

$Sp(n, \mathbb{R})$ の指標等式と不変固有超関数の 持ち上げについて

福井大学 教育 三上俊介 (Shunsuke Mikami)

§1. 序

G を実連結半単純 Lie 群, π を G の tempered 既約ユニタリ表現, その指標を Θ_π と表わす。離散系列表現の指標, 及び cuspidal parabolic 部分群からの誘導指標という方法により (少なくとも regular infinitesimal character をもつ場合には), Θ_π の形は知られている。ところが離散系列の指標の形を見ても, Θ_π の height とよばれる Cartan 部分群 (離散系列の場合は compact Cartan 部分群) 上でのきれいな形から, height より離れるに従って Cartan 部分群上での Θ_π の形は複雑なものになっていく。そこでより見易い形の指標の間の関係式があることが望まれる。

その様な指標の間の関係式を系統的に得る方法の 1 つが, D. Shelstad により "stable tempered は不変固有超関数の持ち上げ" を用いて示された。[5] それは G といくつかの

Cartan 部分群を共有する群 ((T, π) -group とよばれるもの) との間
の指標の間の関係式を G の各 Cartan 部分群上毎に与えるもの
で, そのうちのいくつかは

$$\sum \varepsilon_i \Theta \pi_i = 0 \quad \text{on } T \quad \dots \quad (*)$$

(T は G のある Cartan 部分群) という形になる。そこで $(*)$
のよう形の影響式に着目したい。問題を正確に記述す
る為にいくつかの記号と用語を導入する。 Θ を G 上の tempered
な不変固有超関数 (以下 IED と略記する) とする。Harish-
Chandra の結果より, Θ は G 上の局所可積分関数であり,
 $G_{\text{reg}} (:= G \text{ の regular elements 全体})$ 上で実解析関数になる。そ
れを Θ' で表わすことにする。

$\text{Car}(G) := G$ の Cartan 部分群の共役類の全体

とし, G の Cartan 部分群 T に対し $[T]$ でその属する共役類を
表わす。 $\text{Car}(G)$ の中に real root に関する Cayley 変換を用いて
順序を導入する。すなわち, $T, T' \in G$ の Cartan 部分群とし,
 $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}'$ をその Lie 環, とする。 $\forall \alpha (\mathfrak{t}_\alpha) \cap \mathfrak{t}' = \mathfrak{t}'$ のとき,
 $[T] < [T']$ と定め, これを transitive に拡張して順序 $<$ が
定まる。(但し $\mathfrak{t}$ は G の Lie 環, α は $(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')$ の real root,
 ν_α は α に関する Cayley 変換, $\mathfrak{t}_\alpha$ は $\mathfrak{t}$ の複素化を表わす。)

$$C(\Theta) := \{ [T] \in \text{Car}(G); \quad \Theta'_{|T \cap G_{\text{reg}}} \neq 0 \}$$

とおく。 $C(\Theta)$ の今導入した順序に関する maximal elements

全体を Θ の height とする。

問題 Θ を G 上の tempered IED とする。ある Cartan 部分群 T ($[T]$ は Θ の height より低い) 上 $\Theta|_{T \cap G_{\text{reg}}} \equiv 0$ となるような Θ はどのくらいあるか。(これは Shelstad により示された持ち上げの手法により尽くされるか、云々換えると、 Θ の型の指標等式は持ち上げの手法により尽くされるか?)

またこの様な等式が成り立つ為の必要十分条件を Θ の height 上で与えることが出来るか?

以下 §2 において、Shelstad の手法 (stable tempered IED の持ち上げ) を説明し、§3 において $G = Sp(n, \mathbb{R})$ の場合の上の問題に関し、目下のところ得られてゐる結果を述べる。

§2. stable tempered IED の持ち上げ

Shelstad [5] に従ひ、いくつかの記号を導入する。 $\underline{G}$ を $\mathbb{R}$ 上定義された連結半単純線型代数群とし、その $\mathbb{R}$ -rational points 全体を $\underline{G}(\mathbb{R})$ で表わす。以下 $G = \underline{G}(\mathbb{R})$ とする連結実半単純 Lie 群について考える。そのとき G の Cartan 部分群 T には、 $\underline{G}$ の $\mathbb{R}$ 上定義された maximal torus $\underline{T}$ で $T = \underline{T}(\mathbb{R})$ となるもの

の σ が対応する。

$$A(T) = \{ g \in G : \text{ad } g|_T \text{ が } \mathbb{R} \text{ 上 定義 される} \}$$

