

乱流相対拡散における持続的運動の効果

京都大学・大学院理学研究科 金谷 健太郎 (Kentaro Kanatani)

京都大学・大学院理学研究科 小笠原 健 (Takeshi Ogasawara)

京都大学・大学院理学研究科 藤 定義 (Sadayoshi Toh)

Graduate School of Science, Kyoto University

1 はじめに

乱流の基礎研究のうちの一つである乱流相対拡散は、近年の実験技術の進歩によって急速に発展しつつある分野である。特に相対拡散は、粒子対の相対距離の時間発展を扱うので本質的にラグランジュ的であり、そのため粒子対の軌跡を長時間に渡って追うような高度な技術が必要とされる。数値計算のほうでは、現状では慣性領域の有限性のために相対拡散が慣性領域で示すスケーリング則 (リチャードソン則) が十分に観測されていない。このような状況の中で、最近の実験 [1, 2] によると初期の弾道的運動の影響を受けたスケーリング則 (バッチラー則) が比較的長い間観測されている。これらの結果は、乱流相対拡散において粒子対の相対速度の時間相関が無視できないことを示唆している。そこで今回われわれは、粒子対の伸縮に着目し、相対速度の時間相関が乱流相対拡散に対してどのような影響を与えるのかを 2 次元自由熱対流系において調べてみることにした。

2 速度相関を採り入れたモデル —— ソコロフのモデル

粒子対の相対速度の相関を採り入れた乱流相対拡散のモデルとして、ソコロフのモデルがある [3, 4]。彼は、慣性領域における粒子対の相対距離の時間発展を 1 次元空間上を運動する点で表した。このモデルでは、点の位置は粒子対の相対距離を、点の速さは粒子対の相対速度を、点の正の向きの運動は粒子対の伸長を、負の向きの運動は収縮を表す。乱流中の粒子対の相対速度は相対距離に依存するので、点の速さは空間座標の関数で表される。さらに、点の速度の向きは空間座標に依存した確率で変わるものとする。これは、慣性領域における乱流相対拡散では自己相似性が成り立つと考えられるためである。時間 dt で点の速度の向きが変わる確率 dp は次の式に従う。

$$dp = \frac{dt}{\tau(r)} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^\beta \frac{dt}{\tau_0} \quad (1)$$

ここで $\tau(r)$ は相対距離 r に依存する相対速度の相関時間、 $\tau_0 = \tau(r_0)$ 、 β はスケーリング指数¹を表す。これらの仮定から、ソコロフは速度の向きを変えずに点が r_1 から r_2 まで移動する確率 $P(r_2|r_1)$ を導出した。

$$P(r_2|r_1) = \begin{cases} (r_2/r_1)^{-1/P_\theta} & r_2 > r_1 \\ (r_2/r_1)^{1/P_\theta} & r_2 < r_1 \end{cases} \quad (2)$$

¹コルモゴロフ (K41) のスケーリングに対しては $2/3$ 、ボルギャノ-オブコフのスケーリングに対しては $2/5$ をとる。

ここで P_s はソコロフによって導入された持続パラメーターであり、次式によって定義される。

$$P_s = v_0 \tau_0 / r_0 \quad (3)$$

v_0 は相対距離 r_0 における特徴的な相対速度の大きさである。この持続パラメーター P_s は相関時間における粒子対の相対距離の変位 $l(r)$ と $l(r) = P_s r$ という関係で結ばれている [3]。したがって、相対速度が相関を持っている間に粒子対の相対距離は $1 + P_s$ 倍になることになる。これは、 $P_s \ll 1$ であれば拡散による近似が成り立つが、 $P_s \gg 1$ なら粒子対の弾道 (持続) 的運動の効果が無視できないことを意味している。よって、 P_s を測定することにより粒子対の運動の弾道 (持続) 性が相対拡散に対してどれほど影響を与えるかがわかる。

以下では、このソコロフのモデルをもとに2次元自由熱対流乱流系における持続パラメーター P_s を求めるが、その前に持続確率の式 (2) の変形を導入しておく。式 (2) は相対距離に対する式であるが、時刻に対する式に書き直すこともできる。時刻 $t = 0$ から粒子対が相対速度の向きを変えないでいる確率 $P(t)$ は、伸縮している粒子対それぞれに対して次のように書ける。

$$P(t) = \begin{cases} (1 + \beta v_0 t / r_0)^{-1/(\beta P_s)} & \text{粒子対が伸長} \\ (1 - \beta v_0 t / r_0)^{1/(\beta P_s)} & \text{粒子対が収縮} \end{cases} \quad (4)$$

