

退化主系列表現について

京都大学大学院理学研究科 池田 保 (IKEDA, TAMOTSU)

Siegel Eisenstein の Fourier 係数にあらわれる Siegel series の研究は志村、北岡、桂田ら ([9], [10], [6], [7]) によって研究されている。ここでは、表現論的な見地から p -進体上の古典群の退化主系列表現の degenerate Whittaker function と Siegel series (singular series) の関係について述べる。退化 Whittaker 関数の関数等式は Kudla, Sweet ([4], [8], [11]) による。これにより、Siegel series の桂田の関数等式 ([6]) の別証明が得られる。

1. SIEGEL SERIES

k を代数体、 $\mathbb{A}$ をその adèle 環とする。 $\mathbb{A}/k$ の自明でない additive character $\psi = \prod_v \psi_v$ を固定しておく。

k 上定義された代数群 $G = \mathrm{Sp}_n$ とその部分群を次のように定義する。

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n \mid A \in \mathrm{GL}_n \right\}$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{GL}_n \right\} \simeq \mathrm{GL}_n$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid B - {}^t B \in M_n(k) \right\} \simeq \mathrm{Sym}_n(k)$$

N は対称行列の空間 $\mathrm{Sym}_n(k)$ と同一視する。 $\mathbf{K} \subset \mathrm{Sp}_n(\mathbb{A})$ を standard maximal compact subgroup とすると、Iwasawa decomposition $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})\mathbf{K}$ が成り立つ。

Global な退化主系列表現

$$I(s) = \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})} |*|^s$$

の $\mathbf{K}$ 上恒等的に 1 になる section $f_0^{(s)}$ を

$$f_0^{(s)}(g) = |\det A|^{s+(n+1)/2},$$

$$g = pk, \quad p = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \in P(\mathbb{A}), k \in \mathbf{K}$$

により定義する。この section $f_0^{(s)}$ から得られる Eisenstein 級数を

$$E(s, g) = \sum_{\gamma \in P \backslash G} f_0^{(s)}(\gamma g), \quad \mathrm{Re}(s) \gg 0$$

$T = {}^tT \in \text{Sym}_n(k)$, $\det T \neq 0$ を非退化対称行列とすると、 T に関する Fourier 係数を

$$W_T(s, g) = \int_{N(k) \backslash N(A)} E(s, yg) \overline{\psi_T(y)} dy,$$

$$\psi_T \left(\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \psi(\text{tr}(Ty)).$$

により定義すると、 $\text{Re}(s) \gg 0$ のとき

$$\begin{aligned} W_T(s, g) &= \int_{N(A)} f_0^{(s)}(wyg) \overline{\psi_T(y)} dy \\ &= \prod_v W_{T,v}(s, g_v), \quad g = (g_v)_v \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$W_{T,v}(s, g_v) = \int_{N(k_v)} f_0^{(s)}(wyg_v) \overline{\psi_{T,v}(y)} dy,$$

$$\psi_{T,v} \left(\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \psi_v(\text{tr}(Ty)).$$

古典的な意味での Fourier 係数は $W_T(s, g)$ の原点での値によって得られる。

W_T は g の関数と見た時、退化 Whittaker vector の空間

$$\text{Hom}_G(I(s), \text{Ind}_N^G \psi_T)$$

の元を定義する。Karel により、この空間の次元は高々 1 であることが知られている。

このように Eisenstein 級数の Fourier 係数は退化 Whittaker 関数の原点における値なので、次のように定義することができる。

F を non-archimedean local field、 $\mathfrak{o}_F$, $\mathfrak{p}_F$ を F の整数環とその極大イデアル、 q を F の剰余体の位数、 ψ を F の order 0 の additive character とする。 $f_0^{(s)}$, T , $I(s)$ などを F 上に定義された局所的な対応物とする。このとき、Siegel series $b(T, s)$ を

$$b(T, s + \frac{n+1}{2}) = \int_N f_0^{(s)}(wy) \overline{\psi_T(y)} dy$$

によって定義する。 T が half-integral ということを $2T$ が integral で T の対角成分が integral であることと定義すれば、 T が half-integral でないとき $b(T, s)$ は恒等的に 0 となる。