とおく。 $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ とすると $A(T)$ は 次の様に云々換
えることが出来る。

$$\begin{aligned} A(T) &= \{ g \in G : \sigma(g^{-1})g \in T \} \quad (\text{但し } e \neq \sigma \in \Gamma) \\ &= \{ g \in G : gTg^{-1} \subset G \} . \end{aligned}$$

$$\mathcal{O}(T) = G \backslash A(T) / T$$

定義 G 上の tempered IED Θ が stable

$$\Leftrightarrow \Theta'(t) = \Theta'(gtg^{-1}) \quad \forall t \in T \cap G_{\text{reg}}, \quad \forall g \in A(T)$$

次に (T, π) -group (又は G の endoscopic group) とよばれる群
 H の stable tempered IED の G への持ち上げを以下において説明
する。

[注. Θ の様な等式を考える場合、従って §3 の議論において
は、 H の形も重要ではあるが、 $\text{Car}(H)$ の構造、及び H の stable
tempered IED を G に持ち上げたとき、どの様なものが得られ
るかが必要になる。]

$\mathcal{C}(G)$ で G 上の急減少関数の空間を表わす。 $f \in \mathcal{C}(G)$, $t \in$
 $T \cap G_{\text{reg}}$ (T は G の Cartan 部分群) に対し " π -unstable orbital
integral" $\Phi_f^\pi(t)$ を 次のように定める。

$$\Phi_f^\pi(t) = \sum_{\omega \in \mathcal{O}(T)} \pi(\omega) \int_{G/T} f(g t^{-1} g^{-1}) d\bar{g}$$

(Harish-Chandra の結果より右辺の積分は収束する。) π に $\pi(\omega)$ は $\mathcal{O}(T)$ 上 $\{\pm 1\}$ の値をとる以下の様に構成される写像である。(特に $\pi \equiv 1$ のときは stable orbital integral とおける。) すなわち $A(T) \ni g$ には $\Gamma \rightarrow \underline{T}$ ($1 \mapsto 1, \sigma \mapsto \sigma(g^{-1})g$) の 1-cycle が対応する。従って $\mathcal{O}(T) \hookrightarrow H^1(\Gamma, \underline{T})$. 実際には, $\underline{G}$ の derived group $\underline{G}_{\text{der}}$, その普遍被覆群 $\tilde{\underline{G}}$, $\underline{G}_{\text{der}}$ の projection π $\underline{T}_{\text{sc}} = \pi^{-1}(\underline{T} \cap \underline{G}_{\text{der}})$ とおくとき $\mathcal{O}(T)$ は $H^1(\Gamma, \underline{T}_{\text{sc}}) \rightarrow H^1(\Gamma, \underline{T})$ の像に含まれる。Tate-Nakayama の定理を適用して $\mathcal{O}(T) \hookrightarrow \{ \lambda^\vee \in \langle \Sigma^\vee \rangle; \sigma_\tau \lambda^\vee = -\lambda^\vee \} / \mathcal{L}(T)$ となる。記号を説明する。

$$\mathcal{L}(T) = \{ \lambda^\vee \in \langle \Sigma^\vee \rangle; \lambda^\vee = \sigma_\tau \mu^\vee - \mu^\vee \text{ for some } \mu^\vee \in X_*(\underline{T}) \}$$

$$\Sigma^\vee := (\underline{G}, \underline{T}) \text{ の co-root 系}$$

$$X^*(\underline{T}) := \underline{T} \text{ の (rational) character module}$$

$$X_*(\underline{T}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(\underline{T}), \mathbb{Z})$$

$$\langle \Sigma^\vee \rangle \text{ は } \Sigma^\vee \text{ で生成される } X_*(\underline{T}) \text{ の部分群}$$

$$\sigma_\tau \text{ は } \underline{T} \text{ 上の } \sigma \text{ の action } \pi; \text{ 自然に誘導される } X_*(\underline{T})$$

$$\text{上の } \sigma \text{ の action を表わす。}$$

いま $\pi \in \text{Hom}(\langle \Sigma^\vee \rangle, \mathbb{C}^*)$, 但し $\pi(\mathcal{L}(T)) \equiv 1$ とすると, 上の対応により, π は $\mathcal{O}(T)$ 上 ± 1 の値をとる前述の写像を導く。

(それを同じ記号で表わしておく。)

注. $\alpha \in (G, T)$ の non-compact imaginary root とし $w_\alpha \in \alpha$ に関する reflection を引きおこす G の元とすると、Tate-Nakayama の duality において、 $\mathcal{D}(T) \ni \langle w_\alpha \rangle \mapsto \alpha^\vee + \mathcal{L}(T)$ が対応することが知られている。

