

Pauli-Jordan の $\mathcal{D}$ 関数の量子重力への拡張

京大教理研 中西 襄 (Noboru Nakanishi)

Pauli-Jordan の $\mathcal{D}$ 関数は, 不変 $\mathcal{D}$ 関数ともいわれ, 相対論的場の量子論において質量ゼロの粒子の場の x 次元交換関係に現れる基本的な超関数である. 不変 $\mathcal{D}$ 関数は次の Cauchy 問題によって定義することができる:

$$(1) \quad \begin{cases} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu^x \partial_\nu^x \mathcal{D}(x-y) = 0 \\ \mathcal{D}(x-y)|_0 = 0 \\ \partial_0^x \mathcal{D}(x-y)|_0 = -\delta^3(x-y) \end{cases}$$

ここに, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ (Minkowski 計量), $|_0$ は $|_{x^0=y^0}$ の略, 添字の x は微分が x についてなされることを示す. $\delta^3(x-y)$ は空間 3 次元 δ 関数である. 単位系は自然単位 $\hbar = c = 1$ を採る.

さて, (1) の解は 50 年以上前からよく知られていて,

$$(2) \quad \mathcal{D}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int d^4p \, \epsilon(p_0) \delta(p^2) e^{-ip(x-y)}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \epsilon(x^0 - y^0) \delta((x-y)^2)$$

で与えられる. ここに $p^2 = \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ など, また $\epsilon(z) \equiv \text{sgn } z$; $\epsilon(p_0) \delta(p^2)$ は

$$(3) \quad (2|p|)^{-1} (\delta(p_0 - |p|) - \delta(p_0 + |p|))$$

と同義である.

$\mathcal{D}(x-y)$ は Poincaré 群 (Lorentz 群 プラス 並進群) のもとに不変であり, かつ

$$(4) \quad \mathcal{D}(y-x) = -\mathcal{D}(x-y)$$

である.

次に, この $\mathcal{D}(x-y)$ を Minkowski 空間から曲った時空すなわち擬 Riemann 空間に拡張する. $\eta_{\mu\nu}$ に対応する計量は, 与えられた関数 $g_{\mu\nu}(x)$ である. $g = \det g_{\mu\nu}$, $\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$ とおく. d'Alembertian は

$$(5) \quad \sqrt{-g}^{-1} \partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu$$

となる. そこで (1) を拡張した次の Cauchy 問題により曲った時空における $\mathcal{D}$ 関数 $\mathcal{D}(x, y)$ を定義する:

$$(6) \quad \begin{cases} \partial_\mu^x \tilde{g}^{\mu\nu}(x) \partial_\nu^x \mathcal{D}(x, y) = 0 \\ \mathcal{D}(x, y)|_0 = 0 \\ \partial_0^x \mathcal{D}(x, y)|_0 = -(\tilde{g}^{00}(x))^{-1} \delta^3(x-y) \end{cases}$$

(6) の解は次のようにして構成できる.

(5) の基本解で前方光錐内にのみ台をもつものを $\mathcal{D}_R(x, y)$

(retarded), 後方光錐内におみ台をもつものを $\mathcal{Q}_A(x, y)$ (advanced) とする. これは geodesically convex domain において次の形で与えられることが知られている:

$$(7) \quad \mathcal{Q}_{R/A}(x, y) = (2\pi)^{-1} [\mathcal{U}(x, y) \delta_{\pm}(\Gamma(x, y)) + \mathcal{V}(x, y) \theta_{\pm}(\Gamma(x, y))]$$

ここに $\Gamma(x, y)$ は null geodesic の自乗, $\delta_{\pm}$ は前方[後方]光錐のみに台を制限した δ 関数, $\theta_{\pm}(\Gamma)$ は前方[後方]光錐内でのみ +1 で他では 0 である. $\Gamma(x, y)$, $\mathcal{U}(x, y)$, $\mathcal{V}(x, y)$ はいずれも x と y の対称関数なので,

$$(8) \quad \mathcal{Q}_R(x, y) = \mathcal{Q}_A(y, x)$$

が成立する.

(6) を満たす $\mathcal{Q}(x, y)$ は

$$(9) \quad \mathcal{Q}(x, y) = -\mathcal{Q}_R(x, y) + \mathcal{Q}_A(x, y)$$

で与えられる. 実際 $\mathcal{Q}(x, y)$ は明らかに (6) の第 1 式を満たす. また (6) の 2 つの初期条件を満足することは, (7) を用いて具体的に確かめることができる. そこで (8) により

$$(10) \quad \mathcal{Q}(y, x) = -\mathcal{Q}(x, y)$$

であることがわかる.

さて, この $\mathcal{Q}$ 関数 $\mathcal{Q}(x, y)$ を量子重力に拡張するのだが, その前に重力場の共変的正準量子論を簡単に紹介しておく.

Einstein の重力定数を $\kappa=1$ とおく.