退化主系列表現 $I(s)$ から $I(-s)$ への intertwining operator $M(s)$ をつぎのように定義する。

$$M(s)f(g) = \int_N f(wyg) dy, \quad f \in I(s)$$

によって定義する。この積分は $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ のとき絶対収束し、全 s 平面に有理型に解析接続される。Standard maximal compact subgroup K 上で恒等的に 1 になる関数 $f_0^{(s)} \in I(s)$ に対しては $M(s)$ の作用は

$$M(s)f_0^{(s)} = |2|^{n(n-1)/4} \frac{\zeta_F(s - (n-1)/2)}{\zeta_F(s + (n+1)/2)} \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\zeta_F(2s - n + 2i)}{\zeta_F(2s + n + 1 - 2i)}$$

で与えられる。ただし $\zeta_F(s) = (1 - q_F^{-s})^{-1}$.

また、退化 Whittaker vector $W_T(s) \in \operatorname{Hom}_G(I(s), \operatorname{Ind}_N^G \psi_T)$ を

$$W_T(s)f(g) = \int_{N(k_v)} f(wyg) \overline{\psi_T(y)} dy$$

によって定義する。この時、退化 Whittaker vector の空間の一意性により、 $s \in \mathbb{C}$ の有理型関数 $\kappa(s)$ が存在して

$$W_T(-s) \circ M(s) = \kappa_T(s) \circ W_T(s)$$

が成り立つ。次節でこの $\kappa_T(s)$ を計算する。

2. 概均質 VECTOR 空間の関数等式との関係

引き続き F を non-archimedean local field とし、 $M = \operatorname{GL}_n$, $N = \operatorname{Sym}_n(F)$ とする。 $m \in M$ は N に $X \mapsto mX^t m$ により作用し、この作用で N は概均質ベクトル空間となる。この作用による open orbit を $Y_1, Y_2, \dots, Y_t$ とする。

N 上の Schwartz function $\Phi \in \mathcal{S}(N)$ に対し、local zeta function $Z(s, \Phi)$ $Z_i(s, \Phi)$ を

$$Z(S, \Phi) = \int_N \Phi(x) |\det x|^s d^\times x,$$

$$Z_i(S, \Phi) = \int_{Y_i} \Phi(x) |\det x|^s d^\times x,$$

$$d^\times x = |\det x|^{(n+1)/2} dx$$

により定義する。このとき、 $s \in \mathbb{C}$ の有理型関数 $e_i(s)$ があって、局所関数等式

$$Z(s, \Phi) = \sum_{i=1}^t e_i(s) Z_i\left(\frac{n+1}{2} - s, \hat{\Phi}\right)$$

が成り立つ。ただし、Fourier 変換 $\hat{\Phi}$ は

$$\hat{\Phi}(x) = \int_N \Phi(y) \psi(\operatorname{tr}(xy)) dy$$

で定義される。また、 N の Haar measure dy はこの Fourier 変換が L^2 -norm を保存するように正規化しておくものとする。

$\Phi \in \mathcal{S}(N)$ に対して $f_{\Phi}^{(s)} \in I(s)$ を $f_{\Phi}^{(s)}(wy) = \Phi(y)$, $(y \in N)$ となるように定める。すなわち

$$f_{\Phi}^{(s)}(g) = \begin{cases} |\det A|^{s+(n+1)/2} \Phi(y) & \text{if } g = pwy, p = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix}, y \in N \\ 0 & g \notin PwN. \end{cases}$$

このとき、対応する退化 Whittaker 関数の原点での値は

$$\begin{aligned} W_T(s) f_{\Phi}^{(s)}(\mathbf{1}_{2n}) &= \int_N \phi(y) \overline{\psi(\text{tr}(Ty))} dy \\ &= \widehat{\Phi}(-T) \end{aligned}$$