詳細は Langlands [2], Shelstad [4] を参照していただくことにして、 L -group を経由することにより、次の条件を満たす $((T, \pi)$ -group とよばれる) quasi-split reductive T_0 代数群 H を構成できる。 H は $\mathbb{R}$ 上定義され、 $H = H(\mathbb{R})$ とおく。

$$1) \quad \dim H \leq \dim G, \quad \text{rank } H = \text{rank } G$$

2) H は T (と同型 T_0 Cartan 部分群) を含み、 $\pi \in \mathcal{D}_H(T)$ 上にうつすと、 $\pi \equiv 1$ と T_0 になる。

(i.e. (H, T) の co-root 系を $\Sigma_H^\vee (\subset \Sigma^\vee)$ とすると $\pi|_{\Sigma_H^\vee}$ に対応する $\mathcal{D}_H(T)$ 上の写像は恒等的に 1 に T_0 になる。)

以後、いままでの (T, π) の代りに (T_0, π_0) と表わすことにする。§3 の為にも $Sp(n, \mathbb{R})$ の場合の例をあげておく。

例 $G = Sp(n, \mathbb{R})$ $\underline{G} = Sp(n, \mathbb{C})$, $T_0 := G$ の compact Cartan 部分群の場合 (このとき $\sigma_{T_0} = (-1) \times \text{id}$ と T_0 になる。)

$$\Sigma^\vee = B_n \text{ 型のルート系} = \{ \pm e_i, \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq n), \pm e_i \ (1 \leq i \leq n) \}$$

従って π_0 は各 e_j の値により定まる。いま $\pi_0(e_1) = \cdots = \pi_0(e_k) = -1$, $\pi_0(e_{k+1}) = \cdots = \pi_0(e_n) = 1$ とする。このとき (T_0, π_0) -group

$\in \underline{H}$ とおくと, $\Sigma_H^\vee = \{ \alpha^\vee \in \Sigma^\vee ; \pi_0(\alpha^\vee) = 1 \}$. 故に $\Sigma_H^\vee$ は B_{n-1} 型 ($k=1$), または $D_k \times B_{n-k}$ 型 ($k \geq 2$) のルート系と対応する。従って $(\underline{H}, \underline{T})$ のルート系は C_{n-1} 型 または $D_k \times C_{n-k}$ 型の quasi-split T_0 群に対応する。(一般に quasi-split reductive T_0 代数群 $\underline{G}^*/\mathbb{R}$ に対し, その $\mathbb{R}$ 上定義された Borel 部分群を $\underline{B}^*$, $\underline{B}^*$ に含まれる $\mathbb{R}$ 上定義された maximal torus を $\underline{T}^*$ とおく。 Σ^+ で $(\underline{G}^*, \underline{T}^*)$ のルート系の positive system で $\underline{B}^*$ に対応するものをとると, $\sigma = \sigma_{\underline{T}^*}$ は Σ^+ を不変にする。この action を $\sigma_{\underline{G}^*}$ と書くことにすると 今の場合, $\underline{G}^* = \underline{H}$, $\sigma_H = \omega_0^{-1} \cdot \sigma_{T_0}$ (ω_0 は $\Sigma_H^\vee$ の Weyl 群の最長元) で与えられ, また $X_H^*(\underline{T}) = X_G^*(\underline{T}) = T_0$, である。従って B_{n-1} 型 のとき, $H \cong Sp(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}$ である。)

このとき, G のいくつかの Cartan 部分群と, H のいくつかの Cartan 部分群の間に対応がつかうことが重要である。すなわち,

$$\exists \{ [T'_m] ; m=0, 1, \dots, N \} \subset \text{Car}(H)$$

$$\exists \{ [T_m] ; m=0, 1, \dots, N \} \subset \text{Car}(G)$$

$$\exists i_m : T'_m \longrightarrow T_m \quad (m=0, 1, \dots, N) ; \mathbb{R} \text{ 上 定義 された 同型}$$

写像

注1. $\underline{G}$ 自身 quasi-split の場合は $\underline{H} \in \underline{T}^*$ は ($\mathbb{C}$ 上の maximal torus を (7) 含み, $i_m = \text{ad } g^{-1} \circ \text{ad } h$ という形で得られる。

但し, $g \in G$; $\text{ad } g: \underline{T}_m \rightarrow \underline{T}^*$

$h \in H$; $\text{ad } h: \underline{T}_m' \rightarrow \underline{T}^*$

$$\begin{array}{ccc} H \supset \underline{T}^* & \xrightarrow{\text{id}} & \underline{T}^* \subset G \\ \text{ad } h \uparrow & \subset & \downarrow \text{ad } g^{-1} \\ \underline{T}_m' & \xrightarrow{i_m} & \underline{T}_m \end{array}$$

