}) := \sum_{y \leq s} t_\psi(y, \bar{a})$.

(5) においては, $\text{RCA}_0^- \vdash y \leq s \rightarrow t_\psi(y, \bar{a}) \leq t_\varphi(\bar{a})$ であることから, 次のことがわかる.

$$\text{RCA}_0^- \vdash \forall x < t_\varphi(\bar{a})(x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0) \wedge y \leq s \rightarrow \forall x < t_\psi(y, \bar{a})(x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0)$$

この論理式より, 求める論理式が得られる. $\square$

命題 11 $\varphi(\bar{a}, A)$ を Δ_0^0 -論理式とする. ここで, $\bar{a}$ は 1 階の自由変数の列, A は 2 階の自由変数. このとき,

$$\text{RCA}_0^- \vdash \forall X \varphi(\bar{a}, X) \leftrightarrow \forall s \in \{0, 1\}^{t_\varphi(\bar{a})} \varphi^*(\bar{a}, s)$$

ここで, $t_\varphi(\bar{a})$ は補題 10 によって $\varphi(\bar{a}, A)$ から決まる項とする.

証明. 以下, RCA_0^- において議論する. $\forall s \in \{0, 1\}^{t_\varphi(\bar{a})} \varphi^*(\bar{a}, s) \rightarrow \varphi(\bar{a}, A)$ が成り立つことは, 補題 10 から論理式

$$s \in \{0, 1\}^{t_\varphi(\bar{a})} \wedge \forall x < t_\varphi(\bar{a})(x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0) \wedge \varphi^*(\bar{a}, s) \rightarrow \varphi(\bar{a}, A)$$

成り立つことと, 補題 9 から $\exists s \in \{0, 1\}^{t_\varphi(\bar{a})} \forall x < t_\varphi(\bar{a})[x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0]$ が成り立つことからわかる.

一方, $\forall X \varphi(\bar{a}, X) \rightarrow \forall s \in \{0, 1\}^{t_\varphi(\bar{a})} \varphi^*(\bar{a}, s)$ が成り立つことは, 補題 10 から論理式

$$s \in \{0, 1\}^{t_\varphi(\bar{a})} \wedge \forall x < t_\varphi(\bar{a})(x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0) \wedge \varphi(\bar{a}, A) \rightarrow \varphi^*(\bar{a}, s)$$

が成り立つことと, Δ_0^0 -内包公理から $\exists X \forall x < t_\varphi(\bar{a})(x \in X \leftrightarrow (s)_x = 0)$ が成り立つことからわかる. $\square$

4 F. Ferreira と G. Ferreira の主補題

定義 12 one-side で表された LK に次の公理と推論図を加えた体系を $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ で表すことにする.

1. 公理: RCA_0^- の Σ_1^0 -帰納法と Δ_0^0 -内包公理を除く公理を原始論理式の列の形で表現したもの.
2. 推論図:

$$\frac{\Gamma, \varphi(V)}{\Gamma, \exists X \varphi(X)} (\exists^2) \qquad \frac{\Gamma, \varphi(A)}{\Gamma, \forall X \varphi(X)} (\forall^2)$$

(V は Δ_0^0 -論理式) (A は下式に現れない)

$$\frac{\Gamma, \neg\varphi(a), \varphi(S(a))}{\Gamma, \neg\varphi(0), \varphi(t)} \text{ (Ind)}$$

(a は下式に現れない, S は後者関数, $\varphi(a)$ は Σ_1^0 -論理式)

定義 13 $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ に次の推論図 $(\Sigma_1^0 - \text{SP})^R$ を加えたものを $\text{LK}_{\Sigma_1^0 - \text{SP}}$ で表す.

$$\frac{\Gamma, \varphi(a) \rightarrow \psi(a) \quad \Gamma, \neg\forall x[(\varphi(x) \rightarrow x \in A) \wedge (x \in A \rightarrow \psi(x))]}{\Gamma} (\Sigma_1^0 - \text{SP})^R$$

ここで, $\varphi(x)$ は Σ_1^0 -論理式で, $\psi(x)$ は Π_1^0 -論理式である. a は Γ に現れない. また, A は $\Gamma, \varphi(x), \psi(x)$ に現れない.

このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 14 (Cut elimination theorem) $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ ($\text{LK}_{\Sigma_1^0 - \text{SP}}$) の証明図は, その証明図と同じ終式を持ち, かつその 2 つの *cut*-論理式の一方が Σ_1^0 -論理式である *cut* しか現れない $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ ($\text{LK}_{\Sigma_1^0 - \text{SP}}$) の証明図に変形することができる.

補題 15 (F. Ferreira と G. Ferreira の主補題) $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ において, 次の形 $(*)$ をした論理式が証明できたと仮定する.

$$\Gamma, \forall w_1 \varphi(w_1, \bar{A}), \dots, \forall w_n \varphi(w_n, \bar{A}), \exists y_1 \psi(y_1, \bar{A}), \dots, \exists y_m \psi(y_m, \bar{A}) \dots (*)$$

ここで, $(*)$ は下の条件 (1)~(4) を満たすとする.

- (1) この *sequent* に現れる論理式は全て冠頭標準形である.
- (2) $\varphi_1(w_1, \bar{A}), \dots, \varphi_n(w_n, \bar{A})$ と $\psi_1(y_1, \bar{A}), \dots, \psi_m(y_m, \bar{A})$ は Σ_0^0 -論理式である.
- (3) Γ は Σ_1^0 -論理式でも, Π_1^0 -論理式でもない 1 階の論理式の列.
- (4) $\bar{A}$ は, Γ には現れない 2 階の変数記号の列で, *special parameter* と呼ばれる.

このとき, 次の *sequent* も $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ において証明できる.

$$\Gamma, \forall w_i \exists v \forall \bar{X} \left[\bigvee_{i=1}^n \varphi_i(w_i, \bar{X}) \vee \bigvee_{j=1}^m \exists y_j \leq v \psi_j(y_j, \bar{X}) \right].$$

証明. $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ における

$$\Gamma, \forall w_1 \varphi(w_1, \bar{A}), \dots, \forall w_n \varphi(w_n, \bar{A}), \exists y_1 \psi(y_1, \bar{A}), \dots, \exists y_m \psi(y_m, \bar{A})$$

の証明図を一つとる. これに Cut-elimination theorem を適用する. すると, その証明図と同じ終式を持ち, かつその 2 つの *cut*-論理式の一方が Σ_1^0 -論理式である *cut* しか現れない証明図を得る. しかもその証明図に現れる *sequent* はすべて $(*)$ の形をした *sequent* である. このとき, 2 階の推論図は現れないことに注意する.

以下, この証明図に現れる *sequent* の高さに関する帰納法により示す. initial *sequent* のときは, それに現れる論理式はすべて原始論理式であるから成り立つ. 次に, 各推論図 I に対して, 上式に対して補題が成り立つと仮定して, 下式に対して補題が成り立つことを示す.

(1) I が次の形をしている場合：

$$\frac{\Gamma_1, \forall w \varphi(w, \bar{A}), \exists y \psi(y, \bar{A}), \theta_1(\bar{A}) \quad \Gamma_1, \forall w \varphi(w, \bar{A}), \exists y \psi(y, \bar{A}), \theta_2(\bar{A})}{\Gamma_1, \forall w \varphi(w, \bar{A}), \exists y \psi(y, \bar{A}), (\theta_1 \wedge \theta_2)(\bar{A})}$$

ここで、 $\bar{A}$ は下式の special parameter.

このとき、 $\theta_1(\bar{A})$ と $\theta_2(\bar{A})$ は Σ_0^0 -論理式であることに注意. 帰納法の仮定から、次の sequent が $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ で証明できる.

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \theta_i(\bar{X})]$$

ここで、 $i = 1, 2$. よって、次の sequent が $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ で証明できる.