ただし、 $t = 0$ で $r = r_0$ とした。式 (2) と (4) より別々に持続パラメーターが求められるので、両者を比較することにする。なお、ボフェッタとソコロフは2次元逆カスケード乱流の直接数値シミュレーションで本研究とは異なる方法で $P_s \simeq 0.87$ と見積もっている [5]。

3 2次元自由熱対流乱流の直接数値シミュレーション

本研究では、以前の研究 [6] に引き続いて2次元自由熱対流乱流中における相対拡散を取り扱う。この系では、3次元ナビエ-ストークス乱流や2次元逆カスケード乱流におけるコルモゴロフのスケーリングに対応するものとして、ボルギャノ-オブコフのスケーリングが成り立つことが知られている [7, 8]。異なったスケーリング則の下で相対拡散がどのような振る舞いを示すかを調べることは本研究の目的のうちの一つである。また、最近では2次元自由熱対流乱流系における一粒子拡散も調べられている [9]。

3.1 計算方法

基礎方程式は以下の通りである。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{u} - \alpha g T \mathbf{e}_g, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \kappa \Delta T. \quad (7)$$

ここで $\mathbf{u}$ 、 T 、 p は速度場、温度場、圧力場を表す。 $\mathbf{e}_g$ は重力方向の単位ベクトルである。係数 ν 、 κ 、 ρ_0 、 α 、 g はそれぞれ動粘性係数、熱拡散係数、流体の平均密度、熱膨張係数、重力加速度である。シミュレーションは、 $2\pi \times 2\pi$ の領域で二重周期境界条件を課し、モード数

4096²を用いた擬スペクトル法によって行われた。時間積分には4次のルンゲ-クッタ法を用いた。この乱流場の中に相対距離が一定である粒子対を等方的に500万個入れ、その相対距離の時間発展を調べた。粒子は速度場に対して受動的に流されるものとする。

3.2 ボルギャノ-オブコフのスケーリング

2次元自由熱対流乱流の慣性領域では、エネルギーとエントロピー $S \equiv \int (T^2/2) dx$ のスペクトルが $E(k) \propto k^{-11/5}$ 、 $S(k) \propto k^{-7/5}$ のようなスケーリング則に従う。これをボルギャノ-オブコフのスケーリングという。図1は、直接数値シミュレーションから得られた両スペクトルがこのスケーリング則に従っていることを示している。

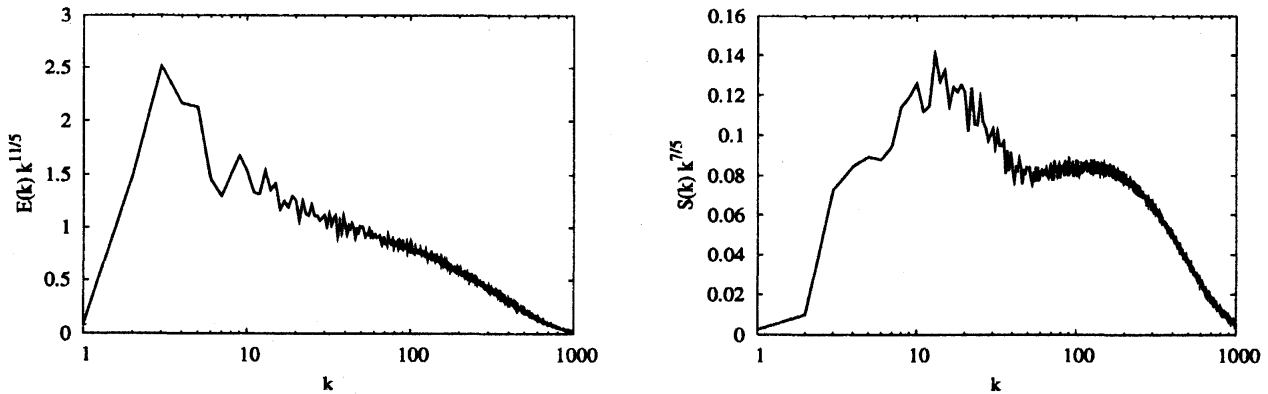


図1: エネルギースペクトル $E(k)$ (左) とエントロピースペクトル $S(k)$ (右) の補正形。両方の図とも平らな部分がボルギャノ-オブコフのスケーリングに対応する。

