

Distance-Regular Graph の分類について

加藤 誠 (Makoto Katoh) (Sophia University)

1. 定義

X を有限集合とする ($|X| = n$)。 X の元を頂点とし、以下をみたす連結な graph Γ を考える。

距離が i である任意の 2 点 $\alpha, \beta \in \Gamma$ に対して、

$$\begin{aligned} a_i &:= \#\{\gamma \in \Gamma, \mid \delta(\alpha, \gamma) = i, \beta \sim \gamma\}, \\ b_i &:= \#\{\gamma \in \Gamma, \mid \delta(\alpha, \gamma) = i+1, \beta \sim \gamma\}, \\ c_i &:= \#\{\gamma \in \Gamma, \mid \delta(\alpha, \gamma) = i-1, \beta \sim \gamma\} \end{aligned}$$

は一定である。

このような Γ を *distance-regular graph* という。

Graph Γ を、次のような $n \times n$ 行列によって表す。

$$(A_i)_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{if } \delta(\alpha, \beta) = i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この行列を、 Γ の *adjacency matrices* と呼ぶ。また $\max \delta := d$ を、 Γ の *diameter* と呼ぶ。

Distance-regular graph Γ の adjacency matrices $\{A_i\}$ には、次の関係式が成立することがわかる。

$$\begin{aligned} A_0 &= I, \quad A_1 =: A, \\ AA_i &= c_{i+1}A_{i+1} + a_iA_i + b_{i-1}A_{i-1}, \\ a_i + b_i + c_i &= k \end{aligned} \tag{1}$$

ここで k は graph の 1 点から出る辺の数で、 Γ の *valency* と呼ぶ。

さらに $\{a_i, b_i, c_i\}$ には

$$k = b_0 \geq b_1 \geq \cdots \geq b_{d-1} > 0, \tag{2}$$

$$1 = c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_d \tag{3}$$

という関係が成立していることがわかる。

次のような $(d+1) \times (d+1)$ 行列 B を、 Γ の *intersection matrix* と呼ぶ。

$$B := \begin{pmatrix} a_0 & c_1 & & & \\ b_0 & a_1 & c_2 & & 0 \\ & b_1 & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \cdot & \cdot & c_d \\ & & & & b_{d-1} & a_d \end{pmatrix} \quad (b_i, c_i \neq 0)$$

A と B は、それぞれ $d+1$ 個の相異なる固有値を持ち、その集合は一致することが知られている。この固有値 θ_i を Γ の固有値、それらの A 上での重複度 m_i を Γ の *multiplicities* と呼ぶ。

2. 定理

[Godsil] Multiplicity $m > 2$ を 1 つ固定すると、それを持つ (primitive な) distance-regular graph は有限個しか存在しない。また、そのような graph の diameter と valency は、それぞれ

$$d \leq 3m - 4, \quad k \leq \frac{1}{2}(m-1)(m+2)$$

をみたす。さらに

$$d \geq 2m - 1 \implies k \leq m$$

が成立する。

このことから $\{a_i, b_i, c_i\}$ の候補が高々有限個であることがわかるので、それらを全て計算機上で数え上げて、distance-regular graph となるための必要条件をチェックしてゆく。

3. アルゴリズムの概要

計算機上で実際に行っている手順を、簡単にまとめると以下のようなになる。

- m を 1 つ固定し、 d, k をそれぞれ 1 つ固定する
- ↓
- b_i, c_i を適当に定め、intersection matrix B を生成する (STEP 0)
- ↓
- B の成分間の必要条件等のチェック (STEP 1)
- ↓
- ★ B の固有値を求め、 A 上での重複度を求める
- ↓
- 重複度の整数条件等のチェック (STEP 2)

● まず、与えられた m, d, k に対して、前記の (1)~(3) をみたす $\{b_i, c_i\}$ を全て生成する。そして、その成分、及びそこから計算されるパラメータの distance-regular になるための必要条件を順次チェックしてゆく。

★ STEP 1 のチェックを全てパスした B の固有値を、 B の固有多項式を代数的に解くことによって求める。ここで、数式処理システムを利用する。

● 求めた固有値の情報より、それぞれの重複度を求め、以下のチェックを行なう。

1. m_i は正整数である
2. $m_i = m$ となる i が存在する
3. (The Absolute Bound Condition)

次の関係式が成立する：

$$|X| \leq \binom{m_i + d - 1}{d} + \binom{m_i + d - 2}{d - 1}$$

4. (The Krein Condition)

Krein parameters は非負の実数である

これら全てのチェックをパスしたものは、distance-regular である可能性が非常に高く、その中に既知でないものが存在していれば、それらについてさらに詳しく調べていくこととなる。

4. 非存在に関する予想

これまでに、この手法を用いて、小さな $m(3, 4, 5, 6, 7)$ について一定の成果を得ることができたが、 m が大きくなるにつれ、(特に大きな d, m での) チェック量が膨大にふくれ上がってくる。例えば $m = 8, d = 9, k = 16$ においては、実に 50362112196 個の B が STEP 0 で生成された。

しかし、大きな d, m において distance-regular なものが得られることはまずなく、無駄なチェックに時間を割いているのではないかという疑問がわいてくる。そこで、STEP 1 におけるチェックの状況を調べてみることにした。以下の表は、その結果の一部である(この結果は原稿作成時点でのものであり、チェックの項目や順序などにより日々変化している)。

この中で、0 のエントリが見られる箇所がある。これを最初からチェックしないで済む、即ち、このような (m, d, k) の組を持つ distance-regular graph が存在しないことを示すことができれば、チェック数を大幅に減少させることができる。これまでの結果では

- $d > m, \quad k > m, \quad k : \text{odd} (\neq 9)$
- $d > m, \quad k > 2m$

表 1. $m = 8$ での STEP 1 パス数

	$k = 9$	10	11	12	13	14	15	16	17	...
$d=2$	7	25	6	38	15	38	15	36	7	
3	30	145	41	226	38	172	93	160	45	
4	99	478	140	787	129	635	355	629	138	
5	219	961	350	1313	308	1206	686	1103	316	
6	342	1370	570	1901	591	1870	1115	1895	672	
7	397	1524	784	2271	899	2463	1645	2569	1144	
8	155	718	344	1396	499	2093	1160	2887	1049	
9	249	571	0	1448	0	1572	0	1967	0	
10	182	607	0	1597	0	1093	0	711	0	
$\vdots$										

をみtas場合に、STEP 1 をパスするものが存在しておらず、常にこれが成り立つことが予想される。

また、STEP 2 は本質的には代数方程式の求解であり、こちらも次数が上がるにつれ、所要時間も相当に増加してゆく。よって、STEP 2 に送られる B の数を減らすことも重要である。そのために、STEP 1 のチェック項目をさらに増やす、より良い必要条件を見つける (もちろん十分条件が見つければさらによい) 等の改良を加えていき、さらに大きな m での distance-regular graph を数え上げ切るところまで到達したいと考えている。

参 考 文 献

- [1] Eiichi Bannai and Tatsuro Ito. *Algebraic Combinatorics I Association Schemes*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1984
- [2] A.E.Brouwer, A.M.Cohen, A.Neumaier. *Distance-Regular Graphs*. Springer-Verlag, 1989