

非対称楕円型作用素に関する Neumann 型理想境界

東大 理 伊藤清三

§0. 序

二階楕円型作用素 $A = \operatorname{div} \nabla + b \cdot \nabla$ に関する Martin 境界の理論は, Dirichlet 問題の一般化と考えられるから, A の形式的共役作用素 A^* : $A^*u = \operatorname{div}(\nabla u - bu)$, に関する Neumann 問題に対応する理想境界の構成を試みる. このような理論は, 普通の Riemann 面上のラプラシアンの場合に, Kuramochi [1] によって創始され, その主要部は Ohtsuka [2] により簡易化されたが, 上記 A^* で $b \equiv 0$ の場合には, 微分方程式に関する結果の援用により, [2] とほとんど平行に議論できる [5]. 本稿では, $b \equiv 0$ とは仮定せず, b に対する適当な付帯条件 (§1, 条件 A) のもとで, 同様な理想境界の理論を構成する. 本稿の方法は偏微分方程式論の枠内での解析的方法であるが, 確率論的方法でも同様な理論が試みられつつある. (Riemann 面の場合の関連文献については [2] の末尾を, 確率論的方法については [3] およびその引用文献を参照.)

§1. 予備概念

Riemann 空間 R における前述の楕円型作用素 A^* を考え、ここで div は Riemann 計量のテンソル a^{ij} に関するものとし、 ∇ は反変ベクトルとする。また $(\nabla u \cdot \nabla v) = a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x^j}$, $|\nabla u| = (\nabla u \cdot \nabla u)^{1/2}$ とし、 R の任意の部分領域 Ω と、 Ω 上で $\omega(x) \geq 0$ なる任意の函数 ω に対して次のように定義する:

$$(\nabla u, \nabla v)_{\Omega, \omega} = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) d_{\omega} x, \quad \|\nabla u\|_{\Omega, \omega} = (\nabla u, \nabla u)_{\Omega, \omega}^{1/2},$$

ここに $d_{\omega} x = \omega(x) \sqrt{a(x)} dx^1 \cdots dx^m$ ($a = \det \|a_{ij}\|$, $m = \dim R$).

測度 $d_{\omega} x$ に関する m ベクトル函数の L^2 空間を $L_{\omega}^2(\Omega)$ と書く。

集合 $E \subset R$ の境界が、互いに交わらない有限個の滑らかな曲面からなるとき、 E は 正則 であるということにする。

正則なコンパクト領域 K_0 も一つ固定する。

任意の領域 $\Omega \supset K_0$ に対して、 $\Omega - K_0$ で滑らかで $\psi|_{\partial K_0} = 0$ かつ $\nabla \psi \in L_{\omega}^2(\Omega - K_0)$ なる函数 ψ の全体を $P_{\omega}(\Omega; K_0)$ と書く。

$K_0 \subset D$ かつ $\bar{D}$ がコンパクトな領域 D に対して、境界値問題

$$(1.1) \quad A^* u = 0, \quad u|_{\partial K_0} = \varphi_0, \quad u|_{\partial D} = \varphi$$

のグリーン函数を $G^D(x, y)$ とし、境界値問題

$$(1.2) \quad A^* u = 0, \quad u|_{\partial K_0} = \varphi_0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \beta u \right) \Big|_{\partial D} = \varphi$$

の核函数を $N^D(x, y)$ とする (いずれも y の函数として)。また

∂K_0 上の連続函数 φ_0 を任意に固定したとき、境界値問題

$$(1.3) \quad A^*u=0, \quad u|_{\partial K_0}=\varphi_0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}-\beta u\right)|_{\partial D}=0$$

の解を u^D と書くことにする. β は境界上での b の外向き法線成分を表わす. このとき

補題 1.1. $\{G^D(x, y)\}$ は D について単調増加で, $G(x, y) = \lim_{D \uparrow R} G^D(x, y)$ は, y を固定すれば x について $R-K_0-\{y\}$ で $AG=0$ を満たし, x を固定すれば y について $R-K_0-\{x\}$ で $A^*G=0$ を満たす.