4 解析結果

以下では、特に断らない限り初期相対距離 r_0 は $100\Delta x$ ($\Delta x = 2\pi/4096$ はグリッドサイズ) とする。この大きさの波長に対応する波数は $k = 40.96$ であるので、上の図より十分慣性領域内にあると考えられる。

4.1 持続確率と持続パラメーターの見積もり

まず、持続確率 $P(t)$ の式(4)が直接数値シミュレーションのデータと一致するかを調べてみる。式(4)は粒子対が伸長しているか収縮しているかで異なる式を示しているので、直接数値シミュレーションでは初期に伸長している粒子対と収縮している粒子対とに分け、それぞれに対して個別に統計をとることにする。ここで、粒子対が伸長しているか収縮しているかは、相対速度 v と相対距離 r との内積の正負によって決定される²。

²粒子が速度場に対して受動的に流されるため、相対速度は2点における速度の差をとればよい。粒子が慣性を持っている場合は、粒子そのものの速度を知る必要がある。

図2では、直接数値シミュレーションから得られた持続確率 $P(t)$ とその式(4)によるフィッティングを示す。この図より時間が小さいときには、持続確率は漸近的に指数関数的減衰をしていることがわかる。また、式(4)は今回のデータを十分よく記述していることもわかる。フィッティングの結果から持続パラメーターを求めると、伸長している粒子対に対しては $P_s \simeq 1.1$ 、収縮している粒子対に対しては $P_s \simeq 0.27$ となる。ちなみに、オリジナルなソコロフのモデルやその後の持続パラメーターの見積もりでは [3, 4, 5]、持続パラメーターは粒子対の伸縮によらないとしている。

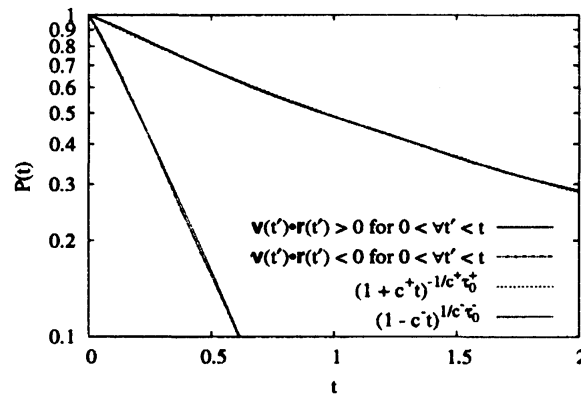


図 2: 持続確率 $P(t)$ の時間変化と式(4)によるフィッティング ($\beta = 2/5$)。図中の c は式(4)の $\beta v_0/r_0$ に対応する。上付きの正符号は初期に伸長している粒子対に、負符号は収縮している粒子対に対する量を表す。

上の図より、粒子対が時間とともに指数関数的に反転(伸長から収縮またはその逆)していることがわかったが、それでは粒子対が反転した時間とそのときの相対距離とはどのような関係にあるのだろうか。図3には反転時間 t_r とそのときの規格化された相対距離 $r/r_0 = 1 + l/r_0$ の $\beta (= 2/5)$ 乗の分布を示してある。この図を見ると、両者に対して何らかの相関があると考えられる。もし相対速度がスケーリング則 $v(r) = v_0(r/r_0)^{1-\beta}$ に従い反転がないとすると、この式を時間について積分することにより相対距離の時間発展は次のようになることが予想される。

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^\beta = 1 \pm \beta \frac{v_0^\pm}{r_0} t \quad (\text{複号同順}) \quad (8)$$

ここで正符号は伸長する粒子対に、負符号は収縮する粒子対に対応する。図3にはこの式が実線で示してある。式(8)の右辺の $v_0^\pm$ の値は図2のフィッティングから得られたものを用いた。図3より反転時間とそのときの相対距離との相関が($v_0^\pm$ の値はともかくとして) おおよそ式(8)に従うことがわかる。