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee (\theta_1(\bar{X}) \wedge \theta_2(\bar{X}))]$$

(2) I が次の形をしている場合：

$$\frac{\Gamma_1, \forall w \varphi(w, \bar{A}), \exists y \psi(y, \bar{A}), \theta_1(\bar{A})}{\Gamma_1, \forall w \varphi(w, \bar{A}), \exists y \psi(y, \bar{A}), (\theta_1 \vee \theta_2)(\bar{A})}$$

ここで、 $\bar{A}$ は下式の special parameter.

このとき、 $\theta_1(\bar{A})$ は Σ_0^0 -論理式であることに注意. 帰納法の仮定から、次の sequent が $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ で証明できる.

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \theta_1(\bar{X})]$$

よって、次の sequent が $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ で証明できる.

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee (\theta_1(\bar{X}) \vee \theta_2(\bar{X}))]$$

(3) I が次の形をしている場合:

$$\frac{\Gamma_1, \forall w \varphi(w, \bar{A}), \exists y \psi(y, \bar{A}), \theta(a)}{\Gamma_1, \forall w \varphi(w, \bar{A}), \exists y \psi(y, \bar{A}), \forall x \theta(x)}$$

ここで、 $\bar{A}$ は下式の special parameter.

$\theta(x)$ が Σ_1^0 -論理式でない場合は明らかである. よって、 $\theta(x)$ は Σ_1^0 -論理式であると仮定する.

[Case 1] $\forall x \theta(x, \bar{A})$ が Δ_0^0 -論理式で、 $\forall x \leq t \theta_0(x, \bar{A})$, すなわち $\forall x (x \leq t \vee \theta_0(x, \bar{A}))$ という形の場合. このとき、 $\theta_0(x, \bar{A})$ には一般に $\bar{A}$ が現れることに注意. 帰納法の仮定から、次の sequent が $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ で証明できる.

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee a \leq t \vee \theta_0(a, \bar{X})]$$

従って、次の sequent が証明できる.

$$\Gamma_1, \forall x \leq t \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \theta_0(x, \bar{X})]$$

命題 11 から $\forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \theta_0(x, \bar{X})]$ は Δ_0^0 -論理式である. ゆえに, 定理 7 から $B\Sigma_1^0$ が成り立つので, 次の sequent を得る.

$$\Gamma_1, \exists u \forall x \leq t \exists v \leq u \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \theta_0(x, \bar{X})]$$

この sequent から, 下の sequent が証明できる.

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall x \leq t \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \theta_0(x, \bar{X})]$$

従って, 次の sequent が証明できる.

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \forall x \leq t \theta_0(x, \bar{X})]$$

[Case 2] $\forall x \theta(x, \bar{A})$ が Π_1^0 -論理式で, $\theta(x, \bar{A})$ が Δ_0^0 -論理式である場合. このとき, $\theta(x, \bar{A})$ には一般に $\bar{A}$ が現れることに注意. 帰納法の仮定から, $LK_{RCA_0^-}$ において次の sequent が証明できる.

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \theta(a, \bar{X})]$$

よって, 次の sequent が証明できる.

$$\Gamma_1, \forall x \forall w \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \theta(x, \bar{X})]$$

[Case 3] $\theta(x)$ が $\exists z \theta_1(z, x, \bar{B})$ という形の場合. ただし, $\theta_1(z, x, \bar{B})$ は Δ_0^0 -論理式. このとき, $\theta_1(z, x, \bar{B})$ は $\bar{A}$ を含んでいないが, 上式の special parameter ではあるが, 下式の special parameter ではない 2 階の変数の列 $\bar{B}$ を一般には含んでいることに注意. 帰納法の仮定にから, 次の sequent が $LK_{RCA_0^-}$ で証明できる.

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X} \forall \bar{Y} [\varphi(w, \bar{X}, \bar{Y}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}, \bar{Y}) \vee \exists z \leq v \theta_1(z, a, \bar{Y})]$$

この sequent から次の sequent が証明できる.

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}, \bar{B}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}, \bar{B})], \exists z \theta_1(z, a, \bar{B})$$

従って, 次の sequent が証明できる.

