

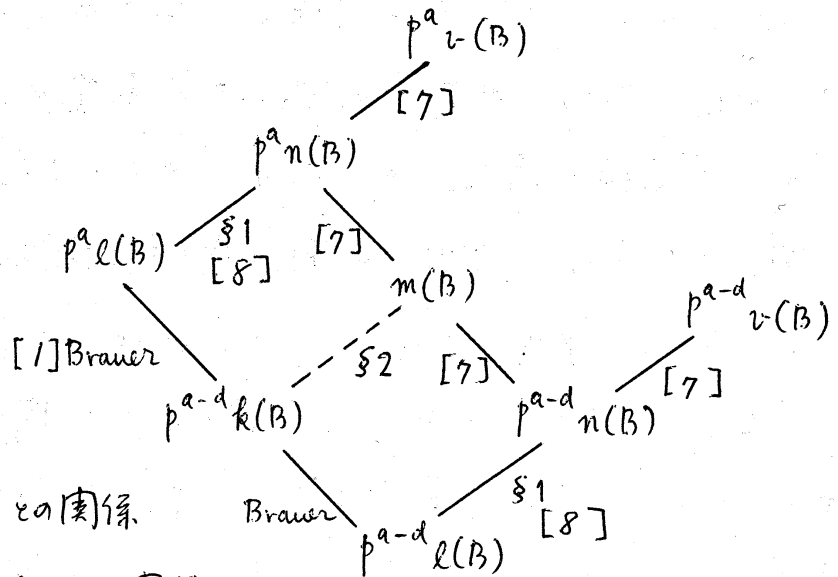
On the number of irreducible characters in a finite group

東京農工大 和田 俱幸 (Tomoyuki Wada)

F を標数 p の代数的閉体, G を有限群, $P \in G$ の Sylow p -部分群, $|P| = p^a$ とする。群環 FG を $G \times G$ -加群とみることにより、 G の p -block B を FG の直既約 $F(G \times G)$ -部分加群と考える。 $n(B)$, $m(B)$ をそれぞれ $B_{p \times p}$, $B_{\Delta(p)}$ の直既約因子の数とする。 (但し $\Delta(p) = \{(x, x) \in P \times P \mid x \in P\}$)。 $k(B) := |\mathcal{I}_n(B)|$, $l(B) := |\mathcal{I}_m(B)|$ とする。 [7] で著者は、 $n(B)$, $m(B)$ という B に付随する二つの不変量を導入して、 $l(B)$, $k(B)$, $n(B)$, $m(B)$ の四つの不変量の間に成り立つ、いくつかの関係を得た。その結果、 $n(B)$ と $m(B)$ との間に成り立つ関係は、 $l(B)$ と $k(B)$ との間に成り立つ関係に非常に類似している、という事がわかった。ここではその後得た、 $l(B)$ と $n(B)$ 及び $k(B)$ と $m(B)$ との間に成り立つ関係について詳しく述べる。このような事を考えるに到った動機は、 G の指標の様子と、 G (或いは G の中心の defect group) の構造との間の関係

を詳しく知りたい為である。そこで、 G の指標と G の構造の
 中間の媒介として、 G 自身の部分集合である (P, P) -double cosets
 や P -conjugate classes が実際どれだけ役に立つのか調べている
 段階である。これらは確かに G の構造に直接影響を及ぼすが、
 指標との関係を直接言う事は極めて難しい。とにかく、 $l(B)$,
 $k(B)$ と類似した関係をもつという事実は大きな前進であると思
 われる。但し、困難な点は Brauer のいくつかの予想は defect
 group の元の fusion に無関係であるのに対し、 (P, P) -double
 coset や P -conjugate classes は、 p -element の fusion に大きく
 依存するという点である。

我々のここでの結果を次のような図で表す。 $B \in G$ の
 p -block, $D \in B$ の defect group, $|D| = p^d$ とする。 $v(B)$ は次の
 ような p' -数である。 $\dim B = p^{2a-d} v(B)$ 。



以下、 $l(B)$ と $n(B)$ との関係

を §1 で、 $k(B)$ と $m(B)$ との関係を §2 で述べる。

§ 1. $l(B)$ と $n(B)$ の関係

定理 1. G の block B に対し $l(B) \leq n(B)$ が成り立つ.