次に、ソコロフのオリジナルなモデルである式(2)を実際に確かめてみる。図4は、図3のデータをもとに相対距離に対する持続確率 $P(r_2|r_1)$ を求めプロットしたものである。この図から、初期相対距離 ($r_0 = 100\Delta x$) 付近を除いては伸縮する粒子対両者に対して持続確率 $P(r_2|r_1)$ がほぼべき的に減衰していることがわかる。このデータをフィッティングしたものが実線で示されており、この線の指数から持続パラメーター P_s を求めることができる。その結果、伸長する粒子対に対して $P_s \simeq 1.86$ 、収縮する粒子対に対して $P_s \simeq 0.45$ となり、持続確率を時間の関数と見たときよりも大きめに出ている。しかも、両者に対して P_s の値が前回の見積もりの約 1.7 倍になっている。

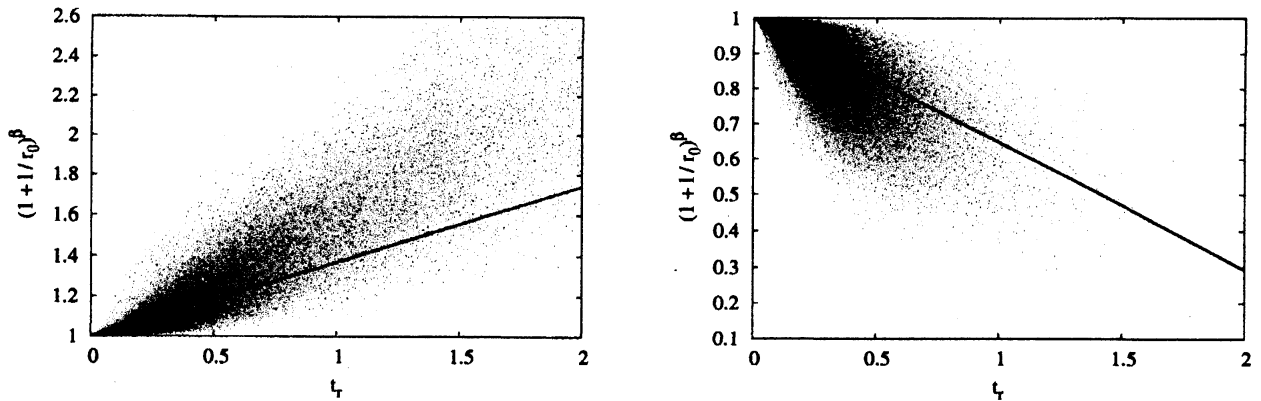


図 3: 反転時間 t_r と反転時の相対距離 $r/r_0 = 1 + l/r_0$ (初期相対距離で規格化してある) の $\beta (= 2/5)$ 乗の分布。左図は初期に伸長している粒子対の、右図は収縮している粒子対のデータを表す。実線は、図 2 のフィッティングのデータを用いた慣性領域内において予想されるスケーリング則 (8)。