注2. $[\underline{T}_m']$ ($m=0,1,\dots,N$) はすべて相異なるが, $\text{Car}(G)$ 中の $\{[\underline{T}_m]\}$ には一致するものもありうる。

注3. 序において, いくつかの Cartan 部分群を共有するといったのは, 上述のことを意味する。

便宜上, この様な $\mathbb{R}$ 上の同型写像 $i_0, \dots, i_N$ を固定して考える。また H の Cartan 部分群 $\underline{T}'$ が $[\underline{T}'] = [\underline{T}_k']$ となる k ($0 \leq k \leq N$) があるとき, $\underline{T}'$ は G に (または $[\underline{T}_k]$ に) originate するといふ。

更に π_0 はもともと $\mathcal{O}(\underline{T}_0)$ 上の ± 1 の値をとる写像であったが, $\mathbb{R}$ 上の同型写像 i_m を用いて, $\langle \Xi_m^\vee \rangle$ 上の, 従って $\mathcal{O}(\underline{T}_m)$ 上の写像 π_m が次の様に構成できる。すなわち, まず $h \in H$ s.t. $\text{ad } h(\underline{T}_m') = \underline{T}_0'$ となる様な元 h を一つ選び, $\bar{h} = i_0 \circ \text{ad } h$.

$$\begin{array}{ccc} \underline{T}_0' & \xrightarrow{i_0} & \underline{T}_0 \\ \text{ad } h \uparrow & \subset & \uparrow \bar{h} \\ \underline{T}_m' & \xleftarrow{i_m^{-1}} & \underline{T}_m \end{array}$$

とあくと, $\bar{h}(\underline{T}_m) = \underline{T}_0$ となり
 $\bar{h}$ は自然に $(G, \underline{T}_m)$ の co-root 系 $\Xi_m^\vee$
 の元 $\alpha^\vee \in (G, \underline{T}_0)$ の co-root 系 $\Xi_0^\vee$ の元

うつす。それを $\bar{h} \cdot \alpha^\vee$ と書くことにし, $\pi_m \in \text{Hom}(\langle \Xi_m^\vee \rangle, \mathbb{C}^\times)$ を $\pi_m(\alpha^\vee) = \pi_0(\bar{h} \cdot \alpha^\vee)$ により定める。このとき π_m は h のとり方に依らずに, しかも $\mathcal{L}(\underline{T}_m)$ 上 1 となることがわかり, π_m は

$\mathcal{O}(T_m)$ 上の ± 1 の値をとる写像を定めることがいえる。以下特に誤解を生じないときには α_m ($m=0, \dots, N$) を区別せず, α と書くことにする。

Proposition 1. (Shelstad [51])

G を単連結とする。このとき $(\bigcup_{m=0}^N T_m) \cap G_{\text{reg}}$ 上の関数 $\Delta_H^G(t)$ で次の条件 (**) を満足するものが存在する。

$$(*) \quad \begin{aligned} & \forall f \in \mathcal{C}(G) \text{ に対して } \exists f_H \in \mathcal{C}(H) \text{ s.t.} \\ & \Phi_{f_H}'(t') = \begin{cases} \Delta_H^G(t) \Phi_f^\alpha(t) & \text{if } i_m(t') = t \in G_{\text{reg}} \\ 0 & \text{if } t' \in H_{\text{reg}} \text{ かつ } t' \notin \text{含む } H \\ & \text{の Cartan 部分群が } G \text{ に originate} \\ & \text{ (T0) である。} \end{cases} \end{aligned}$$

この $\mathcal{C}(G)$ と $\mathcal{C}(H)$ との対応 (f, f_H) の dual を考えたのが stable tempered IED の持ち上げである。すなわち

定義 H 上の stable tempered IED Θ_H に対し, その G への持ち上げと呼ばれる tempered 超関数, $\text{Lift } \Theta_H$ を次の様に定義する。

$$\forall f \in \mathcal{C}(G) \text{ に対し, } \text{Lift } \Theta_H(f) = \Theta_H(f_H)$$

注. f に対して f_H は一意的に定まるわけでは T0 かつ, Θ_H が stable であることより, $\text{Lift } \Theta_H$ は f_H のとり方に依らず, well-defined である。更に $\text{Lift } \Theta_H$ は G 上の tempered IED に T0 である。

次に持ち上げと指標等式の関連について述べる。その前に stable tempered IED の例を与えておく。[3]

例 1. 離散系列の場合 (T_0' を compact Cartan 部分群とする。)