特に $l(G) \leq |P \backslash G / P|$ ($= G$ の (P, P) -double cosets の数).

定理 2. $e \in B$ に対応する FG の block idempotent, $F_P e$ は trivial FP -module とするとき, 次は同値.

- (1) $l(B) = n(B)$
- (2) $F_P^G e$ は 完全可約 かつ multiplicity-free
- (3) $\dim U = |P|$ for all projective indecomposable FG -mod. U in B . 更に $\dim L = a$ のとき.
- (4) $\dim L = a$ power of p for all irreducible FG -mod. L in B .

定理 1, 2 の証明. 1 については著者自身の方法があったが, その方法で 2. をうまく証明できなかった. ここでは奥山氏に教えて頂いた方法を紹介する。(尚, 著者自身の元の方法については [8] を参照されたい。)

1. $n(B) = \dim \operatorname{Hom}_{FG}(F_P^G e, F_P^G e)$ は Mackey 分解よりわかる。次に, $f: F_P^G e \xrightarrow{\text{nat.}} F_P^G e / \operatorname{rad}(F_P^G e) \longrightarrow \operatorname{soc}(F_P^G e) \xrightarrow{\text{inc.}} F_P^G e$ という FG -homo. 全体を考えると, これは $\operatorname{Hom}_{FG}(F_P^G e, F_P^G e)$ の subspace (実は ideal) となり, $F_P^G e / \operatorname{rad}(F_P^G e)$ 及び $\operatorname{soc}(F_P^G e)$

か、 B に含まれる $\mathcal{O}$ の irreducible FG -mod. を含む事より

$$\begin{aligned} l(B) &\leq \dim \operatorname{Hom}_{FG} (F_p^G e / \operatorname{rad}(F_p^G e), \operatorname{soc}(F_p^G e)) \\ &\leq \dim \operatorname{Hom}_{FG} (F_p^G e, F_p^G e) = n(B). \end{aligned}$$

2. 上で $l(B) = n(B) \iff$ ① $F_p^G e / \operatorname{rad}(F_p^G e)$ は $\operatorname{soc}(F_p^G e)$

が multiplicity-free かつ ② 恒等写像 $1_{F_p^G e} \in$ 先の ideal

$\iff F_p^G e$ は完全可約 かつ multiplicity-free. これを (1) $\iff$ (2) かつ

言えた。 (2) $\Rightarrow$ (3). $F_p^G e \cong L_1 \oplus \cdots \oplus L_{l(B)}$ より, Nakayama's relation

から $U_p \cong FP$ for all U in B . (3) $\Rightarrow$ (2). $U_p \cong FP$ であるから

$F_p^G e$ は各 L に唯一個だけ組成因子として含む。所が $F_p^G e / \operatorname{rad}(F_p^G e)$

は少なくとも各 L に 1 個は含むから $F_p^G e$ は完全可約 かつ

multiplicity-free. (4). $F_p^G e \cong L_1 \oplus \cdots \oplus L_{l(B)}$ より Frobenius の

相互律で各 L_p は直既約 かつ Mackey 分解より

$$L_p \mid F_p^G p \cong \bigoplus_x (F_{p^x \cap p})^p. \quad \text{故に } \exists x \text{ かつ } L_p \cong (F_{p^x \cap p})^p. \quad \text{特に } \dim L = |p : p \cap p^x|.$$

注意. 定理 2 は次の二つの点で興味深い。一つは、(2)

が Motose-Ninomiya [5], Knörr [3] 等のいっている p -radical group にほつている (multiplicity-free は更に強い状態)。二つめは