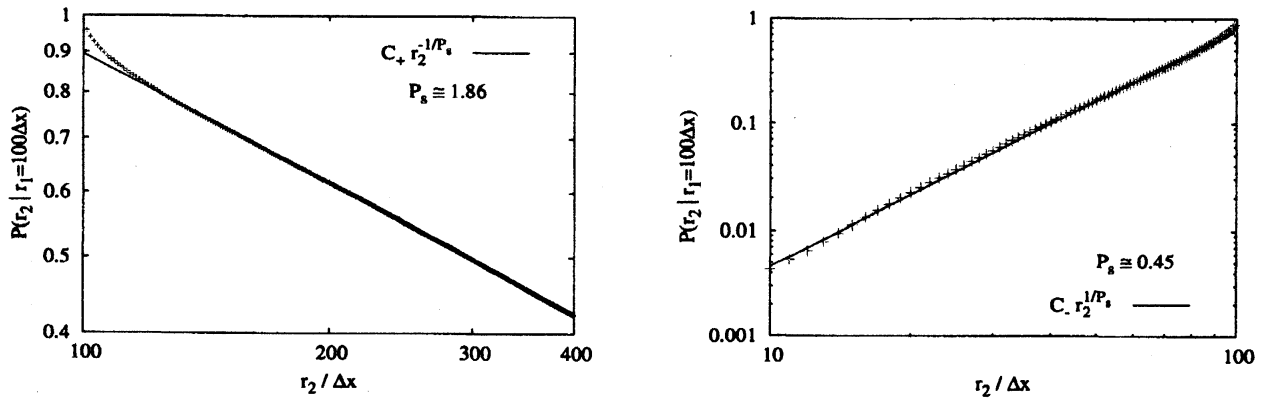


図 4: 持続確率 $P(r_2 | r_1)$ の移動距離に対する変化。左図は初期に伸長している粒子対の、右図は収縮している粒子対のデータを表す。実線は、式 (2) によるフィッティングを表す。ただし、初期相対距離付近のずれを補正するために式 (2) に係数を付けている。

持続確率を時間の関数と見るか相対距離の関数と見るかで持続パラメータ P_s の値が異なる原因は次のようなものであると考えられる。図3を見ればわかるように、反転時間と相対距離の変位との間には分布がある。持続確率を時間の関数とみなしたとき、持続確率は反転時間がある時刻よりも大きい粒子対の確率を表している。したがって、反転時間が大きくても相対距離の変位が小さな粒子対も含まれる可能性がある。2章で指摘したように持続パラメータは相対距離の変位と相対距離との間の比例係数となっている。相対距離はいま固定してあるので、相対距離の変位が小さければ持続パラメータも小さくなることがわかる。このようにして、持続確率を時間の関数として見ると持続パラメータの値が小さく見積もられることが理解される。

4.2 伸縮する粒子対の緩和

前節では、初期の相対速度の影響がどれほど持続するかを調べた。それでは見方を変えてどれほど時間が経てば粒子対が初期の記憶を失うのだろうか。本節では、先行研究[10, 11]に従って伸長する粒子対の割合や相対距離と相対速度のなす角度の時間変化を追うことによって、粒子対の緩和過程を調べることにする。

図5では、左側に伸長する粒子対の割合 $P(0 < \theta < \pi/2)$ の、右側に相対距離と相対速度のなす角度 θ の余弦の平均 $\langle \cos \theta \rangle$ の時間発展をプロットした。両方の図とも初期に伸縮している粒子対それぞれに対して統計を取った結果も併せて載せた。この図から $t = 0.6$ 付近より $P(0 < \theta < \pi/2)$ も $\langle \cos \theta \rangle$ も一定になることがわかる。これは、粒子対が乱流中の速度場に対して無相関な状態から相関のある一定の状態へと収束したことを意味している。また、両方のグラフとも $t = 0.6$ 付近で伸縮する粒子対に対応する値が一致している。この $t \simeq 0.6$ という値は、粒子対と乱流場との相関が、ある一定の平衡状態になる時間スケールを表していると解釈できる。ちなみに、3次元ナビエ-ストークス乱流の直接数値シミュレーション[11]によると $P(0 < \theta < \pi/2)$ は0.8よりやや大きく、 $\langle \cos \theta \rangle$ は約0.46にピークを持つことがわかっている。ただし、今回のシミュレーションの時間の範囲ではわからないが、時間が十分大きくなると、大部分の粒子対が慣性領域を越えて粒子対の相関がなくなるので $P(0 < \theta < \pi/2)$ は0.5に、 $\langle \cos \theta \rangle$ は0になると予想される。