ゲージ理論や一般相対論のように、局所対称性(任意関数を含む変換に対する不変性)をもつ理論は、そのままでは量子化できないことが知られている。それゆえ Lagrangian 密度にゲージ固定項というものを導入する。さらに、このままでは確率解釈可能な理論にはならないので、BRS (Becchi-Rouet-Stora) 対称性と呼ばれる反交換的対称性が成立するように FP (Faddeev-Popov) ghost 項というものを導入しなければならぬ。重力場の場合、次のような Lagrangian 密度から出発すれば最も美しい理論が得られる:

$$(11) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} R - \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu b_\nu - i \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{c}_\rho \partial_\nu c^\rho + \mathcal{L}_M$$

ここに右辺第1項は Einstein-Hilbert の一般相対論の Lagrangian 密度、第2項はゲージ固定項で B 場と呼ばれる $b_\rho(x)$ という新しい場を含む。第3項は Fermi 統計に従う FP ghost $c^\sigma(x)$ と $\bar{c}_\tau(x)$ の Lagrangian 密度、 $\mathcal{L}_M$ は重力場以外の場の Lagrangian 密度である。B 場を導入したおかげで $\int d^4x \mathcal{L}$ は GL(4) 不変になっている。

正準量子化を行なうと、 $g_{\mu\nu}(x)$, $b_\rho(x)$, $c^\sigma(x)$, $\bar{c}_\tau(x)$ などすべて量子場すなわち作用素値超関数となる。この理論の極めて著しい特徴は、時空座標 x^μ と、新しく導入された3つの量子場 $b_\rho(x)$, $c^\sigma(x)$, $\bar{c}_\tau(x)$ がすべて d'Alembert 方程式

$$(12) \quad \partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu X = 0 \quad (X = x^\mu, b_\rho, c^\sigma, \bar{c}_\tau)$$

を満たすということである。(Xはある11みで時空座標の拡張になっているので16次元超座標と呼ぶ。) それゆえ、 $\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu X$ が保存流(4次元 divergence がゼロ)であるばかりでなく、XとYという2つの16次元超座標をもってきたとき、 $\tilde{g}^{\mu\nu}(\partial_\nu X \cdot Y - X \partial_\nu Y)$ を作るとこれもまた保存流となる。このことから16個の生成子 $P(X)$ と 128個の生成子 $M(X, Y)$ とが存在することがわかる。ここにこれらはそれぞれの保存流のゼロ成分を3次元空間積分したもので、XとかYとかはここではたんに μ や ν などと同じく index の11みで書かれている。

$P(X)$ と $M(X, Y)$ の全体は1つの超代数(graded Lie algebra)をつくる。その構造が極めて Poincaré 代数とよく似ているので、それを16次元 Poincaré 的超代数と呼ぶ。 $P(b_\mu)$ は並進生成子 P_μ と同じであり、 $gl(4)$ の生成子や BRS 対称性の生成子などは $M(X, Y)$ から構成できる。

量子重力のD関数 $\Delta(x, y)$ を定義するにあたって、次の基本仮定を明示しておく：

[1] 同時空点の量子場の積は(統計符号因子を除き)作用素の順序にはよらない。

[2] Cauchy 問題は係数が作用素値超関数のときでも一意的に解ける。

仮定[1]は Lagrangian を出発点とする場の量子論では不可避的である。この仮定は、積が(反)可換であるという意味ではなくて、同時空点での超関数の積という本来定義されていない量を、何らかの方法で正則化して定義したものはただ一通りに定まるということである。仮定[2]は、量子重力のようにあらわに解くことができない場合へ拡張するときにはどうしても必要である。

重力場の共変的正準量子論におけるD関数 $\Delta(x, y)$ は、(6)で定義する。ただし今度は $\bar{g}^{\mu\nu}(x)$ は与えられた関数ではなくて、理論的にきちんと定まっているはずの作用素値超関数であり、 $\Delta(x, y)$ との順序は勝手に入れかえることはできる。定義から次の諸性質が導かれる:

$$\begin{aligned} i) \quad & (\partial_0^x + \partial_0^y)^n \Delta(x, y)|_0 = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ & (\partial_0^x + \partial_0^y)^n \partial_0^x \Delta(x, y)|_0 = -(\partial_0)^n (\bar{g}^{00}(x))^{-1} \delta^3(x-y) \\ & \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

これは(6)の初期条件が $x^0 - y^0$ という1つの時間変数に対するものなので、もう1つの時間変数 $x^0 + y^0$ については自由に微分できることから従う。

$$ii) \quad (\partial_0^x)^m (\partial_0^y)^n \Delta(x, y)|_0 \quad (m, n=0, 1, 2, \dots) \text{ はすべて逐次計算できる。}$$

これは i) を用いればすぐにわかる。

$$\text{iii)} \quad \Delta(x, y) \overset{\leftarrow}{\partial}_\mu \hat{g}^{\mu\nu}(y) \overset{\leftarrow}{\partial}_\nu = 0$$