(4) の証明で、 $\mathcal{O}$ の既約加群の vertex が Sylow-intersection にほつている事である。Okuyama [6] により p -solvable group では $\mathcal{O}$ の既約加群の vertex は Sylow intersection とほつる。

又. $l(B) = n(B)$ のときには. $(\chi_p, 1_p) = 1$ or 0 であり $(\chi_p, 1_p) = 1$ ならば χ は modularly irreducible となる。これから $l(B) = n(B)$ である block をもつ群は p -solvable に近い事が予想されるが、次が成り立つ。

系 1. $D = B$ a defect group s.t. $D \trianglelefteq P$ のとき $l(B) = n(B)$
 $\Rightarrow$ 次が成立. (1) $Z(D) \leq O_p(G \text{ mod } \text{Ker } B)$, 特に D は abelian
 ならば $D \cdot \text{Ker } B \trianglelefteq G$, (2) $\exists$ p -solvable subgroup $N \trianglelefteq G$ s.t. $D \in \text{Syl}_p(N)$,
 特に $D = P$ ならば G は p -solvable.

証明. (1). 各 $L_p \cong F_q^P$ であった。ここで Q は L の vertex.

Knörr [4] より $C_D(Q) \leq Q \leq D$ である defect group D である。
 特に $Z(D) \leq Q$ より. $Z(D) \trianglelefteq P$ に注意すると、 $L_{Z(D)}$ は trivial である。

$Z(D) \leq \bigcap_{L \in B} \text{Ker } L = O_p(G \text{ mod } \text{Ker } B)$ を得る。

(2). $H = O_p(G \text{ mod } \text{Ker } B)$ とする。 $\bar{G} = G/H$ であり $\bar{B} \subset B$ である defect
 group $\bar{D}$ ならば $\bar{G}$ の block を考えよう。やはり $l(\bar{B}) = n(\bar{B})$ である。
 したがって $Z(\bar{D}) \leq O_p(\bar{G} \text{ mod } \text{Ker } \bar{B})$ である (1) より得る。この操作を繰り返す事により (2) を得る。

系 2. Fong [2] より. G は p -solvable ならば次が成立。

系 2. G は p -solvable ならば. 定理 2. の (1), (2), (3), (4) は同値。

所が (4) は一般には (1), (2), (3) と同値にはならない。

例) $G = SL(2, 2^n) \ (n \geq 2)$, B : principal 2-block のとき
 $\dim L$ は $2^{n+1} - 2$ 中 2^n だけ. $\ell(B) = 2^n - 1 < n(B) = 2^{n+1} - 3$.

又、系 1 の結論は $D \trianglelefteq P$ でなければ、一般には成立しない。

例) $G = S_5$ $p=2$. $B = \{\chi_1, \chi_2\}$ $\chi_i(1)=4$, defect 1
 の block のとき, $D \trianglelefteq P$, $\ell(B) = n(B) = v(B) = 1$ だが、(1), (2)
 は共に成立しない。

更に、系 1 の (2) の主張は、 $D \trianglelefteq P$ でも G 自身が p -solvable に
 なるとは限らない。例えは、 H : simple group, 2^n degree p 中
 の defect 0 の character をもつとす。 D : abelian $\times 2$
 $G = D \times H$ と考えれば、 D の principal block と H の defect 0
 の block の直積 B の defect group は D で $D \trianglelefteq G$ から $\ell(B)$
 $= n(B) = v(B) = 1$ だが、 G は p -solvable でない。これは
 G が p -solvable のとき、 B : principal block で $\ell(B) = n(B)$ をみた
 すなら、 G はどのような構造になるであろうか。例として、
 S_4 の principal 2-block があるか。 p -length があきえられないだ
 ろうかというのが残る問題である ([8] 参照されたい)。

§2. $k(B)$ と $m(B)$ の関係.