補題 1.2. $\{N^D(x, y)\}$ は $\overline{(R-K_0)} \times \overline{(R-K_0)} (x \neq y)$ の任意のコンパクト部分領域で一様有界かつ同等連続である.

補題 1.3. $\{u^D\}$ は $\overline{R-K_0}$ の任意のコンパクト部分領域で一様有界かつ同等連続である.

さて, (1.3) において $\varphi_0 \equiv 1$ としたときの u^D を ω^D と書くと, $\overline{D-K_0}$ において $\omega^D > 0$ となる. $p^D = \log \omega^D$ とおくと,

$$(1.4) \quad (b - \nabla p^D, \nabla \psi)_{D-K_0, \omega} = 0 \quad (\forall \psi \in P_{\omega^D}(D; K_0)).$$

以下本稿全体で次のことを仮定する;

条件 A. 次の (A.1), (A.2) が成立するような函数 $f(x)$ が存在する:

$$(A.1) \quad \int_R |b - \nabla f| d_\omega x < \infty, \quad \omega = e^f,$$

$$(A.2) \quad \lim_{D \uparrow R} \sup_{D-K_0} |p^D - f| < \infty.$$

上の (A.2) は, 次の (A.2') が成立するような領域列 $\{D_n\}$ と定数 M が存在することと同等である:

(A. 2') $K_0 \subset D_n \uparrow R$, $\sup_{D_n - K_0} |p^{D_n} - q| \leq M < \infty$.

$b = \nabla p$ と表わされるならば, 任意の $D \supset K_0$ に対して $\omega^D(x) = e^{p(x)}$ となり, $q = p$ として条件 A が成立する. 一方この条件の成立しない例もある. しかし次のことが証明できる:

補題 1.4. 条件 A の成否は K_0 のとり方には関係しない.

よって今後 K_0 を固定し, $K_0 \subset \Omega \subset R$ なる任意の領域 Ω に対して $\Omega' = \Omega - K_0$ とする. このとき補題 1.3 により $\{\omega^{D_n}\}$ ($\{D_n\}$ は (A. 2') のもの) の適当な部分列は $R' + \partial K_0$ で広義一様収束する. $\{D_n\}$ をその部分列に対するものでおきかえても (A. 2') は成立するから, 最初から $\{\omega^{D_n}\}$ が $R' + \partial K_0$ で広義一様収束するとしてよい. よって $\lim \omega^{D_n} = \omega$, $p = \log \omega$ とおくとき, $\lim p^{D_n} = p$ (広義一様収束) である. このとき (A. 1), (A. 2') および (1.4) から

$$(1.5) \quad b - \nabla p \in L^2_\omega(R'),$$

$$(1.6) \quad (b - \nabla p, \nabla \psi)_{R, \omega} = 0 \quad (\forall \psi \in P_\omega(R; K_0))$$

が示され, また一般に次のことが証明される:

補題 1.5. (1.5), (1.6) を満たすような函数 $\{p, \omega\}$ ($p = \log \omega$) は一意的である.

だから, 今後の議論は (A. 1), (A. 2') を満たす函数 $q(x)$, 領域列 $\{D_n\}$ のとり方には関係しない.

よって以後この $\{p, \omega\}$ を固定して話を進める.

§ 2. Dirichlet 原理の類似

任意の領域 $\Omega \supset K_0$ と, 任意の正則なコンパクト集合 $K \subset \Omega'$ および任意の $\varphi \in C(\partial K)$ に対して, $\overline{\Omega' - K}$ で連続かつその内部で滑らかで, $\psi|_{\partial K_0} = 0$, $\psi|_{\partial K} = \varphi$, $\|\nabla \psi\|_{\Omega' - K, \omega} < \infty$ なる ψ の全体を $\mathcal{D}_K^{\varphi}(\Omega)$ と書くことにする. このとき,