ただし $\overset{\leftarrow}{\partial}_\mu$ は左にかかると微分である。左辺の量はもちろんで $\partial_\mu^x \hat{g}^{\mu\nu}(x) \partial_\nu^x$ を左から作用させるとゼロになる。

従ってこの量とその ∂_0^x をとったものがともに初期値ゼロであれば仮定[2]により iii) が成り立つ。この初期値の計算は、仮定[1]のおかげで ii) の結果を使ってやれる。

$$\text{iv)} \quad \Delta(y, x) = -\Delta^\dagger(x, y)$$

ただし $\dagger$ は Hermite 共役を示す。これは iii) と i) により $-\Delta^\dagger(y, x)$ が $\Delta(x, y)$ と同じ Cauchy 問題の解であることから従う。

v) 積分表示:

$$X(y) = \int d^3z \{ \partial_\nu X(z) \cdot \hat{g}^{0\nu}(z) \Delta(z, y) \\ - X(z) \hat{g}^{0\nu}(z) \partial_\nu^z \Delta(z, y) \}$$

$$\Delta(x, y) = \int d^3z \{ \partial_\nu^z \Delta(x, z) \cdot \hat{g}^{0\nu}(z) \Delta(z, y) \\ - \Delta(x, z) \hat{g}^{0\nu}(z) \partial_\nu^z \Delta(z, y) \}$$

右辺が z^0 に依存しないことが重要である。 $M(X, Y)$ の X, Y の一方または両方を Δ に置きかえたものが右辺の積分であって、 Δ が左から右へも $d'Alembert$ 方程式を満たすことにより、それは時間によらない。そこでとくに $z^0 = y^0$ とおくと、(6) の初期値により左辺が得られる。

vi) 16次元 Poincaré 的超代数に対する共変性:

$$i[P(X), \Theta(x, y)] = \eta(X, x^\lambda) (\partial_\lambda^x + \partial_\lambda^y) \Theta(x, y)$$

$$i[M(X, Y), \Theta(x, y)] = \eta(Y, x^\lambda) [X(x) \partial_\lambda^x \Theta(x, y) + \partial_\lambda^y \Theta(x, y) X(y)] - (X \leftrightarrow Y)$$

ただし $\eta(b_p, x^\lambda) = \delta_p^\lambda$, $\eta(X, x^\lambda) = 0$ for $X \neq b_p$.

証明は両辺の差が d'Alembert 方程式を満たし、その初期値と ∂_λ^x をとったものの初期値がともにゼロであることを量子場の交換関係を用いて示す。上の式は特別の場合として $\Theta(x, y)$ の affine 共変性を含んでいる。

以上のように、量子重力の $\Theta(x, y)$ は Pauli-Jordan の $\mathcal{D}$ 関数の極めて自然な拡張になっていることがわかる。

最後にこの $\Theta(x, y)$ がどのように応用されるのかについて簡単に述べておく。

一般相対論は一般座標変換に対して不変な理論であるが、この不変性は上に述べたように量子化にさいして必然的に失われる。しかし量子論の方が古典論よりも基礎理論であるはずだから、このことは局所対称性の基本的重要性と矛盾しているように思われる。この疑問は、重力場の共变的正準量子論では一般座標変換に対応する局所対称性を示す式が存在し、ある意味で解消されるのである。

$\psi(x)$ を $b_p(x)$, $c^\sigma(x)$, $\bar{c}_c(x)$ 以外の場から、一次結合、

積, ∂_μ などと有限回組み合わせて作れる任意の局所作用素とする. $\Phi(x)$ は古典論では一般座標変換のもとでの変換性は一意的に定まる. すなわち無限小一般座標変換のもとで

$$(13) \quad \Phi'(x) - \Phi(x) = \mathcal{L}_\lambda(\Phi) \varepsilon^\lambda(x)$$

と書ける. ここに $\varepsilon^\lambda(x)$ は無限小任意関数, $\mathcal{L}_\lambda(\Phi)$ は Lie 微分である. そこで量子論にいくと

$$(14) \quad [\Phi(x), b_p(y)] = -i \mathcal{L}_\lambda(\Phi)^x \mathcal{D}(x, y) + N.G.$$

という 4 次元交換関係 (これを幾何学的交換関係と呼ぶ) が成立するのである. ここに現れる $\mathcal{D}(x, y)$ が上で定義した量子重力の $\mathcal{D}$ 関数である. N.G. は non-geometric であって, この部分は b_p に比例する.

(14) の証明は, まず作用素の順序の問題を回避するために, 仮定 (1) を利用して, (14) の同時刻および ∂_0^y をとって ∂_0^x の同時刻交換関係を数学的帰納法により証明する. 次に $b_p(y)$ に対して積分表示を用いて, 交換関係を同時刻のものに帰着させて (14) の左辺を計算するのである.

なお詳しくは

H. Kanno and N. Nakanishi, Indefinite-Metric Quantum Field Theory of General Relativity. XIX — Gravitational Pauli-Jordan $\mathcal{D}$ Function —, Prog. Theor. Phys. 73 (1983) 496-503 を参照された. 文献もここに引用されている.