

Generalized Longo-Rehren subfactors

東京大学・数理: 河東泰之 (Yasuyuki Kawahigashi)

e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

Longo-Rehren は, M 上の有限個の morphism の system $\{\lambda_i\}$ から, subfactor $M \otimes M^{\text{op}} \subset R$ を作る方法を与えた. これを Longo-Rehren subfactor という. ここで, R - R morphism の system を見ると, 元の system の “quantum double” になるということが多くの人によって研究されている. 特に, R - R morphism の system は, 非退化な braiding を持つことがわかっている. ([2] およびそこでの引用文献を参照のこと.) そこで, もとから system $\{\lambda_i\}$ が非退化な braiding を持つ場合に何が起こるかを考えてみると, R - R morphism の system はもとの system を単に 2 重に水増ししたものであることがわかっている. さらにこのような場合の Longo-Rehren subfactor は, 一回 basic construction を行つて, dual に移つてもやはり Longo-Rehren subfactor である.

一方, Longo-Rehren によって定義され, Xu, Böckenhauer-Evans によって詳しく調べられた α -induction の理論が, Longo-Rehren subfactor の研究とよく似ていることも, [2] で明らかになった. そこで我々は, [1] で α -induction と Longo-Rehren subfactor の関係について調べた. まず設定を述べよう. (詳しくは, [1] とそこでの引用文献を見ていただきたい. ここでは簡略に述べる.) $N \subset M$ を subfactor とし, N - N morphism の system が braiding を持つとする. このとき, system の endomorphism λ は, braiding を用いて, M の endomorphism $\alpha_\lambda^\pm$ にいつせいに延長される. ここで $\pm$ は braiding の choice を表す. この $\alpha_\lambda^\pm$ の既約分解から生成される M - M morphism の system を考える. 今 braiding は非退化としよう. [1] の中に次の結果がある.

この M - M system からできる Longo-Rehren subfactor によって得られる quantum double system は, もとの N - N system の単なる “double” と同型であり, この subfactor の canonical endomorphism はこの同型で $\sum Z_{\lambda\mu} \lambda \otimes \mu^{\text{op}}$ に移る.

ただしここで, $Z_{\lambda\mu} = \langle \alpha_\lambda^+, \alpha_\mu^- \rangle$ である. 一方最近, Rehren [3] は, generalized Longo-Rehren subfactor の構成を行つた. 彼は一般に endomorphism の system がいつせいに延長される状況を考えているが, 今のところそのような延長の一般論が知られているのは α -induction (とその簡単な変形) だけである. このときは彼の定理は次のように与えられる.

上のような α -induction に対し, $\sum Z_{\lambda\mu} \lambda \otimes \mu^{\text{op}}$ は $N \otimes N^{\text{op}}$ 上の dual canonical

endomorphism である.

また, そこで Rehren が実際に構成した subfactor を generalized Longo-Rehren subfactor という.

このことと, 上のもとから非退化な braiding のあるときの Longo-Rehren subfactor の現れ方を見ると, α -induction で生じた M - M system から Longo-Rehren subfactor を作って dual に移行すると, 上の Rehren による generalized Longo-Rehren subfactor ができているのではないかと考えられる. 今回は計算によってそのとおりであることを確認した. それにはまず, α -induction で生じた M - M system から作った Longo-Rehren subfactor から dual に移り, そこでの canonical endomorphism を [2] の方法で計算する. これは簡単だが, この形は generalized Longo-Rehren の方と intertwiner の形が違っているのものでそのままでは比較できない. そこで, intertwiner の計算を行うことによって比較できるようにする. この比較の際に “twist” が現れるがこれが容易に消せることは Rehren によって指摘された. これによって, [3] の最後であげられている予想が否定的に解ける.

引用文献は多くなりすぎるので, ごくわずかししか挙げていない. 詳しくは, [1] の引用文献表を見ていただきたい.

References

- [1] J. Böckenhauer, D. E. Evans, Y. Kawahigashi, *Longo-Rehren subfactors arising from α -induction*, preprint, math.OA/0002154.
- [2] M. Izumi, *The structure of sectors associated with the Longo-Rehren inclusions I. General theory*, Commun. Math. Phys. **213**, 127–179 (2000).
- [3] K.-H. Rehren, *Canonical tensor product subfactors*, Commun. Math. Phys. **211**, 395–406 (2000).