補題 2.1. $\Phi \in L_{\omega}^2(\Omega' - K)$, $\psi \in \mathcal{D}_K^{\varphi}(\Omega)$ に対して次の i),

ii) は同等であり, Φ を与えればこのような ψ は高々一つ定まる:

$$i) \quad \|\Phi - \nabla \psi\|_{\Omega' - K, \omega} \leq \|\Phi - \nabla \psi'\|_{\Omega' - K, \omega} \quad (\forall \psi' \in \mathcal{D}_K^{\varphi}(\Omega)),$$

$$ii) \quad (\Phi - \nabla \psi, \nabla w)_{\Omega' - K, \omega} = 0 \quad (\forall w \in \mathcal{D}_K^0(\Omega)).$$

$\Phi \in L_{\omega}^2(\Omega' - K)$ に対してこのような ψ が存在するとき, $P_{\Omega}^{\varphi}(\Phi) = \nabla \psi$ によって写像 P_{Ω}^{φ} を定義する. $\psi \in \mathcal{D}_K^{\varphi}(\Omega)$ ならば $P_{\Omega}^{\varphi}(\nabla \psi) = \nabla \psi$ である. $\varphi \neq 0$ ならば P_{Ω}^{φ} は線型写像ではない.

Ω としてコンパクトな閉包をもつ正則な領域 D をとり, $\varphi \in C^1(\partial K)$ とすると, $\mathcal{D}_K^{\varphi}(D)$ の中で $\|\nabla \psi\|_{D' - K, \omega}$ を最小にする ψ が必ずただ一つ存在し, それは境界値問題

$$(2.1) \quad \Delta_{\omega} \psi = 0, \quad \psi|_{\partial K_0} = 0, \quad \psi|_{\partial K} = \varphi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0$$

(但し $\Delta_{\omega} \psi = \frac{1}{\omega} \operatorname{div}(\omega \nabla \psi)$) の解である. それを ψ_D^{φ} と書くと,

$\psi^{\varphi} = \lim_{D \uparrow R} \psi_D^{\varphi}$ ($\overline{R' - K}$ で広義一様) が存在し, ψ^{φ} は $\mathcal{D}_K^{\varphi}(\Omega)$ の中で $\|\nabla \psi\|_{R' - K, \omega}$ を最小にするただ一つの函数である. 境界値問題

$$(2.2) \quad A^* u = 0, \quad u|_{\partial K_0} = 0, \quad u|_{\partial K} = \varphi, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \beta u \right) \Big|_{\partial D} = 0$$

の解の存在と一意性から,

補題 2.2. $P_D^\varphi[\nabla \frac{u^D}{\omega^D} - (b - \nabla p) \frac{u^D}{\omega^D}] = \nabla \psi^\varphi$, $u^D|_{\partial K_0} = 0$, $u^D|_{\partial K} = \varphi$ なる u^D が, $\varphi \in C^1(\partial K)$ に対してただ一つ存在する.

$\{D_n\}$ を §1 に述べた領域の列とすると, 補題 1.3 (但し K_0 を $K_0 + K$ で置きかえる) により, $\{u^{D_n}\}$ の部分列が $\overline{R - K_0 - K}$ で広義一様収束し, 極限函数 u は次の定理の性質をもつ.

定理 2.1. $\varphi \in C^1(\partial K)$ ならば

$P_{R'}^\varphi[\nabla \frac{u}{\omega} - (b - \nabla p) \frac{u}{\omega}] = \nabla \psi^\varphi$, $\|\nabla \frac{u}{\omega}\|_{R'-K, \omega} < \infty$, $\sup_{R'-K} |\frac{u}{\omega}| < \infty$ なる u が存在してただ一つである. さらにその u は, $R'-K$ において $A^*u = 0$, $\sup_{R'-K} |\frac{u}{\omega}| \leq \max_{\partial K} |\frac{\varphi}{\omega}|$ を満たし, 任意の $\psi \in P_\omega(R; K + K_0)$ に対して $(\nabla \frac{u}{\omega} - [b - \nabla p] \frac{u}{\omega}, \nabla \psi)_{R'-K, \omega} = 0$ となる.