となる。

退化 Whittaker 関数の関数等式から

$$W_T(-s) \circ M(s) f_{\Phi}^{(s)}(\mathbf{1}_{2n}) = \kappa_T(s) \widehat{\Phi}(-T)$$

が成り立つ。

左辺を計算するため、 $M(s) f_{\Phi}^{(s)}$ を計算する。 $x \in N \simeq \text{Sym}_n(F)$ に対して $w \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は

$$w \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^{-1} & 1 \\ 0 & -x \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & -x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と分解されるので

$$\begin{aligned} M(s) f_{\Phi}^{(s)}(wy) &= \int_N f_{\Phi}^{(s)}(wxwy) dx \\ &= \int_N |\det x^{-1}|^{s+(n+1)/2} \Phi(-x^{-1} + y) dx \\ &= \int_N |\det x|^s \Phi(x + y) d^{\times} x \end{aligned}$$

となる。 $\Phi_y(x) = \Phi(y + x)$ とおけば上の式の右辺は

$$\int_N |\det x|^s \Phi_y(x) d^{\times} x = Z(s, \Phi_y)$$

と表される。これを使うと、

$$\begin{aligned} W_T(-s) \circ M(s) f_{\Phi}^{(s)}(\mathbf{1}_{2n}) &= \int_N Z(s, \Phi_y) \overline{\psi(\text{tr}(Ty))} dy \\ &= \sum_{i=1}^t e_i(s) \int_N Z\left(\frac{n+1}{2} - s, (\Phi_y)^{\wedge}\right) \overline{\psi(\text{tr}(Ty))} dy \end{aligned}$$

$N \simeq \text{Sym}_n(F)$ の compact open subgroup $B \neq \emptyset$ をとる。 B の dual lattice を $\widehat{B}$ で表わし、 B の特性関数を $\text{char}_B(x)$ で表す。

$$\begin{aligned}
& \int_N Z\left(\frac{n+1}{2} - s, (\Phi_y)^\wedge\right) \overline{\psi(\text{tr}(Ty))} dy \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{y \in \mathfrak{p}_F^{-r} B} \int_{x \in Y_i} |\det x|^{-s} \widehat{\Phi}(x) \overline{\psi(\text{tr}(yx))} \psi(\text{tr}(Ty)) dx dy \\
&= \int_{x \in Y_i} |\det x|^{-s} \widehat{\Phi}(x) \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{y \in \mathfrak{p}_F^{-r} B} \overline{\psi(\text{tr}(y(T+x)))} dx dy \\
&= \int_{x \in Y_i} |\det x|^{-s} \widehat{\Phi}(x) \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{y \in \mathfrak{p}_F^{-r} B} \overline{\psi(\text{tr}(y(T+x)))} dx dy \\
&= \int_{Y_i} |\det x|^{-s} \widehat{\Phi}(x) \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{y \in N} \text{char}_{\mathfrak{p}_F^{-r} B}(y) \overline{\psi(\text{tr}(y(T+x)))} dx dy
\end{aligned}$$

$\text{char}_{\mathfrak{p}_F^{-r} B}(x)$ の Fourier 変換は $\text{Vol}(\mathfrak{p}_F^{-r} B) \text{char}_{\mathfrak{p}_F^r \widehat{B}}(x)$ で与えられるから、

$$\begin{aligned}
& \int_N Z\left(\frac{n+1}{2} - s, (\Phi_y)^\wedge\right) \overline{\psi(\text{tr}(Ty))} dy \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Vol}(\mathfrak{p}_F^r \widehat{B})^{-1} \int_{Y_i} |\det x|^{-s} \widehat{\Phi}(x) \text{char}_{\mathfrak{p}_F^r \widehat{B}}(x+T) dx \\
&= \begin{cases} |\det T|^{-s} \widehat{\Phi}(-T) & \text{if } T \in Y_i \\ 0 & \text{if } T \notin Y_i \end{cases}
\end{aligned}$$