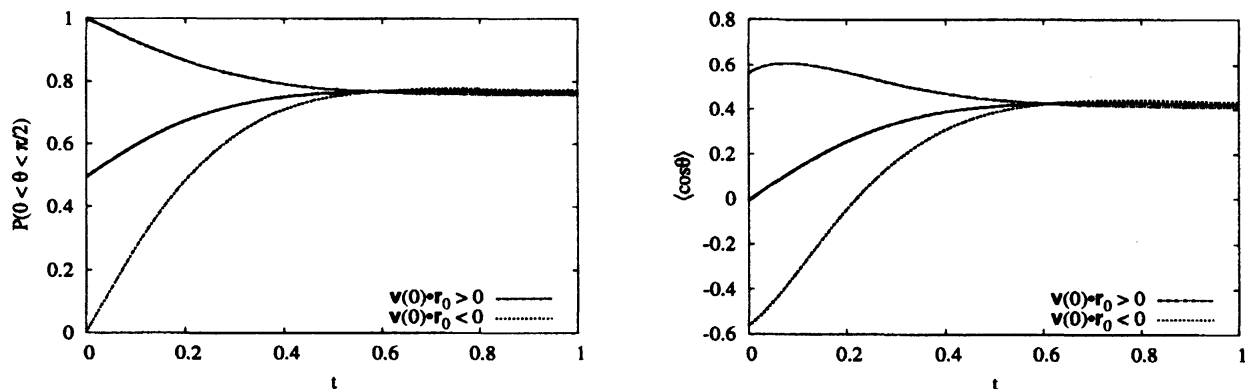


図5: 左：全粒子対中伸長する粒子対の割合の時間変化。右：相対距離と相対速度のなす角度の余弦の平均の時間変化。

図6は、角度 θ の分布の時間変化をプロットしたものである。図5のグラフが一定になっているところでは、角度分布は平衡状態になっていることがわかる。初期の角度分布が θ に対して一定になっていないのは(右図)、縦方向と横方向の相対速度が対称でないためである。これは、乱流中の粒子対が相関を持っていることによるものであり、論文[11]のような異なるスケーリング則を持つ乱流においても $P(\theta)|_{t=0}$ は θ に対して一定になっていない(ただし、角度分布の概形は異なる³)。

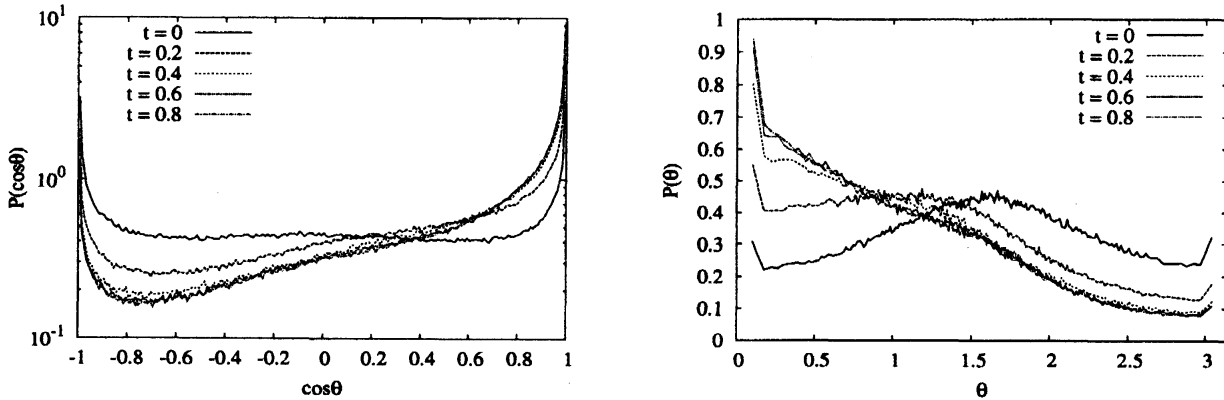


図6: 相対距離と相対速度のなす角度の分布の時間変化。左: 角度の余弦に対する分布。右: 角度(ラジアン)の分布。

4.3 バチェラー則からのずれの普遍性

最後に、最近の実験結果との比較を行う。実験[1, 2]では、粒子対の初期の弾道的運動が支配的なスケーリング則(バチェラー則)が長時間持続するという結果が得られている。さらに、このバチェラー則からのずれを初期相対距離の時間スケール(バチェラー時間)で規格化すると初期相対距離に依存しない普遍的な振る舞いが見られるとも主張されている。そこで我々は、このバチェラー則からのずれの普遍性が現在の2次元自由熱対流乱流系でも見られるかどうかを調べてみた。

図7の左図は、三つの初期相対距離に対してバチェラー則に相当するものをプロットしたものである。ここで、(実験の著者たちが主張する)バチェラー則⁴

$$\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle = \langle |\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)|^2 \rangle t^2 \quad (9)$$