$\Lambda \in T_0'$ の unitary character とし, $\lambda \in \mathfrak{h}$ の微分, $\mu = \lambda + \rho$ とおく。(但し, ρ は λ が dominant に T_0 の様 $(\underline{H}, \underline{T}_0')$ のル-ト系の positive system Ψ に関する positive roots の和の半分)

$$\chi_\mu = \sum_{w \in W(\underline{H}, T_0') \setminus W(\underline{H}, \underline{T}_0')} \oplus_{\mu} (\mu, \psi)$$

とおくと, χ_μ は stable tempered IED に T_0 属する。但し, $\oplus_{\mu} (\mu, \psi)$ は H の離散系列の指標で, その T_0' 上の形が

$$\oplus_{\mu} (\mu, \psi)'(\exp X) = (-1)^{q_H} \left(\sum_{s \in W(\underline{H}, T_0')} \det s \cdot e^{(s\mu - \rho)(X)} \right) / \prod_{\alpha \in \Psi} (1 - e^{-\alpha(X)})$$

と表せるものがある。また $N_H(T_0')$ で H にあける T_0' の normalizer を表わし, $W(\underline{H}, T_0') = N_H(T_0')/T_0'$, $W(\underline{H}, \underline{T}_0') = N_{\underline{H}}(\underline{T}_0')/\underline{T}_0'$ ($\cong (\underline{H}, \underline{T}_0')$ のル-ト系の Weyl 群) とする。

例 2. 線型 reductive algebraic group $\underline{H}/\mathbb{R}$, $H = \underline{H}(\mathbb{R})$ とし, T はその Cartan 部分群, $\Lambda \in T$ の unitary character とする。 $\underline{I}$ を maximal $\mathbb{R}$ -split subtorus を $\underline{S}(T)$ と書く。

$$\underline{M} = Z_{\underline{G}}(\underline{S}(T)) \quad (\underline{G} \text{ にあける } \underline{S}(T) \text{ の centralizer}),$$

$$M = \underline{M}(\mathbb{R}), \quad M \in \text{Levi 部分群に属する parabolic 部分群を}$$

$$P = MN \text{ とする.}$$

$M^+ := M$ の derived group の単位元を含む連結成分.

$$T^+ = T \cap M^+, \quad (\text{このとき } T = T^+ \cdot Z_M, \quad Z_M \text{ は } M \text{ の中心})$$

$\lambda \in \Lambda_{|T^+}$ の微分, $\mu = \lambda + \rho$ (但し ρ は λ の dominant になる様
 は $(\underline{M}, \underline{T})$ のルート系の positive system に関する positive roots の和の
 半分) とおく. Harish-Chandra により示された, μ に対応する M^+
 の離散系列表現を $\pi(\lambda, \rho)$, $\pi(\lambda, \rho) = \text{Ind}_{Z_M M^+ T^+ M} \pi(\lambda, \rho) \otimes \Lambda_{|Z_M}$ とお
 くとき, 表現

$$\text{Ind}_{P \uparrow H} \left(\sum_w \pi(w\lambda, w\rho) \right) \otimes 1_N$$

の指標 χ が H の stable tempered IED にある。 $\sum$ の中の w は
 $W(M, T) \setminus W(\underline{M}, \underline{T})$ をわたる。

一般に $\varphi = \langle \Lambda \rangle = \{ \Lambda \circ \text{ad } h^{-1}; \quad h \in A(T) \}$ とおくと, こ
 の様にして, φ に対し stable tempered IED $\chi_\varphi = \chi$ が構成でき
 る。特に T が compact のときが例 1 の場合にあたる。

更に [5] において Shelstad は $\text{Lift } \chi_\varphi \in G$ の既約指標の符
 号つきの和 (同じ "L-packet" に属する既約ユニタリ表現の指標
 の符号つきの和) として表わす公式を与えた。特に χ_φ が例 1 の
 とき, $\text{Lift } \chi_\varphi$ は regular infinitesimal character をもっている,

$$\text{Lift } \chi_\varphi = \varepsilon \cdot \sum_{w \in W(G, T_0) \setminus W(\underline{G}, \underline{T}_0)} \pi(w\omega^*) \otimes_{\mathbb{H}_G} (w\omega^* \mu_\varphi, w\psi_\varphi)$$

と表わされる。ただし, $\mu_G - \rho_G$ は T_0 のある unitary character の微分にたっており, μ_G は μ 及び $(T_0, \mathfrak{g}_0)$ -group の構成より定まる $\sqrt{-1}\mathfrak{t}_0^*$ の元である。($\mathfrak{t}_0$ は T_0 の Lie 環, $\mathfrak{t}_0^*$ はその dual.)