従って、退化 Whittaker 関数の関数等式にあらわれる $\kappa_T(s)$ は $T \in Y_i$ のとき、

$$\kappa_T(s) = |\det T|^{-s} e_i(s)$$

で与えられる。

$e_i(s)$ は Sweet [11] により計算されていて、その具体的な形は $T \in Y_i$ のとき、 n が奇数ならば

$$\begin{aligned}
e_i(s) &= \varepsilon'(s - \frac{n-1}{2}, 1, \psi)^{-1} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \varepsilon'(2s - n + 2i, 1, \psi)^{-1} \\
&\quad \times |2|_F^{-(n-1)s + (n(n-1)/4)} \langle -1, \det T \rangle^{(n-1)/2} \langle -1, -1 \rangle^{(n^2-1)/8} \epsilon_T
\end{aligned}$$

n が偶数のときは

$$\begin{aligned}
e_i(s) &= \varepsilon'(s - \frac{n-1}{2}, 1, \psi)^{-1} \prod_{i=1}^{n/2} \varepsilon'(2s - n + 2i, 1, \psi)^{-1} \\
&\quad \times |2|_F^{-ns + (n(n-1)/4)} \varepsilon(\frac{1}{2}, \chi_T, \psi)^{-1} \varepsilon'(s + \frac{1}{2}, \chi_T \psi)
\end{aligned}$$

で与えられる。ここで $\langle *, * \rangle$ は Hilbert symbol で ϵ_T は対称行列 T の Hasse invariant (T が対角行列 $\text{diag}(t_i)$ のとき、 $\epsilon_T = \prod_{i < j} \langle t_i, t_j \rangle$) で、

$$\chi_T(x) = \langle (-1)^{n/2} \det T, x \rangle,$$

$$\varepsilon(s, \chi) = \varepsilon(s, \chi, \psi) \frac{L(1-s, \chi)}{L(s, \chi)}$$

である。

これから $b(T, s)$ の関数等式が導かれる。 $b(T, s)$ は q^{-s} の有理関数で、

$$b(T, s) = \gamma(T, q^{-s}) F(T, q^{-s}), \quad \gamma(T, X), F(T, X) \in \mathbb{Z}[X],$$

$$\gamma(T, q^{-s}) = \begin{cases} \zeta_F(s)^{-s} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \zeta_F(2s-2i)^{-1} & 2|n \\ \zeta_F(s)^{-s} L(s - \frac{n}{2}, \chi_T) \prod_{i=1}^{n/2} \zeta(2s-2i)^{-1} & 2 \nmid n \end{cases}$$

という形であることが知られて ([7], [9]) いる。これから、 $F(T, X)$ は次の形の関数等式を満たすことがわかる。

n が奇数のとき、

$$F(T, q^{-n-1} X^{-1}) = \zeta(T) (q^{-(n+1)/2} X)^{-\text{ord}(2^{n-1} \det T)} F(T, X),$$

ここで

$$\zeta(T) = \langle -1, \det T \rangle^{(n-1)/2} \langle -1, -1 \rangle^{(n^2-1)/8} \epsilon_T$$

は T が F 上 split するとき 1 でそうでないとき -1 の値を取る。

n が偶数のときは

$$F(T, q^{-n-1} X^{-1}) = (q^{(n+1)/2} X)^{-\text{ord}(\mathfrak{D}_T^{-1} 2^n \det T)} F(T, X)$$

が成り立つ。ここで $\mathfrak{D}_T$ は χ_T の conductor である。 $F = \mathbb{Q}_p$ のとき、この式は桂田の関数等式 ([6]) と一致する。

3. UNITARY 群の場合

以上の方法は unitary 群に対しても同様に適用することができる。この場合の退化 Whittaker 関数の関数等式は Kudla, Sweet ら ([4], [8]) によって計算されている。ここでは計算の結果だけを述べることにする。

