

## アダマール行列を群から作る

名城大理工 伊藤 昇 ( Noboru Ito )

こんなことが出来たらいいなと思って付けた夢のようなタイトルです。位数  $2n$  の群から位数  $n$  のアダマール行列を作ろうとするのですが、その様な群はある条件を満足しないとなりません。群  $G$  がその条件を満足するときアダマール群と呼ぶ。  $G$  がアダマール群とは、  $G$  が  $n$ -部分集合  $D$  と元  $e^*$  づきの 2 条件を満足するものをふくむことです。

(1)  $D \cap De^* = \emptyset$ ,  $e, e^*$  と異なる  $G$  の任意の元  $a$  について  $|D \cap Da| = n/2$ ,

(2)  $G$  の任意の 2 元  $a, b$  について  $|Da \cap \{b, be^*\}| = 1$ 。

命題 1.  $e^*$  は  $G$  の中心にふくまれ、位数 2 を持つ。

このときアダマール行列はつぎの様に作ります。  $G$  を  $e^*$ -対にわけ、任意に番号付ける:  $\{a_1, a_1e^*\}, \dots, \{a_n, a_ne^*\}$ 。各  $e^*$ -対からひとつの元  $b_i$  を任意にえらび、

$D e_1, \dots, D e_n$  を作る。各  $D e_j$  は第  $j$   $e^*$ -対の元  $c_{ij}$  をひとつだけふくむ ( $j = 1, \dots, n$ )。そこで  $G$  の元を成分とする位数  $n$  の行列  $(c_{ij})$  を作る。そして  $c_{ij} = a_j$  のとき  $1$ ,  $c_{ij} = a_j e^*$  のとき  $-1$  とおくと、位数  $n$  の  $(-1, 1)$  行列  $H$  が得られる。 $H$  が  $G$  から作られるアダマール行列である。

位数の小さなものについては、比較的容易です。

例 1.  $G = C_4 = \langle a \rangle$ , 位数 4 の巡回群 では,  $e^* = a^2$ ,  $D = \{e, a e^*\}$  とおくとよい。±で ±1 を示すことにすると,  $H = \begin{pmatrix} + & - \\ + & + \end{pmatrix}$  のよう  $e$   $e^*$ -対を番号付けられる。

例 2.  $G = C_4 \times C_2 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$  では,  $e^* = b$ ,  $D = \{e, a e^*, a^2, a^3\}$  とおけます ( $e^* = a^2$  というふうなえりび方も出来る。そのとき  $D$  は同じであります。)

$H = \begin{pmatrix} + & - & + & + \\ + & + & - & + \\ + & + & + & - \\ - & + & + & + \end{pmatrix}$  と巡回型アダマール行列が得られるように

$e^*$ -対が番号付けられる。一般に下記のことが成立する。

命題 2.  $E$  が群  $H$  にふくまれるアダマール差集合なら,  $G = H \times \langle e^* \rangle$  を作り,  $D = E \cup (H - E) e^*$  とおくことにより, アダマール群  $G$  が得られる。逆に, アダマール群  $G$  について,  $G = H \times \langle e^* \rangle$  とまつていると,  $E = D \cap H$

は  $H$  に含まれる アダマール差集合である。

尚、アダマール差集合とは  $(\psi, \ell, \lambda)$  差集合で、 $\psi = 4(\ell - \lambda)$  となるものです。例2では  $\{e, a^2, a^3\}$  が  $C_4$  に含まれるアダマール差集合です。アダマール差集合については最近もいろいろ面白い結果が得られています、私達の考えていることの特別の場合であるというのは、過言でしょう。

例3.  $G = Q$ , 四元数群,  $a^4 = b^4 = e$ ,  $b^{-1}ab = a^{-1}$ ,  $a^2 = b^2$  では,  $e^* = a^2$  は自明ですが,  $D = \{e^*, a, b, ab\}$  と述べられます。このとき  $H = \begin{pmatrix} - & + & + & + \\ - & - & + & - \\ - & - & - & + \\ - & + & - & - \end{pmatrix}$

と所謂 *Abew* になるように  $e^*$ -対が番号付けられる。

命題3.  $G$  がアダマール群で,  $H$  が *Abew* になるように  $e^*$ -対が番号付けられると,  $e^*$  は  $D$  の唯一の位数2の元となる。したがって  $|G| \geq 8$  のとき,  $G$  のシロー2-群は一般四元数群である。

これは魅力的であるが,  $n = 4m$  とおくとき, すべての  $m$  について  $G$  が存在するというわけにはいかないようである。

命題3 はまたアダマール群のシロー2-群にはなんらかの制限があることを示唆するが実際つぎのことが成立する。

命題4. 位数  $\geq 8$  の巡回群, 二面体群はアダマール群のシ

0-2-群にならない。

さらに表現論を使うとつぎの結果が得られる。

命題5.  $R$  を  $G$  の既約表現で、単位表現でないものとする。  
 $e^*$  が  $R$  の核に入る  $\chi$  が入る  $\chi$  により、 $R(D^{-1}D) = 0$  となる  $I$  ( $I$  は単位行列) になる。 $n$ -部分集合  $D$  と中心にふくまれる位数2の元  $e^*$  について、これが成立つと  $G$  はアダマール群になる。

また既知のアダマール群から、直積のようなやり方でアダマール群の無限系列を作ることも出来る。さらに平方剰余型とパイリ-型と  $\chi$  のアダマール行列にたいしては、それらを作るアダマール群を作ることも出来るが、群論的とは言えそうもない。

何時かタイトルが夢ごなくまる時が来ることを願っている。

## 文献

N. Ito, On Hadamard groups. I, II  
 to appear in Journal of Algebra

Note on Hadamard groups of quadratic residue type  
 to appear in Hokkaido Math. Journal

Note on Hadamard groups and difference sets