この u を φ_K と書くことにすると, 任意の $y \in R'-K + \partial K$ に対して, 写像 $\frac{\varphi}{\omega} \rightarrow \frac{\varphi_K(y)}{\omega(y)}$ は $C(\partial K)$ 上の正值有界線型汎函数に拡張されるから, ∂K 上の測度 μ_K^y で, $\mu_K^y(\partial K) \leq 1$ であり

$$(2.3) \quad \varphi_K(y) = \omega(y) \int_{\partial K} \frac{\varphi(x)}{\omega(x)} d\mu_K^y(x)$$

となるものが存在する. この式により, $\varphi_K(y)$ が ∂K の上の μ_K^y -可積分函数 φ にまで拡張される. このとき,

定理 2.2. φ が ∂K で下半連続ならば, $R'-K$ の各連結成分において, $\varphi_K \equiv \infty$ でないかぎり, $A^*\varphi_K = 0$ が成立する.

今後 R' 上の下半連続函数 u と任意の正則なコンパクト集合 K に対して, $\varphi = u|_{\partial K}$ として, u_K を次のように定義しておく:

$$(2.4) \quad u_K(x) = u(x) \quad (x \in K), \quad = \varphi_K(x) \quad (x \in R'-K + \partial K_0).$$

§3. 核函数 $N(x, y)$ の構成

函数 $G(x, y)$ (§1) の x を固定し, y の函数として (2.4) で定義した $G(x, \cdot)_K$ を $G_K(x, y)$ と書くことにすると,

$$(3.1) \quad R' \supset K_1 \supset K_2 \ni x \text{ ならば } G_{K_1}(x, y) \leq G_{K_2}(x, y),$$

$$(3.2) \quad x \in D'_n \text{ ならば } \sup_{x \in K \subset D'_n} \int_{D'_n} G_K(x, y) dy < \infty$$

なることが示されたので, $y \neq x$ なるかぎり

$$(3.3) \quad N(x, y) = \sup_{K \ni x} G_K(x, y) = \lim_{K \downarrow x} G_K(x, y)$$

が定義され, これは y について $R' - \{x\}$ で $A^*N = 0$ となる.

一方補題 1.3 により $\{N^{D_n}(x, y)\}$ の適当な部分列は, ある函数 $N^R(x, y)$ に $\overline{R'} \times \overline{R'} (x \neq y)$ で広義一様に収束するが, このとき $N^R(x, y) = N(x, y)$ なることが示されたので,

$$(3.4) \quad N(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} N^{D_n}(x, y) \quad (\text{部分列をとるずに})$$

となる. $N(x, y)$ の一意性は (3.3) の構成法から得られ, その解析的性質は (3.4) から得やすい. 例えば, y を固定すれば, x について $R' - \{y\}$ で $AN = 0$ を満たす. また

$$\text{補題 3.1. } f \in C_0^2(R') \text{ ならば } \int_{R'} N(x, y) \cdot Af(y) dy = -f(x).$$

R' 上の測度 μ のポテンシャル μN を $\mu N(y) = \int_{R'} N(x, y) d\mu(x)$ で定義すると, 上の補題を使って以下のことが示された:

補題 3.2. $\mu N \neq \infty$ ならば, μN は優調和函数である.

補題 3.3. v が R' の部分領域 Ω で優調和ならば, Ω 上の測度 μ と調和函数 h とが存在して $v = \mu N + h$ (Riesz 分解).

§4. 理想境界の構成

R の一点コンパクト化の位相を与える一つの距離を p_0 とする. $x \in K_0$, $y \in R'$ ならば $N(x, y) = 0$ と定義しておき,

$$p_1(x, x') = \int_{D_1} \frac{|N(x, y) - N(x', y)|}{1 + |N(x, y) - N(x', y)|} dy \quad (x, x' \in R)$$

と定義して $p(x, x') = p_0(x, x') + p_1(x, x')$ とおくと, p は R における距離になり, R の本来の位相と同じ位相を与える.