は実線で示されてある。この図を見ると、実験事実[1, 2]に反して、初期相対距離によってバチェラー則からのずれの振る舞いが異なることがわかる。これは、慣性領域の有限性に起因するものと考えられる。すなわち、初期相対距離が小さいとき($r_0 = 50\Delta x$)は、慣性領域のスケーリング(リチャードソン則: $\langle r^2 \rangle \propto t^5$)へと向かい、大きいとき($r_0 = 200\Delta x$)は拡

³ 3次元ナビエ-ストークス乱流の場合、等方性を仮定すると慣性領域における相対速度の相対距離に対して垂直な成分の2乗は相対距離方向の成分の2乗の8/3倍である。これに対し、2次元自由熱対流乱流系ではこれは11/5倍となる。

⁴ このバチェラー則はバチェラーが導出した[12]本来の式とは異なる。しかし、ここでは実験との整合性を取るために彼らの主張するバチェラー則を採用した。

散領域のスケーリング (ブラウン運動: $\langle r^2 \rangle \propto t$) へと向かうことを意味しているものと考えられる。しかし、その中間にある初期相対距離 ($r_0 = 100\Delta x$) での一度下がってから上がるという振る舞いはどのように説明したらよいのだろうか。この謎を解く鍵は実は粒子対の初期の伸縮の効果にあった。

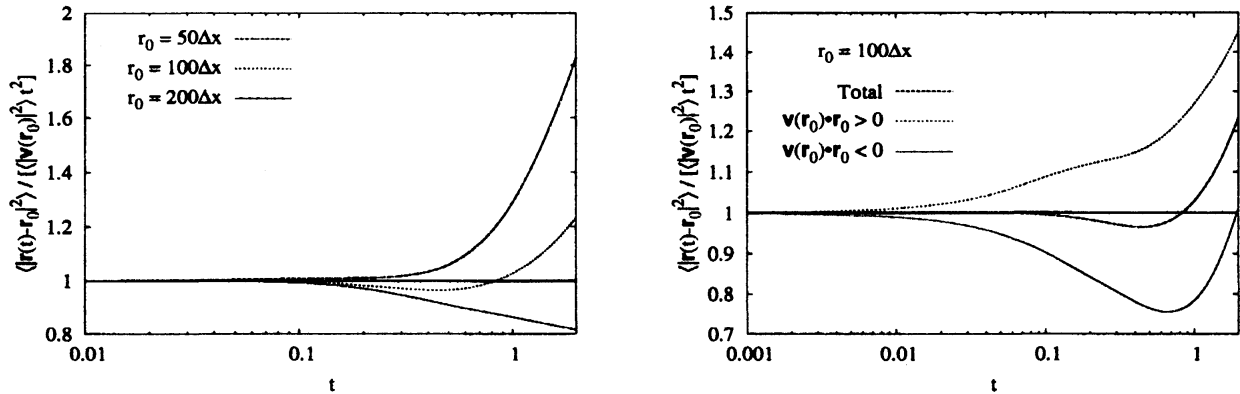


図 7: バチェラー則。左: 初期相対距離が $50\Delta x$ 、 $100\Delta x$ 、 $200\Delta x$ のとき。右: 初期相対距離が $100\Delta x$ のときの初期において伸縮している粒子対それぞれに対して個別に統計を取ったもの。

図 7 の右図は、 $r_0 = 100\Delta x$ のときの左図のグラフをさらに初期の粒子対の伸縮によって個別に統計を取ったものを示している。この図より伸縮それぞれに対する異なる振る舞いが明らかになる。つまり、初期に伸長している粒子対はバチェラー則より上に、収縮している粒子対は下にずれている。これは、バチェラー則 (9) の係数である 2 次速度構造関数 $\langle |v(r)|^2 \rangle$ が相対距離の増加関数であることに由来していると考えられる。図 7 の左図の $r_0 = 100\Delta x$ のときの振る舞いは、はじめは初期に収縮している粒子対の影響で下にずれるが、それらの粒子対が次第に伸長へと転じることによって後に全体として上にずれる、ということで説明できる。

5 おわりに

本研究では、2 次元自由熱対流乱流系における相対速度の相関の持続性を粒子対の伸縮の効果に焦点を当てて調べた。相対速度の時間相関についてはこれまで様々な文献で調べられてきたが [13, 14, 15]、今回我々は粒子対の伸縮という一次元的運動に簡約化して相対速度の相関を調べることを試みた。相対速度の相関を調べることは乱流相対拡散のモデリングに対しても有益であると思われる。例えば、我々は最近相対速度の有限な相関を採り入れた乱流相対拡散のモデル (自己相似電信モデル) を考案した [16]。