2 ページの図で点線で書いたのは、前後関係からこの不等
 式が一般に成立するのは自然であるのだが、残念ながら一般

には成立しない。最初に、一般に成立する関係述べる。

[7] により、 $m(B) = \sum_{\chi \in \mathcal{N}(B)} (\chi_p, \chi_p)$ となる事から

i) $k(B) \leq m(B)$ が言える。又、 $p^{a-d} v(B) \leq m(B)$ から

$k(B) \leq p^d v(B)$ より、ii) $p^{a-2d} k(B) \leq m(B)$ が言える。

ここで言いたいのは iii) $p^{a-d} k(B) \leq m(B)$ であるが、次の

ような反例がある。 $G = S_5$, $p=2$, $B = \{x_1, x_2\}$, $x_i(1)=4$

B は defect 1 の 2-block で defect group D は Sylow 群の中で正規でない。このとき、 $p^{a-d} k(B) = 8$, $m(B) = 6$ である。

では、どのような時、iii) が言えるだろうか。

定理 3. D : defect group of B , $P \in \text{Syl}_p(G)$ と $D \subseteq Z(P)$ ならば
 $p^{a-d} k(B) \leq m(B)$.

定理 4. $D \subseteq Z(P)$ のとき、次は同値。

$$(1) p^{a-d} k(B) = m(B)$$

$$(2) k(B) = p^d n(B)$$

$$(3) k(B) = p^d v(B) \quad (\text{これは、} k(B) = p^d \text{ から } v(B) = 1 \text{ と同値})$$

更にこのとき、 $[G, D] \subseteq \text{Ker } B$ となる。

定理 3, 4 の証明. $m(B) = \sum_{\chi \in B} (\chi_p, \chi_p)$ より右辺を直接計算してみる。その前に、いくつかの注意を置く。

(注1.) B : block with defect group D , $\sigma = p$ -element $\in C$.
 $d_{\chi\mu}^\sigma \in$ generalized decomposition number $\in \mathbb{Z}$. このとき次は同値.
 1) $\sigma \in D$ 2) $\exists \chi \in \mathcal{I}_m(B)$ s.t. $\chi(\sigma) \neq 0$
 3) $\exists \tilde{B} : \text{block of } C_G(\sigma)$ s.t. $\tilde{B}^G = B$

(注2.) $\sum_{\chi \in \mathcal{I}_m(B)} d_{\chi\mu}^\sigma \overline{d_{\chi\nu}^\sigma} = c_{\mu\nu}^\sigma$ ($C_G(\sigma)$ の Cartan invariant)

(注3.) $\widetilde{B(\sigma)} \stackrel{\text{put}}{=} \bigoplus_{\tilde{B}_i^G = B} \tilde{B}_i$ ($\tilde{B}_i$: block of $C_G(\sigma)$) $\in \mathbb{Z}$.
 $l(\widetilde{B(\sigma)}) = \sum_{\tilde{B}_i^G = B} l(\tilde{B}_i)$ $\in \mathbb{N} < \infty$. $k(B) = \sum_{\sigma: p\text{-elem. in } D} l(\widetilde{B(\sigma)})$
 σ : p -elem. in D の G -共役の代表.

$$\S 2. \quad m(B) = \sum_{\chi} (\chi_p, \chi_p) = \frac{1}{p^a} \sum_{\chi} \sum_{\sigma \in p} |\chi(\sigma)|^2$$

$$\begin{aligned} \text{(注1) より} \quad &\geq \frac{1}{p^a} \sum_{\chi} \sum_{\sigma \in D} |\chi(\sigma)|^2 \\ &= \frac{1}{p^a} \sum_{\sigma \in D} \sum_{\chi} \sum_{\mu} d_{\chi\mu}^\sigma \varphi_\mu^\sigma(1) \sum_{\nu} \overline{d_{\chi\nu}^\sigma} \varphi_\nu^\sigma(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(注2) より} \quad &= \frac{1}{p^a} \sum_{\sigma \in D} \sum_{\mu, \nu} c_{\mu\nu}^\sigma \varphi_\mu^\sigma(1) \varphi_\nu^\sigma(1) \\ &= \frac{1}{p^a} \sum_{\sigma \in D} \dim \widetilde{B(\sigma)} \end{aligned}$$