(§3 の $G = Sp(n, \mathbb{R})$ の場合は $\mu_G = \mu$ とできる。) また w^* は $w^*\mu_G$ が ψ_G に関して dominant になる様な $W(\underline{G}, \underline{T}_0)$ の元であり, ε は $+1$ または -1 を表わす。

指標等式に関しては, 次の命題が [5] において示された。

Proposition 2. (Shelstad [5])

1°) $\varphi = \langle \Lambda \rangle$, Λ が H のある Cartan 部分群 T' 上の unitary character であって, T' が G に originate しているとせば,

$$\text{Lift } \chi_\varphi \equiv 0.$$

2°) $\varphi = \langle \Lambda \rangle$, Λ が T' 上の unitary character で, T' が G に originate するとせば,

a) $\gamma \in T_j \cap G_{\text{reg}}$ に対して

$$\text{Lift } \chi_\varphi(\gamma) = \varepsilon_j \sum_{\substack{m; \\ \iota_m(\gamma) = \gamma}} \sum_{w \in W_0(\underline{G}, \underline{T}_j) / W_0(\underline{H}, \underline{T}_m')} \chi_m(w) \Delta_m^{\text{HIG}}(\gamma^w) \chi_\varphi(\gamma'^w)$$

但し, $W_0(\underline{G}, \underline{T}_j) = \{ w \in W(\underline{G}, \underline{T}_j); w\sigma = \sigma w \}$,

$$\Delta_m^{\text{HIG}}(\gamma) = \eta_m \Delta_H^G \prod_{\alpha \in \Delta(\underline{H}, \underline{T}_m')} |1 - \alpha(\gamma'^{-1})| / \prod_{\alpha \in \Delta(\underline{G}, \underline{T}_j)} |1 - \alpha(\gamma'^{-1})|,$$

$\Delta(\underline{G}, \underline{T}_j)$ は $(\underline{G}, \underline{T}_j)$ のルート系, $\varepsilon_j, \eta_m = +1$ または -1 .

b) $[T] \in \text{Car}(G)$, T は originate する H の Cartan 部分群が存在しないとき

$$\text{Lift } \chi_{\varphi}' \equiv 0 \quad (\text{on } T \cap G_{\text{reg}})$$

注1. §3で扱う $G = \text{Sp}(n, \mathbb{R})$ のときは, G は split であり,

1°) の case は生じない。

注2. 2) の b) については (**) の直接的帰結である。

序において述べた様に, ④の型の指標等式が, この様にして一定の手続きにより, 多く構成できる (2°) の b) の形) ことがわかる。従って序に掲げた問題の前半は ④の型の指標等式が上述の方法により得られるもので尽まっているかどうかを調べることにする。

§3. $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ の指標等式

以後 $G = \text{Sp}(n, \mathbb{C}) = \{ g \in \text{GL}(2n, \mathbb{C}) : {}^t g J g = J \}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$.

$G = \text{Sp}(n, \mathbb{R})$ とする。 $\text{Car}(G)$ の完全代表系 $\{ T^{k,l} ; k, l \geq 0, k+2l \leq n \}$ を次の様にとることにする。

$$T^{kl} = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \cos \varphi_1 \\ \vdots \\ \cos \varphi_k \\ \vdots \\ e^{\tau_1} u(\theta_1) \\ \vdots \\ e^{\tau_2} u(\theta_2) \\ \vdots \\ \varepsilon_1 e^{\tau_1} \\ \vdots \\ \varepsilon_m e^{\tau_m} \end{array} & \begin{array}{c} -\sin \varphi_1 \\ \vdots \\ -\sin \varphi_k \\ \vdots \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \sin \varphi_1 \\ \vdots \\ \sin \varphi_k \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} \cos \varphi_1 \\ \vdots \\ \cos \varphi_k \\ \vdots \\ e^{-\tau_1} u(\theta_1) \\ \vdots \\ e^{-\tau_2} u(\theta_2) \\ \vdots \\ \varepsilon_1 e^{-\tau_1} \\ \vdots \\ \varepsilon_m e^{-\tau_m} \end{array} \end{array} \end{array} \right\},$$

但し $m = n - k - 2l$, $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \tau_1, \dots, \tau_l, \theta_1, \dots, \theta_2, t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$,

$$u(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m = \pm 1$$

また対応する Cartan 部分環を $\mathfrak{t}^{kl}$ と書く。明らかに T^{kl} が G の compact Cartan 部分群であり, $T^{kl} (= T^*$ と書く) が G の split Cartan 部分群になる。