今回は初期相対距離を固定して粒子対の初期の記憶の持続性を求めたが、今後の課題は初期相対距離を変えてその依存性を見ることである。特に、実験 [1, 2] ではバチェラー則からのずれが初期相対距離の大きさを持つ渦の相関時間の慣性領域におけるスケーリング則に従うことが主張されている。今後我々はこのスケーリング則が 2 次元自由熱対流乱流の直接数値シミュレーションでも得られるかを確かめる予定である。しかし、彼らの実験では慣性領域のスケーリング則 (リチャードソン則) が見えていないので、十分な大きさの慣性領域が存

在しているのかは依然として疑わしい。本研究でも、有限な慣性領域がネックとなって異なる初期相対距離に対して異なる振る舞いが見られたが、慣性領域が十分広ければ(つまり粘性領域や拡散領域の影響を分離することができれば)何らかの普遍性が見られる可能性がある。今後は慣性領域が十分広がった乱流の実験やシミュレーションが必要とされるだろう。

本研究の数値計算は京都大学基礎物理学研究所の計算機システムを用いて実行した。

参考文献

- [1] M. Bourgoin, N. T. Ouellette, H. Xu, J. Berg and E. Bodenschatz, "The role of pair dispersion in turbulent flow," *Science* **311** 835 (2006).
- [2] N. T. Ouellette, H. Xu, M. Bourgoin and E. Bodenschatz, "An experimental study of turbulent relative dispersion models," *New J. Phys.* **8** 109 (2006).
- [3] I. M. Sokolov, "Two-particle dispersion by correlated random velocity fields," *Phys. Rev. E* **60** 5528 (1999).
- [4] I. M. Sokolov, J. Klafter, and A. Blumen, "Ballistic versus diffusive pair dispersion in the Richardson regime," *Phys. Rev. E* **61**, 2717 (2000).
- [5] G. Boffetta and I. M. Sokolov, "Statistics of two-particle dispersion in two-dimensional turbulence," *Phys. Fluids* **14** 3224 (2002).
- [6] T. Ogasawara and S. Toh, "Turbulent relative dispersion in two-dimensional free convection turbulence," *J. Phys. Soc. Jpn.* **75** 104402 (2006).
- [7] A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics* (MIT Press, Cambridge, MA, 1975), Vol. 2.
- [8] S. Toh and E. Suzuki, "Entropy cascade and energy inverse transfer in two-dimensional convective turbulence," *Phys. Rev. Lett.* **73** 1501 (1994).
- [9] A. Bistagnino, G. Boffetta, and A. Mazzino, "Lagrangian velocity structure functions in Bolgiano turbulence," *Phys. Fluids* **19**, 011703 (2007).
- [10] P. K. Yeung, "Direct numerical simulation of two-particle relative diffusion in isotropic turbulence," *Phys. Fluids* **6**, 3416 (1994).
- [11] P. K. Yeung and M. S. Borgas, "Relative dispersion in isotropic turbulence. Part 1. Direct numerical simulations and Reynolds-number dependence," *J. Fluid Mech.* **503**, 93 (2004).
- [12] G. K. Batchelor, "The application of the similarity theory of turbulence to atmospheric diffusion," *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **76** 133 (1950).
- [13] M. C. Jullien, J. Paret, and P. Tabeling, "Richardson Pair Dispersion in Two-Dimensional Turbulence," *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2872 (1999).
- [14] S. Goto and J. C. Vassilicos, "Particle pair diffusion and persistent streamline topology in two-dimensional turbulence," *New J. Phys.* **6** 65 (2004).
- [15] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, B. J. Devenish, A. Lanotte, and F. Toschi, "Lagrangian statistics of particle pairs in homogeneous isotropic turbulence," *Phys. Fluids* **17**, 115101 (2005).
- [16] T. Ogasawara and S. Toh, "Model of turbulent relative dispersion: A self-similar telegraph equation," *J. Phys. Soc. Jpn.* **75** 083401 (2006).