

有理関数系による関数近似とその応用

舞鶴高専 北原紀之

矢野秀雄

有理関数による関数近似の有効性は、従来よく知られている。しかし、有理関数近似は、一般に、未定パラメータに対して非線型であり、近似する関数の特殊性に依存することが多く、理論的にも実用的にも困難な点がある[1], [2], [3]。本研究において、われわれは、複素関数論的な立場から、極を仮定し未定パラメータに関して線型な新しい有理関数系を提案する。この関数系は、Cauchy 核の離散値として与えられるものであり、未定パラメータは、Cauchy の積分表示において積分を離散化することによって決められる。さらに、この関数系を基底関数系とする最小二乗近似について述べ、応用として微分方程式の境界値問題の近似解法について示れる。

§1. 基底関数系

近似する関数 $f(x)$ の定義域を実軸上の閉区間

$$(1.1) \quad K = [-1, 1]$$

とする。Fig. 1 において、
 z -平面上に K の両端を焦点
 とする楕円 Γ をとる。この
 楕円 Γ は、 w -平面における
 単位円 Γ' を、関数

$$(1.2) \quad z = \frac{1}{2} \left(R w + \frac{1}{R w} \right)$$

による写像によって与えら
 れる。ただし、 R はパラメ
 タである。単位円 Γ' の上
 半円周上の n 個の点

$$(1.3) \quad \begin{cases} w_j = e^{i\theta_j} \\ \theta_j = \frac{2j-1}{2n} \pi, \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

を z -平面の楕円 Γ の周上に写像した点を $z_1, z_2, \dots, z_n$ とし、
 これらの点を極とする n 個の有理関数系

$$(1.4) \quad \Phi_j(x) = \frac{1}{z_j - x}, \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

を考える。これは、後述べるように Cauchy 核の離散値で
 ある。 $\Phi_j(x)$ の実部および虚部を構成する $N=2n$ 個の有理関数

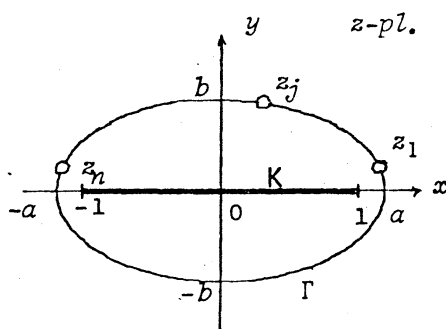
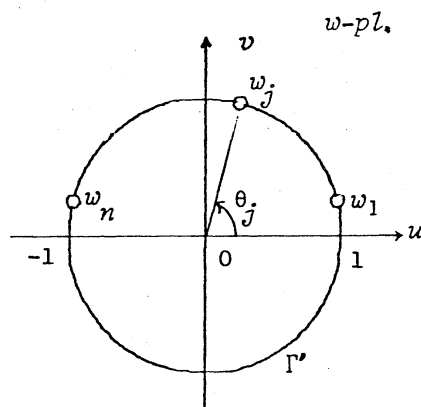


Fig. 1.