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}, \bar{B}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}, \bar{B})], \forall x \exists z \theta_1(z, x, \bar{B})$$

(4) I が次の形をしている場合:

$$\frac{\Gamma_1, \forall w \varphi(w, \bar{A}), \exists y \psi(y, \bar{A}), \theta(t)}{\Gamma_1, \forall w \varphi(w, \bar{A}), \exists y \psi(y, \bar{A}), \exists x \theta(x)}$$

ここで、 $\bar{A}$ は下式の special parameter.

$\theta(x)$ が Π_1^0 -論理式でない場合は明らかである. よって、 $\theta(x)$ は Π_1^0 -論理式であると仮定する.

[Case 1] $\exists x\theta(x, \bar{A})$ が Δ_0^0 -論理式で、 $\exists x \leq s\theta_0(x, \bar{A})$, すなわち $\exists x(x \leq s \wedge \theta_0(x, \bar{A}))$ という形である場合. このとき、 $\theta_0(x, \bar{A})$ には一般に $\bar{A}$ が現れていることに注意. 帰納法の仮定から、次の sequent が $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ で証明できる.

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee (t \leq s \wedge \theta_0(t, \bar{X}))]$$

この sequent より直ちに次の sequent を得る.

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \exists x(x \leq s \wedge \theta_0(x, \bar{X}))]$$

[Case 2] $\exists x\theta(x, \bar{A})$ が Σ_1^0 -論理式で、 $\theta(x, \bar{A})$ が Δ_0^0 -論理式である場合. このとき、 $\theta(x, \bar{A})$ には一般に $\bar{A}$ が現れていることに注意. 帰納法の仮定から、次の sequent が $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ で証明できる.

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \theta(t, \bar{X})]$$

ここで、

$$\exists y \leq v \psi(y, \bar{A}) \vee \theta(t, \bar{A}) \rightarrow \exists y \leq \max(v, t) \psi(y, \bar{A}) \vee \exists x \leq \max(v, t) \theta(x, \bar{A})$$

が証明できるので、次の sequent が $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ で証明できる.

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \exists x \leq v \theta(x, \bar{X})]$$

[Case 3] $\theta(x)$ が $\forall z\theta_1(z, x, \bar{B})$ という形の場合. ただし、 $\theta_1(z, x, \bar{B})$ は Δ_0^0 -論理式. このとき、 $\theta_1(z, x, \bar{B})$ は $\bar{A}$ を含んでいないが、上式の special parameter ではあるが、下式の special parameter ではない 2 階の変数の列 $\bar{B}$ を一般には含んでいることに注意. 帰納法の仮定から、次の sequent が $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ で証明できる.

$$\Gamma_1, \forall z \forall w \exists v \forall \bar{X} \forall \bar{Y} [\varphi(w, \bar{X}, \bar{Y}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}, \bar{Y}) \vee \theta_1(z, t, \bar{Y})]$$

$\theta_1(z, t, \bar{B})$ には v も $\bar{A}$ も現れないので、次の sequent が $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ で証明できる.

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}, \bar{B}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}, \bar{B})], \exists x \forall z \theta_1(z, x, \bar{B})$$

(5) I が次の形をしている場合:

$$\frac{\Gamma_1, \forall w \varphi(w, \bar{A}), \exists y \psi(y, \bar{A}), \exists x \theta(x, \bar{A}, \bar{B}) \quad \Gamma_2, \forall w \varphi(w, \bar{A}), \exists y \psi(y, \bar{A}), \neg \exists x \theta(x, \bar{A}, \bar{B})}{\Gamma_1, \Gamma_2, \forall w \varphi(w, \bar{A}), \exists y \psi(y, \bar{A})}$$

ここで、 θ は Δ_0^0 -論理式、 $\bar{A}$ は下式の special parameter、 $\bar{B}$ は下式には現れない上式の special parameter.