定義 G の Cartan 部分群 T に対して, $(T_0, \mathfrak{h}_0)$ -group H が条件 $(N(T))$ を満たす

$\Leftrightarrow H$ は $[T]$ に originate する Cartan 部分群を含む T_0 である。

(注: G は split な代数群 だから, H の Cartan 部分群は G に originate している。)

次に $Sp(n, \mathbb{R})$ に関し, §1 の問題に対する, 現在のところ得られている結果を次の定理の形で述べる。

Theorem. $\Theta \in$ regular infinitesimal character $\in \mathfrak{t}^+$, G 上の tempered IED とする。

1). $T = T^*$ の場合, 次の a) ~ c) は同値である。

a) Θ' は $T \cap G_{\text{reg}}$ 上恒等的に 0 になる。

b) Θ の height $\in [T]$, $\omega \in (G, T)$ の imaginary Weyl 群 $W_I(G, T)$ の最長元とすると,

$$\Theta'(t^\omega) = -\Theta'(t) \quad \forall t \in (T) \cap G_{\text{reg}}.$$

c) Θ は $(N(T))$ に満たす (T_0, π_0) -group H 達の $\text{Lift } \chi_\varphi$ の一次結合として表わせる。

2) $T = T^{k_0}$ の場合も, Θ の height $\in [T^{k_0}]$ のときは, b) を次の b') に代えることにより, a), b'), c) が同値になる。

$$b') \quad \Theta'(t^\omega) = -\Theta'(t), \quad \forall t \in T^{k_0} \cap G_{\text{reg}}.$$

ここで ω としては, $W' = \{w \in W(G, T^{k_0}) ;$

$w|_{T^{k_0} \cap T_0^{k_0}} \equiv \text{id}\}$ の中の最長元をとる。但し,

$T_0^{k_0}$ は T^{k_0} の単位元を含む連結成分を表わす。

注. imaginary Weyl 群 $W_I(G, T)$ とは (G, T) の imaginary

roots に関する reflections により生成される $W(G, I_1)$ の部分群
 2. $M \in p10$ の様に I_1 に対し構成すれば, $W(G, I_1) \cong W(M, I_1)$
 となる。

証明の概略

1). Step 1. $\textcircled{H}$ の height が compact Cartan 部分群の場合に
 まず証明する。

c) $\Rightarrow$ a) Sholstad の結果による。

b) $\Rightarrow$ c) 今の場合, T_0 は compact Cartan 部分群 T^{no}
 としてよい。

$$t_0 = t^{no} = \left\{ X = \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} -\varphi_1 & & \\ & \ddots & & \\ & & -\varphi_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} \varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_n \end{matrix} & 0 \end{bmatrix}, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R} \right\},$$

に対し $e_j(X) = \sqrt{-1} \varphi_j$ とおくと, $\{\pm e_i, \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq n), \pm 2e_i \ (1 \leq i \leq n)\}$ が $(\mathfrak{g}, t^{no})$ のル-ト系を与える。

Lemma (T_0, π_0) -group H が $(N(T^*))$ を満たす

$\Leftrightarrow \#\{i; \pi_0(e_i) = -1\}$ が奇数。

この様 T_0, π_0 に対し $\{i; \pi_0(e_i) = -1\} = \{i_1, \dots, i_k\}$ とおくと,

$$\text{Lif } \chi_\varphi = \varepsilon \sum_{w \in W(G, T_0) \setminus W(G, I_0)} \nu_{i_1} \dots \nu_{i_k} \textcircled{H}_G(w\mu, w\psi_G) \dots \textcircled{D}$$

とある。但し、この場合 $\mu = \mu_G$ とする。

$$\mu(\exp X) = e^{\sum_{j=1}^n \sqrt{-1} l_j \varphi_j} \quad (l_1 > l_2 > \dots > l_n > 0, l_j \in \mathbb{Z})$$

とある T^{n_0} 上の unitary character τ $w\mu := i\tau$

$$w\mu(\exp X) = e^{\sum_{j=1}^n \sqrt{-1} \nu_j l_j \varphi_j} \quad (\nu_j = +1 \text{ または } -1)$$

が対応してゐるとする。($W(\underline{G}, \underline{T}_0) \ni (g, t_0)$ のルート系の Weyl 群

と同一視する。) また $\varepsilon = +1$ または -1 の符号。

一方,

$$\Theta = \sum_{w \in W(\underline{G}, \underline{T}_0) \setminus W(\underline{G}, \underline{T}_0)} c_w \Theta(w\mu, w\psi_G)$$

とおくと、条件 b) 及び 次の関係式

$$\Theta(w\mu, w\psi_G)(t^n) = \Theta(w\mu, w\psi_G)(t^{-1}) = \Theta(w\mu, w\psi_G)(t)$$