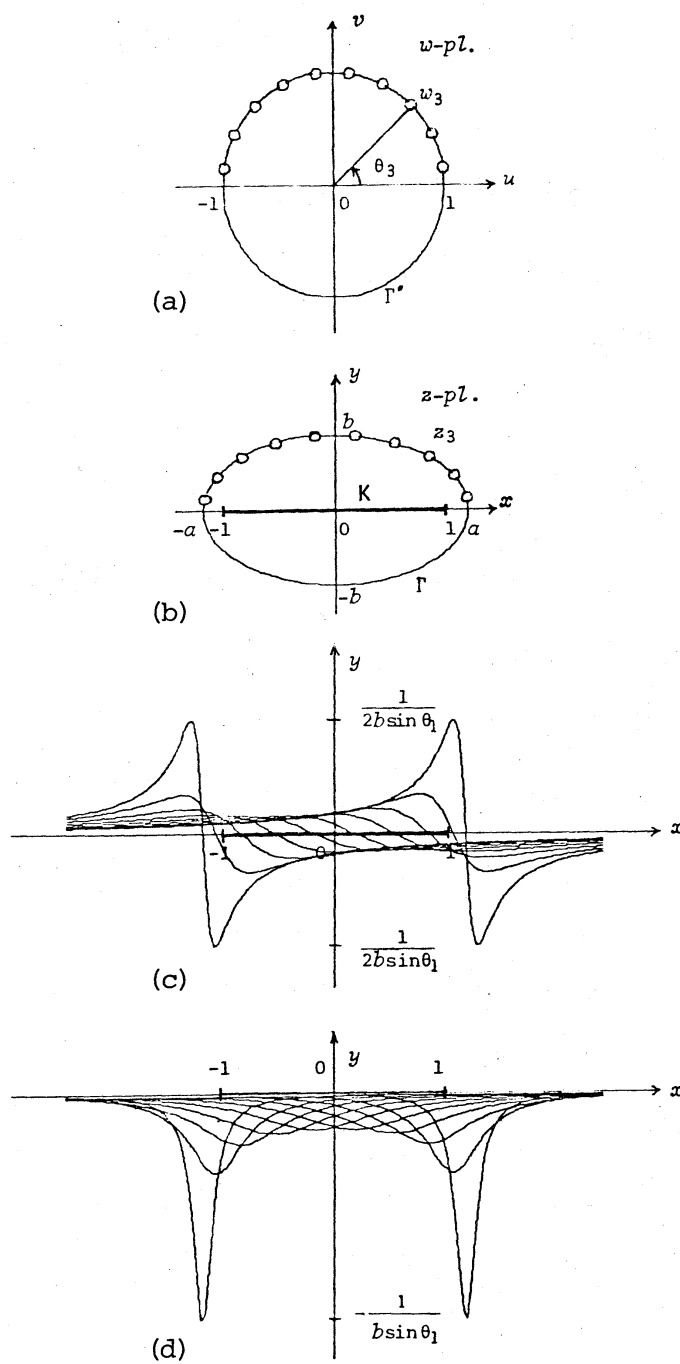


Fig. 2

系

$$(1.5) \quad \begin{cases} \varphi_j^{(N)}(x) = \operatorname{Re} [\bar{\Phi}_j(x)] \\ \varphi_{j+n}^{(N)}(x) = \operatorname{Im} [\bar{\Phi}_j(x)] \end{cases}$$

を基底関数系として提案する.

Fig. 2 は、極の個数を $n=10$ とした場合に現われる $N=20$ 個の基底関数系の形状を図示したものである. 写像関数(1.2)によって、Fig. 2-a の単位円 Γ' 上の点 w_j は、Fig. 2-b の楕円 Γ 上の点 z_j に写像される. Fig. 2-c は、有理関数 $\bar{\Phi}_j(x)$ の実部 $\varphi_j^{(20)}(x)$ を表わし、Fig. 2-d は、その虚部 $\varphi_{j+10}^{(20)}(x)$ を表わす.

§ 2. Cauchy の積分表示による関数近似

基底関数系(1.5)は、Cauchy の積分表示において積分を離散化することによって得られる. すなわち、Cauchy の積分表示を利用すれば、本関数系による解析関数 $f(x)$ の近似が可能である. 本章ではその近似の理論と数値計算例について述べる. $f(x)$ は、前章で定義した z -平面上の楕円 Γ の内部および周上で正則であるとする. Cauchy の積分表示により、

$$(2.1) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-x} dz$$

と表わされる. ここに、 Γ は、 K を囲む右回りの積分路である. 式(2.1)の積分は、一様に近似される. 一方、 w -平面上

の単位円 Γ' の全周上に前述と同様に $N=2n$ 個の分点

$$(2.2) \quad \begin{cases} w_j = e^{i\theta_j} \\ \theta_j = \frac{2j-1}{N}\pi, \quad (j=1, 2, \dots, N) \end{cases}$$

をとると

$$(2.3) \quad w_{2n-j+1} = \overline{w_j}, \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

が成立し, 式 (2.3) と関数 (1.2) より

$$(2.4) \quad z_{2n-j+1} = \overline{z_j}, \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

である. さらに, Γ' の上半周上の点を

$$(2.5) \quad \begin{cases} w_j^* = e^{i\theta_j^*} \\ \theta_j^* = \frac{j-1}{n}\pi, \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

にとる. w_j^* の z -平面への写像点を z_j^* とする. 以上の関係を図示すると Fig. 3 のようになる.