また, R は p について全有界なことが示される. R の p に関する完備化を $\hat{R}$ とし, $\hat{S} = \hat{R} - R$ とおくと,

定理 4.1. $\hat{R}$ は p についてコンパクトで, $\hat{S}$ はその中で内点をもたない閉集合, R は $\hat{R}$ の中へ同相に埋蔵されている.

定理 4.2. $N(x, y)$ は $\hat{R} \times (R' + \partial K_0) - \{(z, z); z \in R' + \partial K_0\}$ の上の連続函数に一意的に拡張され, $x \in \hat{R}$ を固定するとき, $N(x, y)$ は y について $R' - \{x\}$ で $A^*N = 0$ を満たす. $\xi, \eta \in \hat{S}$ であって $N(\xi, y) = N(\eta, y)$ ($\forall y \in R'$) ならば $\xi = \eta$ である.

定理 4.3. $\hat{R}$ は K_0, p_0, D_1 に無関係 (一様同相) である.

定義. $\hat{S}$ を A^* に関する R の N型理想境界 と呼ぶ.

前に定義したポテンシャル μN を, μ が $R' + \hat{S}$ の上の測度の場合に拡張できる (定理 4.2 により). このとき

定理 4.4. 任意の正則なコンパクト領域 $K \subset R'$ に対して $(\mu N)_K \leq \mu N$ となる; μ の台 $\subset K^\circ$ ならば等号が成立する.

§5. FH函数とFSH函数

下記の定義では, v は R' において下半連続, ≥ 0 , $\neq \infty$ とする. v に対して v_K を §2 の最後に述べたとおりとする.

定義. i) 任意の正則なコンパクト領域 $K \subset R'$ に対して R' で $v_K \leq v$ となるとき, v を FSH函数 または full superharmonic function (全優調和函数) という; さらに v が R' で調和のとき FH函数 または full harmonic function (全調和函数) という.

ii) v が FSH函数であって, $K_m \downarrow K_0$ な正則なコンパクト集合の任意の列 $\{K_m\}$ に対して R' 上で $\lim_{m \rightarrow \infty} v_{K_m}(x) = 0$ となるとき, v を FSH₀函数 という; さらに v が R' で調和のとき FH₀函数 という.

注意. FH₀函数 v は $v|_{\partial K_0} = 0$ なることが示されるが, FSH₀函数 v では $v|_{\partial K_0} = 0$ とならない例がある.

補題 5.1. FSH函数は優調和である.

補題 5.2. $R' + \hat{S}$ 上の任意の測度 μ に対して, μN は FSH₀函数である.

定理 5.1. 任意の FSH函数 v と任意の正則なコンパクト集合 $K \subset R'$ に対して, μ が K に含まれる測度 μ が存在して, $v_K = \mu N$ と表わされる.

定理 5.2. 任意の FSH函数は, FH函数と R' 上の測度 μ のポテンシャル μN との和として表わされる.

R' の中の任意の開集合 Ω に対して, Ω に含まれる正則なコンパクト集合の全体を $\mathcal{R}_\Omega$ と書くことにし, 任意の FSH 函数 v に対して $v_\Omega(x) = \sup_{K \in \mathcal{R}_\Omega} v_K(x)$ と定義すると,

補題 5.3. $\{K_m\} \subset \mathcal{R}_\Omega$, $K_m \subset (K_{m+1})^\circ$, $K_m \uparrow \Omega$ ならば, R' において $v_{K_m}(x) \uparrow v_\Omega(x) \leq v(x)$ となる. 従って v_Ω は FSH 函数であり, 特に $\overline{\Omega} \cap K_0 = \emptyset$ ならば v_Ω は FSH_0 函数である. また $(u+v)_\Omega = u_\Omega + v_\Omega$ が成立する.

さて (2.4) における φ_k が境界値問題 (2.2) の解 u^D の極限として得られる (定理 2.1 の '一意性') から, $K_1 \subset (K_2)^\circ$ ならば, 任意の FSH 函数 v に対して $(v_{K_1})_{K_2} = v_{K_2}$ となる. この事実と補題 5.3 により,

定理 5.3. $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ならば $(v_{\Omega_1})_{\Omega_2} = v_{\Omega_1}$.