より,

$$c_w = -c_{ww} \quad \dots (2)$$

を得る。①と②より $c: w \mapsto c_w$ は $w \mapsto \nu_1, \dots, \nu_n$ と

関数の一次結合で表わされることばかり、c) が導かれる。

a) $\Rightarrow$ b) n に関する帰納法による。 $T^* (= T^{n_0})$ 上

$\Theta' \equiv 0$ である、 $T^{n_0} \quad (l=0, \dots, [\frac{n}{2}])$ 上も Θ' は恒等的に 0 になる

ことを示せる。残りの Cartan 部分群 $T^{n_0} \quad (k \geq 1)$ は $Sp(n-1, \mathbb{R})$ の

Cartan 部分群と 1対1 に対応する。すなわち、

$$\hat{G} = \left\{ g = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ 0 \ \dots \ 0}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & & \\ 0 & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & * & & 0 & * \\ 0 & & & 0 & \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{R}) \right\} \quad (\cong Sp(n-1, \mathbb{R}))$$

とおくと, $\{T^{k\epsilon} \cap \hat{G}; k \geq 1\}$ が $Sp(n-1, \mathbb{R})$ の Cartan 部分群の共役類の完全代表系を与える。そこで $T^{n\epsilon} \ni \exp X$ に対し

$$\Delta_G \oplus (\exp X) = e^{\sqrt{-1} \ell_1 \varphi_1} F_1^+(\exp X') + e^{\sqrt{-1} \ell_1 \varphi_1} F_1^-(\exp X') + \dots \\ \dots + e^{\sqrt{-1} \ell_n \varphi_n} F_n^+(\exp X') + e^{-\sqrt{-1} \ell_n \varphi_n} F_n^-(\exp X')$$

と展開する。但し

$$X' = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{array}{c} -\varphi_2 \\ \vdots \\ -\varphi_n \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{array} & 0 \end{array} \right] \in Sp(n-1, \mathbb{R})$$

$$\Delta_G(\exp X) = e^{+P(X)} \prod_{a \in \Phi^+} (1 - e^{-a(X)})$$

このとき $F_j^\pm$ はそれぞれ $Sp(n-1, \mathbb{R})$ 上のある tempered IED に $\Delta_{Sp(n-1, \mathbb{R})}$ を掛けたものに等しい。a) の条件より F_j^+ と F_j^- は $Sp(n-1, \mathbb{R})$ の split Cartan 部分群 ($T^{n\epsilon} \cap \hat{G}$ に対応) 上, 一致することがわかる。そこで $F_j^+ - F_j^-$ に帰納法の仮定を適用する。 n が奇数のときは, このことより直ちに, 帰納法が1つあがる。 n が偶数のときは, 少し工夫が必要で, 平井の指標公式の結果 [1] の一部を用いて証明する。

Step 2). ④の height が non-compact Cartan 部分群 T_i の場合。 T_i は fundamental Cartan 部分群にもつ Levi 部分群に対応する cuspidal parabolic 部分群 P , その Langlands 分解 $P = M_i A N$ とす

る。 $\sigma_M \in M_1$ の離散系列表現, $\chi_A \in A$ の unitary character,

$$\pi = \text{Ind}_{P \uparrow G} \sigma_M \otimes \chi_A \otimes 1_N$$

とおき, その指標を Θ_π とすると, Θ は同じ infinitesimal character をもつ Θ_π 達の - 次結合として表わされることを.

誘導指標の explicit な形と, Θ の regularity により示し, そして M_1 の離散系列の議論 (従って Step 1 の結果) に帰着させてしよう。

2) も $\text{Sp}(n-k, \mathbb{R})$ 及びその split Cartan 部分群に対する 1) の結果を用いることにより, 証明できる。

文 献

- [1] T. Hirai, Invariant eigendistributions of Laplace operators on real semisimple Lie groups, IV, Explicit forms of the characters of discrete series representations for $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$, Japan.J.Math., New Ser. 3(1977), 1-48.
- [2] R.P.Langlands, Stable conjugacy: definitions and lemmas, Canad. J.Math., 31(1979), 726-785
- [3] D.Shelstad, Characters and inner forms of a quasi-split group over $\mathbb{R}$, Compositio Math., 39(1979), 11-45.
- [4] D.Shelstad, Orbital integrals and a family of groups attached to a real reductive group, Ann.Sci.Ecole Norm.Sup., 12(1979), 1-31.

- [5] D.Shelstad, L-indistinguishability for real groups, Math.Ann. 259(1982), 385-430.
- [6] S.Mikami, On character identities for $Sp(n, \mathbb{R})$ and the lifting of stable tempered invariant eigendistributions, preprint.