F を局所体、 E/F を 2 次拡大または $E = F \oplus F$ とする。 $\mathfrak{D}_{E/F}$ を E/F の discriminant ideal とする。 E/F に対応する $F^\times$ の指標を χ で表す。

$$\xi_{E/F} = \begin{cases} 1 & E = F \oplus F \\ -1 & E/F \text{ が不分岐 2 次拡大のとき} \\ 0 & E/F \text{ が分岐 2 次拡大のとき} \end{cases}$$

とおく。 σ を $\text{Gal}(E/F)$ の生成元 (E が体のとき)、または $\sigma(f_1, f_2) = (f_2, f_1)$ ($E = F \oplus F$ のとき) として、 m 次の Hermite 行列の空間を

$$\text{Herm}_m(E/F) = \{x \in M_m(E) \mid \sigma({}^t x) = x\}$$

で定義する。 $E = F \oplus F$ ならば $\text{Herm}_m(E/F) \simeq M_m(F)$ である。

m 次 Hermite 行列 H に対して siegel series $b(H, s)$ を

$$b(H, s) = \int_{\text{Herm}_m(E/F)} |\nu(R)|^{-s} \psi(\text{tr}_{E/F} \circ \text{tr}(HR)) dR, \quad \text{Re}(s) \gg 0$$

により定義する。ここで $\nu(R)$ は R の elementary divisor (F の ideal になる) の分母の積である。

このとき、 $b(H, s)$ は q^{-s} の有理関数で、

$$b(H, s) = \gamma(E/F, q^{-s}) F(H, q^{-s}), \quad \gamma(E/F, X), F(H, X) \in \mathbb{Z}[X],$$

$$\gamma(E/F, q^{-s}) = \prod_{i=1}^{[(m+1)/2]} (1 - q^{2i} X) \prod_{i=1}^{[m/2]} (1 - q^{2i-1} \xi_{E/F} X).$$

という形であることが知られて ([10]) いる。このとき、 $F(H, X)$ は次の形の関数等式を満たす。

$m = 2n + 1$ が奇数のとき、

$$F(H, q^{-2m} X^{-1}) = (q^m X)^{-\text{ord}(\mathfrak{D}_{E/F}^n \det H)} F(H, X),$$

$m = 2n$ が偶数のとき、

$$F(H, q^{-2m} X^{-1}) = \chi((-1)^n \det H) (q^m X)^{-\text{ord}(\mathfrak{D}_{E/F}^n \det H)} F(H, X)$$

が成り立つ。

REFERENCES

- [1] S. Böcherer, *Über die Fourierkoeffizienten der Siegelscher Eisensteinreihen*, Manuscripta Math. **45** (1984) 273–288.
- [2] P. Feit, *Poles and residues of Eisenstein series for symplectic and unitary groups*, Memoirs of the AMS. **346** (1986).
- [3] E. Freitag, *Siegelsche Modulformen*, Springer-Verlag, (1983).
- [4] M. Harris, S. Kudla, W. J. Sweet, *Theta dichotomy for unitary groups*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996) 941–1004.
- [5] T. Ikeda, *On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree $2n$* , Ann. Math. **154** (2001) 641–681.
- [6] H. Katsurada, *An explicit formula for Siegel series*, Amer. J. Math. **121** (1999) 415–452.
- [7] Y. Kitaoka, *Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms*, Nagoya Math. J. **95** (1984) 73–84.
- [8] M. Harris, S. Kudla, W. J. Sweet, *Degenerate principal series representations for $U(n, n)$* , Israel J. Math. **98** (1997) 253–306.
- [9] G. Shimura, *Euler products and Fourier coefficients of automorphic forms on symplectic groups*, Inv. Math. **116** (1994) 531–576.
- [10] G. Shimura, *Euler products and Eisenstein series*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **93** the American Mathematical Society, Providence, RI, (1997).
- [11] W. J. Sweet, *A computation of the gamma matrix of a family of p -adic zeta integrals*, J. Number Theory **55** (1995) 222–260.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, KYOTO UNIVERSITY, KITASHIRAKAWA, KYOTO, 606-8502, JAPAN

E-mail address: ikeda@kusm.kyoto-u.ac.jp