帰納法の仮定から，次の2つの sequent が $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ で証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w \exists u \forall \bar{X} \forall \bar{Y} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq u \psi(y, \bar{X}) \vee \exists x \leq u \theta(x, \bar{X}, \bar{Y})] \quad \cdots (a)$$

$$\Gamma_2, \forall w \forall x \exists v \forall \bar{X} \forall \bar{Y} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg \theta(x, \bar{X}, \bar{Y})] \quad \cdots (b)$$

(b) の sequent から，次の sequent が証明できる．

$$\Gamma_2, \forall x \leq u \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg \theta(x, \bar{X}, \bar{B})]$$

ここで， $\forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg \theta(x, \bar{X}, \bar{B})]$ が Δ_0^0 -論理式であることに注意．従って，この sequent に $\text{B}\Sigma_1^0$ を適用できて，次の sequent を得る．

$$\Gamma_2, \exists z \forall x \leq u \exists v \leq z \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg \theta(x, \bar{X}, \bar{B})]$$

よって，次の sequent が証明できる．

$$\Gamma_2, \exists v \forall x \leq u \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg \theta(x, \bar{X}, \bar{B})]$$

ゆえに，次の sequent を得る．

$$\Gamma_2, \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg \exists x \leq u \theta(x, \bar{X}, \bar{B})] \quad \cdots (c)$$

一般に次の sequent が証明できる．

$$\begin{aligned} & \neg \forall \bar{X} \forall \bar{Y} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq u \psi(y, \bar{X}) \vee \exists x \leq u \theta(x, \bar{X}, \bar{Y})], \\ & \neg \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg \exists x \leq u \theta(x, \bar{X}, \bar{B})], \\ & \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq \max(u, v) \psi(y, \bar{X})] \end{aligned}$$

この sequent と (a) および (c) の sequent から次の sequent を得る．

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X})]$$

(6) I が次の形をしている場合：

$$\frac{\Gamma_1, \forall w \varphi(w, \bar{A}), \exists y \psi(y, \bar{A}), \neg \exists x \theta(x, a, \bar{A}), \exists x \theta(x, S(a), \bar{A})}{\Gamma_1, \forall w \varphi(w, \bar{A}), \exists y \psi(y, \bar{A}), \neg \exists x \theta(x, 0, \bar{A}), \exists x \theta(x, t, \bar{A})}$$

ここで， θ は Δ_0^0 -論理式， $\bar{A}$ は下式の special parameter.

帰納法の仮定から，次の sequent が $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ で証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w \forall x \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg \theta(x, a, \bar{X}) \vee \exists x \leq v \theta(x, S(a), \bar{X})]$$

この sequent から次の sequent が得られる．

$$\Gamma_1, \forall x \leq u \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg \theta(x, a, \bar{X}) \vee \exists x \leq v \theta(x, S(a), \bar{X})]$$

ここで, $\forall \bar{X}[\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}) \vee \neg\theta(x, a, \bar{X}) \vee \exists x \leq v\theta(x, S(a), \bar{X})]$ は Δ_0^0 -論理式であるから, $B\Sigma_1^0$ を適用できる. よって, 次の sequent を得る.

$$\Gamma_1, \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}) \vee \neg\theta(x, a, \bar{X}) \vee \exists x \leq v\theta(x, S(a), \bar{X})]$$

ゆえに, 次の sequent を得る.

$$\Gamma_1, \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}) \vee \neg \exists x \leq u\theta(x, a, \bar{X}) \vee \exists x \leq v\theta(x, S(a), \bar{X})] \cdots (d)$$

また, 一般に次の sequent が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \neg \forall \bar{X} [\neg\theta(x, 0, \bar{X}) \vee \varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq u\psi(y, \bar{X}) \vee \exists x \leq u\theta(x, a, \bar{X})], \\ & \neg \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}) \vee \neg \exists x \leq u\theta(x, a, \bar{X}) \vee \exists x \leq v\theta(x, S(a), \bar{X})], \\ & \forall \bar{X} [\neg\theta(x, 0, \bar{X}) \vee \varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq \max(u, v)\psi(y, \bar{X}) \vee \exists x \leq v\theta(x, S(a), \bar{X})] \end{aligned}$$

この sequent と (d) の sequent から次の sequent を得る.