今後集合 $E \subset \hat{R}$ の $\hat{R}$ における閉包を E^a と書く (集合 $E \subset R$ の R における閉包は今までどおり $\bar{E}$ と書く).

$\hat{S}$ の閉部分集合 Γ に対して, R' の中の正則な開集合 Ω で $\Omega^a \supset \Gamma$ なるものの全体を $\mathcal{U}_\Gamma$ と書くことにし, 任意の FSH 函数 v に対して $v_\Gamma(x) = \inf_{\Omega \in \mathcal{U}_\Gamma} v_\Omega(x)$ と定義すると,

補題 5.4. $\{\Omega_m\} \subset \mathcal{U}_\Gamma$, $\Omega_m \supset \overline{\Omega_{m+1}}$, $\Omega_m^a \downarrow \Gamma$ ならば, R' において $v_{\Omega_m}(x) \downarrow v_\Gamma(x)$ となる. $v_\Gamma(x)$ は FH_0 函数であり, また $(u+v)_\Gamma = u_\Gamma + v_\Gamma$ が成立する.

定理 5.4. v が FH_0 函数ならば $v_{\hat{S}} \equiv v$ となる.

§6. FH_0 函数と FSH_0 函数の積分表示

定理 6.1. 任意の FSH_0 函数 (または FH_0 函数) は, $R' + \hat{S}$ の上 (または $\hat{S}$ の上) の測度 μ のポテンシャル μN で表わされる; 逆も成立する.

Riesz 分解 (補題 3.3) により, この定理は, v が FH_0 函数の場合を証明すればよい. その場合, D'_n で $v = v_{\partial D_n} = \mu_n N$ となる ∂D_n 上の測度 μ_n (定理 5.1) をとれば, $\sup_n \mu_n(\partial D_n) < \infty$ が示されて $\{\mu_n\}$ のある部分列が $\hat{S}$ 上の測度 μ に漠収束し, R' で $v = \mu N$ なることが示される. 逆は定理 4.4 を使う.

補題 6.1. v を FSH 函数とし, Ω を $\bar{\Omega} \cap K_0 = \emptyset$ なる開集合とすると, 台が Ω^a に含まれる測度 μ が存在して, R' において $v_\Omega = \mu N$ が成立する.

補題 6.2. v が FSH 函数, μ が $R' + \hat{S}$ の上の測度, Ω が R' の中の開集合ならば, $(\mu N)_\Omega = \mu N_\Omega$ である.

これらの補題により次の定理が証明される; 特に v が FH_0 函数で $\Gamma = \hat{S}$ ならば, 定理 5.4 により, v の積分表示を得る.

定理 6.2. v が FSH 函数, Γ が $\hat{S}$ の閉部分集合とすると, 台が Γ に含まれる測度 μ が存在して $v_\Gamma(y) = \int_\Gamma N(\xi, y) d\mu(\xi)$, $\mu(\Gamma) = \int_{\partial K_0} \frac{\partial v_\Gamma}{\partial n} dS$ が成立する.

定理 6.3. v, μ を補題 6.2 のとおりとし, Γ を前定理のとおりとすると, $(\mu N)_\Gamma = \mu N_\Gamma$ が成立する.

§ 7. 理想境界点の分類, 標準表現, 極値的函数.

v を FSH 函数とし, $\|\nabla \frac{v}{\omega}\|_{R', \omega} < \infty$, $\sup_{R'} \left| \frac{v}{\omega} \right| < \infty$ なるものとする. このような v に対して, 以下の補題 7.1—7.3 が順次証明される (K, Ω, Γ の意味は前 § までの慣用とおる):

補題 7.1. $K \uparrow \Omega$ のとき $\left\| \nabla \frac{v_K - v_\Omega}{\omega} \right\|_{R', \omega} \rightarrow 0$ であって,

$$\left\| \nabla \frac{v_\Omega}{\omega} \right\|_{R', \omega} \leq 2 \left\| \nabla \frac{v}{\omega} \right\|_{R', \omega} + \left\| [b - \nabla p] \frac{v}{\omega} \right\|_{R', \omega} \quad (\text{右辺は } \Omega \text{ に無関係}).$$

補題 7.2. $\Omega^a \downarrow \Gamma$ のとき $\left\| \nabla \frac{v_\Omega - v_\Gamma}{\omega} \right\|_{R', \omega} \rightarrow 0$.