今仮定 $D \subseteq Z(P)$ より $|C_G(\sigma)|_p = p^a$ である。故に $\dim \tilde{B}_i = p^{2a-d_i} \nu(\tilde{B}_i)$

又 $\tilde{B}_i^G = B$ より $d_i \leq d$. 又一般に $l(\tilde{B}_i) \leq \nu(\tilde{B}_i)$ である

から、続けず $\geq \frac{1}{p^a} \sum_{\sigma \in D} p^{2a-d} l(\widetilde{B(\sigma)})$

(注3) より $\geq p^{a-d} k(B)$ $\in$ 得る.

次に、等式が成立する場合を考へる。三つある不等号のうち、最初と最後をみると、これが等号になるための必要十分条件は、 $\{\sigma^G\} \cap P = \{\sigma\} \quad \forall \sigma \in D$ という事である。これは[7]の Theorem (3B) によれば、 $m(B) = p^a n(B)$ と同値である。特に $p^{a-d} k(B) = m(B)$ なら $k(B) = p^d n(B)$ を得る。2ページの図を見れば、わかるように、 $k(B) = p^d n(B)$ なら $\ell(B) = n(B)$ である。今、 $D \subseteq Z(P)$ の場合であるから、系1の(1)より $D \cdot \ker B \trianglelefteq G$ 。これは[7]の Theorem (3A) によれば、 $n(B) = v(B)$ と同値である。(Theorem (3A) で $G \triangleright D \cdot \ker B \Rightarrow n(B) = v(B)$ という命題については、 D が *strongly closed* という仮定は必要ない)。従って、 $k(B) = p^d n(B)$ なら $k(B) = p^d v(B)$ を得る。2ページの図にもとづいて、 $k(B) = p^d v(B)$ なら明らかに、 $p^{a-d} k(B) = m(B)$ 。最後に、 $D \subseteq Z(P)$ であるから、[7]の Theorem (4B) より、 $k(B) = p^d v(B)$ なら、 $[G, D] \subseteq \ker B$ を得る。

注意. 定理3, 4 で、 $D \subseteq Z(P)$ という条件は $D \trianglelefteq P$ という条件に弱められたいだろうか。(2)と(3)の同値性は、無条件で成立するはずである。又、 $m(B) = p^a n(B) \Rightarrow m(B) = p^a v(B)$ が成立するかという問題は未だに解決できていない。これは、" D のすべての元 σ が $\{\sigma^G\} \cap P = \{\sigma\} \Rightarrow [G, D] \subseteq \ker B$ " が成立するかという問題と同値である。

参考文献

- [1] R. Brauer : On blocks and sections in finite groups. II. Amer. J. Math., 90 (1968) 895-925.
- [2] P. Fong : Solvable groups and modular representation theory. Trans. A.M.S., 103 (1962) 484-494.
- [3] R. Knörr : Semi Simplicity, induction and restriction for modular representations in finite groups. J. Alg., 48 (1977) 346-367.
- [4] R. Knörr : On the vertices of irreducible modules. Ann. Math., 110 (1979) 487-499.
- [5] Motose - Ninomiya : On the subgroup H of a group G such that $J(KH)KG > J(KG)$. Math. J. Okayama Univ., 17 (1975) 175-178.
- [6] Okuyama : Vertices of irreducible modules of p -solvable groups. (preprint)
- [7] Wada : Blocks with a normal defect group. Hokkaido Math. J., 10 (1981) 319-332.
- [8] Wada : On the number of irreducible characters in a finite group. (to appear in Hokkaido Math. J. 12)