$$\begin{aligned} & \Gamma_1, \neg \exists u \forall \bar{X} [\neg\theta(x, 0, \bar{X}) \vee \varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq u\psi(y, \bar{X}) \vee \exists x \leq u\theta(x, a, \bar{X})], \\ & \exists v \forall \bar{X} [\neg\theta(x, 0, \bar{X}) \vee \varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}) \vee \exists x \leq v\theta(x, S(a), \bar{X})] \end{aligned}$$

$\exists u \forall \bar{X} [\neg\theta(x, 0, \bar{X}) \vee \varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq u\psi(y, \bar{X}) \vee \exists x \leq u\theta(x, a, \bar{X})]$ が Σ_1^0 -論理式であることに注意して, この sequent に Σ_1^0 -帰納法を適用すると, 次の sequent を得る.

$$\begin{aligned} & \Gamma_1, \neg \exists u \forall \bar{X} [\neg\theta(x, 0, \bar{X}) \vee \varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq u\psi(y, \bar{X}) \vee \exists x \leq u\theta(x, 0, \bar{X})], \\ & \exists v \forall \bar{X} [\neg\theta(x, 0, \bar{X}) \vee \varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}) \vee \exists x \leq v\theta(x, t, \bar{X})] \end{aligned}$$

$\exists u \forall \bar{X} [\neg\theta(x, 0, \bar{X}) \vee \varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq u\psi(y, \bar{X}) \vee \exists x \leq u\theta(x, 0, \bar{X})]$ は証明可能であるから, 次の sequent が成り立つ.

$$\Gamma_1, \exists v \forall \bar{X} [\neg\theta(x, 0, \bar{X}) \vee \varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}) \vee \exists x \leq v\theta(x, t, \bar{X})]$$

この sequent から求める次の sequent を得る.

$$\Gamma_1, \forall w \forall x \exists v \forall \bar{X} [\neg\theta(x, 0, \bar{X}) \vee \varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}) \vee \exists x \leq v\theta(x, t, \bar{X})]$$

□

5 Harrington's conservation theorem

定理 16 (Harrington) 任意の 1 階論理式 σ に対して, $WKL_0 \vdash \sigma \Rightarrow RCA_0 \vdash \sigma$

証明. 1 階論理式 σ が RCA_0^- で証明可能であると仮定する. このとき, $\text{LK}_{\Sigma_1^0\text{-SP}}$ で $\text{sequent} \rightarrow \sigma$ が証明図が存在する. この証明図に対して, Cut-elimination theorem を使うと, 得られた証明図には命題 15 における (*) の形をした sequent のみが現れる. この証明図に推論図 $(\Sigma_1^0 - \text{SP})^R$ が現れないならば証明は終わりである. よって, $(\Sigma_1^0 - \text{SP})^R$ が現れると仮定する. 一番上の $(\Sigma_1^0 - \text{SP})^R$ が次の形をしていたとする. この推論図を I とする.

$$\frac{\Gamma, \forall w \theta(w), \exists y \chi(y), \varphi(a) \rightarrow \psi(a) \quad \Gamma, \forall w \theta(w), \exists y \chi(y), \neg \forall x (\varphi(x) \rightarrow x \in A \rightarrow \psi(x))}{\Gamma, \forall w \theta(w), \exists y \chi(y)}$$

ここで, Γ は一階論理式の列で, $\varphi(x) \rightarrow x \in A \rightarrow \psi(x)$ は $(\varphi(x) \rightarrow x \in A) \wedge (x \in A \rightarrow \psi(x))$ の略記とする. 簡単のため, Γ には Σ_1^0 -論理式も Π_1^0 -論理式も含まれないとする. また, $\varphi(x)$ は $\exists z \varphi_0(x, z)$, $\psi(x)$ は $\forall v \psi_0(x, v)$ という形をしているとする. ただし, $\varphi_0(x, z)$ と $\psi_0(x, v)$ は Δ_0^0 -論理式とする. このとき, $\neg \forall x (\varphi(x) \rightarrow x \in A \rightarrow \psi(x))$ は, $\exists x \exists z \exists v \neg (\varphi_0(x, z) \rightarrow x \in A \rightarrow \psi_0(x, v))$ という形の Σ_1^0 -論理式であることに注意.