補題 7.3. $(v_\Gamma)_\Gamma = v_\Gamma$; 特に $(\omega_\Gamma)_\Gamma = \omega_\Gamma$.

定理 7.1. v を FH 函数とし, $\Gamma \in \hat{S}$ の閉部分集合で $\omega_\Gamma \equiv 0$ なるものとするとき, $(v_\Gamma)_\Gamma = v_\Gamma$ となる.

この証明には, まず $\Omega \supset \Omega_1 \supset \Omega_2$, $\Omega_2^a \supset \Gamma$, $K \subset \Omega - \bar{\Omega}_2$ なるとき, $M = \max_{\partial K} v$, $m = \min_{\partial K} \omega$ とおくと, $R' - K - \Omega_2$ で

$$(v_{\Omega_1} - v_{\Omega_2})_K \leq v_{\Omega_1} - v_{\Omega_2} + \frac{M}{m} \omega_{\Omega_2}$$

となることを示し, $\Omega_2^a \downarrow \Gamma$ としてから $K \uparrow \Omega$ とすると, $\omega_\Gamma \equiv 0$ によって $(v_{\Omega_1} - v_\Gamma)_\Omega \leq v_{\Omega_1} - v_\Gamma$ となる. これに定理 5.3 を適用すると $(v_\Gamma)_\Omega \geq v_\Gamma$ となるから, $\Omega^a \downarrow \Gamma$ として $(v_\Gamma)_\Gamma \geq v_\Gamma$ を得る. 一方 $(v_\Gamma)_\Gamma \leq v_\Gamma$ だから, 定理の等式を得る.

y の函数としての $N_K(\xi, y)$ ($\xi \in \hat{S}$ を固定) から, § 5 に述べたように順次 $N_\Omega(\xi, y)$, $N_\Gamma(\xi, y)$ を定義する. $\Gamma = \{\xi\}$ の場合に定理 6.2 を適用すると, $\hat{S}$ の上の函数 $\alpha(\xi)$ で

$$(7.1) \quad N_{\{\xi\}}(\xi, y) = \alpha(\xi) N(\xi, y), \quad \alpha(\xi) = \int_{\partial K_0} \frac{\partial N_{\{\xi\}}(\xi, y)}{\partial n_y} dS_y$$

なるものが定まるが、実は、前記各補題と定理とを使って、次のことが示される：

定理 7.2. $\hat{S}$ 上で $\alpha(\xi) = 0$ または 1 であり、それによって $N_{\{\xi\}}(\xi, y) = 0$ または $N_{\{\xi\}}(\xi, y) = N(\xi, y)$ となる。

そこで $\hat{S}_0 = \{\xi \in \hat{S}; \alpha(\xi) = 0\}$, $\hat{S}_1 = \{\xi \in \hat{S}, \alpha(\xi) = 1\}$ とおくと、 $\hat{S}_0$ は F_0 集合であることが示され、また

定理 7.3. v が FSH 函数ならば、 $\hat{S}_0$ の任意の閉部分集合 Γ に対して $v_\Gamma \equiv 0$ である。

よって、 $\hat{S}_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ (Γ_n は閉集合) とし、 $\hat{S}$ の任意の閉部分集合 Γ に対する定理 6.2 の測度を μ とすると、定理 7.3 を使って $\mu(\Gamma_n) = 0$ が示される。だから、

定理 7.4. v が FSH 函数で、 Γ が $\hat{S}$ の閉部分集合ならば、 v_Γ は $\int_{\Gamma \cap \hat{S}_1} N d\mu$ の形に表わされる。特に任意の FH_0 函数は $\int_{\hat{S}_1} N d\mu$ の形に表わされる。

定義 i) $\hat{S}$ 上の測度 μ で $\mu(\hat{S}_0) = 0$ なるものを 標準測度 といひ、標準測度による $\int_{\hat{S}_1} N d\mu$ の形の表現を 標準表現 といふ。

ii) u が FH_0 函数であって、 v と $u-v$ とがともに FH_0 函数になるのは $v = cu$ (c は定数 ≥ 0) の場合にかぎるとき、 u は 極値的 (extremal) であるといふ

次の定理は極値的 FH_0 函数を特徴づけ、同時に $\hat{S}_1$ の意味を明らかにする:

定理 7.5. i) u を極値的 FH_0 函数, Γ を $\hat{S}$ の閉部分集合とする. $u_p > 0$ であって $u - u_p$ が FH_0 函数ならば,

$$(7.2) \quad u(y) = c N(\xi_0, y) \quad \text{ここに} \quad c = \int_{\partial K_0} \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

となるような点 $\xi_0 \in \Gamma \cap \hat{S}_1$ が一意的に定まる.

ii) 任意の極値的 FH_0 函数は, それによって一意的に定まる点 $\xi \in \hat{S}_1$ に対して $N(\xi, \cdot)$ の正の定数倍である.

iii) $N(\xi, y)$ は $\xi \in \hat{S}_1$ のとき, そのときにかぎり, y の極値的 FH_0 函数である.

この定理の i) の証明は, u を定理 7.4 の形に表現すると, u が極値的なことから μ の台が一点 $\xi_0 \in \Gamma \cap \hat{S}_1$ になり, 定理 6.2 によって c の値の式が得られる. ξ_0 の一意性は, 定理 4.2 の最後の部分からわかる. i) で $\Gamma = \hat{S}$ とおけば, 定理 5.4 によって ii) を得る. iii) の証: $\xi \in \hat{S}_1$ のとき $N(\xi, \cdot) = u + v$ (u, v は FH_0 函数) とすると, 定理 7.2 により $u_{\{\xi\}} + v_{\{\xi\}} = N_{\{\xi\}} = N = u + v$; 従って $v = v_{\{\xi\}} = c N(\xi, \cdot)$ となる. 逆は $N(\xi, \cdot)$ に ii) を適用すればよい. 最後に,

定理 7.6. 任意の FH_0 函数の標準表現は一意的である. 従って, 任意の FH_0 函数 u と, $\hat{S}$ の任意の閉部分集合 Γ に対して, v_p に対する標準測度の台は Γ に含まれる.

§ 8. 滑らかな境界を理想境界に埋め込むこと

R が可微分多様体 M の部分領域で, M における R の境界 ∂R の一部 S が滑らかな超曲面であるとし, a^j, b が M における S の近傍にまで滑らかに拡張されるとする. このとき,

定理 8.1. $S \ni x \longleftrightarrow \xi_x \in \hat{S}$ なる一対一の対応が存在して, 写像 $\phi(x) = x (x \in R), = \xi_x (x \in S)$ は $R + S (\subset M)$ から $R + \{\xi_x; x \in S\} (\subset \hat{R})$ の上への同相写像を与えた.

定理 8.2. $x \in S$ ならば, $N(x, y)$ は y の函数として, 極値的 FH_0 函数である.

証明は Martin 境界の場合 [4] と同様な考え方による.

文 献 (本文中で直接引用したもののみ)

- [1] Z. Kuramochi: Mass distributions on the ideal boundary of abstract Riemann surfaces-II, Osaka Math. J., 8(1956), 145-186.
- [2] M. Ohtsuka: An elementary introduction of Kuramochi boundary, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I, 28(1964), 271-299.
- [3] T. Shiga-T. Watanabe: On Markov chains similar to the reflecting barrier Brownian motion, to appear in Osaka J. Math.
- [4] S. Itô: Martin boundary for linear elliptic differential operators of second order in a manifold, J. Math. Soc. Japan, 16(1964), 307-334.
- [5] ———: Riemann 空間の倉持境界, 数理研講究録 26 (倉持境界と解析学) (1967), 46-74.