この推論図 I の上式は $\text{LK}_{\text{RCA}_0^-}$ で証明できるので, 右側の sequent に主補題を適用すると, 次の sequent を得る.

$$\Gamma, \forall w \exists u \forall X [\theta(w) \vee \exists y \leq u \chi(y) \vee \exists x \leq u \exists z \leq u \exists v \leq u \neg (\varphi_0(x, z) \rightarrow x \in X \rightarrow \psi_0(x, v))]$$

従って, 次の sequent が証明できる.

$$\Gamma, \forall w \exists u \forall X [\theta(w) \vee \exists y \leq u \chi(y) \vee \neg \forall x \leq u (\exists z \leq u \varphi_0(x, z) \rightarrow x \in X \rightarrow \forall v \leq u \psi_0(x, v))]$$

$\theta(w)$ と $\chi(y)$ には X が現れないので, 上の sequent から次の sequent が証明できる.

$$\Gamma, \forall w \exists u [\theta(w) \vee \exists y \leq u \chi(y) \vee \neg \exists X \forall x \leq u (\exists z \leq u \varphi_0(x, z) \rightarrow x \in X \rightarrow \forall v \leq u \psi_0(x, v))]$$

この sequent から次の sequent が証明できることはすぐにわかる.

$$\Gamma, \forall w \theta(w), \exists y \chi(y), \neg \forall u \exists X \forall x \leq u (\exists z \leq u \varphi_0(x, z) \rightarrow x \in X \rightarrow \forall v \leq u \psi_0(x, v)) \cdots (e)$$

一方, I の左側の上式から次の sequent が証明できることは明らかである.

$$\Gamma, \forall w \theta(w), \exists y \chi(y), \forall x \leq u (\exists z \leq u \varphi_0(x, z) \rightarrow \forall v \leq u \psi_0(x, v))$$

従って, 次の sequent を得る.

$$\Gamma, \forall w \theta(w), \exists y \chi(y), \forall x \leq u (\exists z \leq u \varphi_0(x, z) \rightarrow \exists z \leq u \varphi_0(x, z) \rightarrow \forall v \leq u \psi_0(x, v))$$

$\exists z \leq u \varphi_0(x, z)$ は Δ_0^0 -論理式であるから, 推論図 $(\exists^2)$ によって,

$$\Gamma, \forall w \theta(w), \exists y \chi(y), \exists X \forall x \leq u (\exists z \leq u \varphi_0(x, z) \rightarrow x \in X \rightarrow \forall v \leq u \psi_0(x, v))$$

従って, 次の sequent を得る.

$$\Gamma, \forall w \theta(w), \exists y \chi(y), \forall u \exists X \forall x \leq u (\exists z \leq u \varphi_0(x, z) \rightarrow x \in X \rightarrow \forall v \leq u \psi_0(x, v)) \cdots (f)$$

(e) と (f) から, 推論図 I の下式が証明できる.

$$\Gamma, \forall w \theta(w), \exists y \chi(y)$$

同様の操作を繰り返して, 証明図より推論図 $(\Sigma_1^0 - \text{SP})^R$ を消去できる. $\square$

参考文献

- [1] AVIGAD, J, Formalizing forcing arguments in subsystems of second-order arithmetic, *Ann. Pure Appl. Logic* **82**(1996), 165–191.
- [2] FERNANDO FERREIRA AND GILDA FERREIRA, Harrington’s conservation theorem redone. *Arch. Math. Logic* **47** (2008), 91–100.
- [3] RICHARD KAYE, *Models of Peano Arithmetic*, Oxford, 1991.
- [4] STEPHEN G. SIMPSON, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, 2nd ed, *Perspectives in Mathematical Logic*, Cambridge UP, 2009.
- [5] 田中一之, *逆数学と2階算術*, 河合文化教育研究所, 1997.