$f(z)$ は, 実数値関数であるから

$$(2.6) \quad f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$$

を考慮すると, 式 (2.1) は, つぎのように変形される.

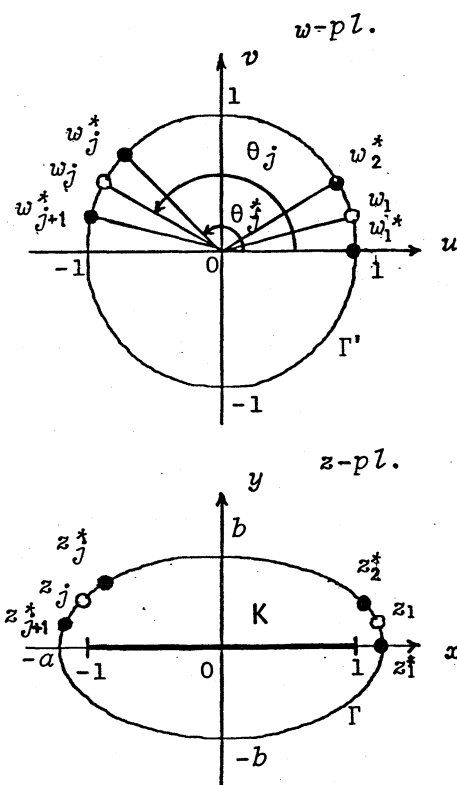


Fig. 3

$$(2.7) \quad f(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \int_{\theta_j^*}^{\theta_{j+1}^*} \left\{ \frac{f(z) \left(Rw - \frac{1}{Rw}\right)}{z - x} + \frac{\overline{f(z) \left(Rw - \frac{1}{Rw}\right)}}{\bar{z} - x} \right\} d\theta.$$

したがって、つぎのように近似する.

$$(2.8) \quad f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{C_j^*}{z_j - x} - \frac{\overline{C_j^*}}{\bar{z}_j - x} \right\}.$$

ただし,

$$(2.9) \quad C_j^* \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_j^*}^{\theta_{j+1}^*} f(z) \left(Rw - \frac{1}{Rw}\right) d\theta$$

とする. さらに,

$$(2.10) \quad \begin{cases} C_j \equiv \operatorname{Re} [C_j^*], \\ C_{j+n} \equiv \operatorname{Im} [C_j^*], \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

とすると, 式 (1.4), (1.5), (2.10) により

$$(2.11) \quad f^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^N C_j \varphi_j^{(n)}(x)$$

を得る. こうして, Cauchy の積分表示を利用すれば, 基底関数系 $\{\varphi_j^{(n)}(x)\}$ の 1 次結合により解析関数 $f(x)$ を一様に近似することができる.

上述の解法より, 関数近似の一例を示す. この例は, $f(x) = e^x$ の場合である. Fig. 4 は, 項数 N (極の個数の 2 倍) をパラメータとして楕円 Γ の長軸 a を変化した場合の誤差を示す. ただし, 誤差の二乗ノルムを

$$(2.12) \quad \|\varepsilon(x)\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^1 \{f(x) - f^{(n)}(x)\}^2 dx}$$

とする.

Fig. 5 は、 $a=1.8$ として、 N を変化した場合の誤差を示す。グラフより、 $N=50$ を越えると急激に誤差が減少する。 $N=60$ 以上で飽和するのは、計算機の精度によるものと考えられる。

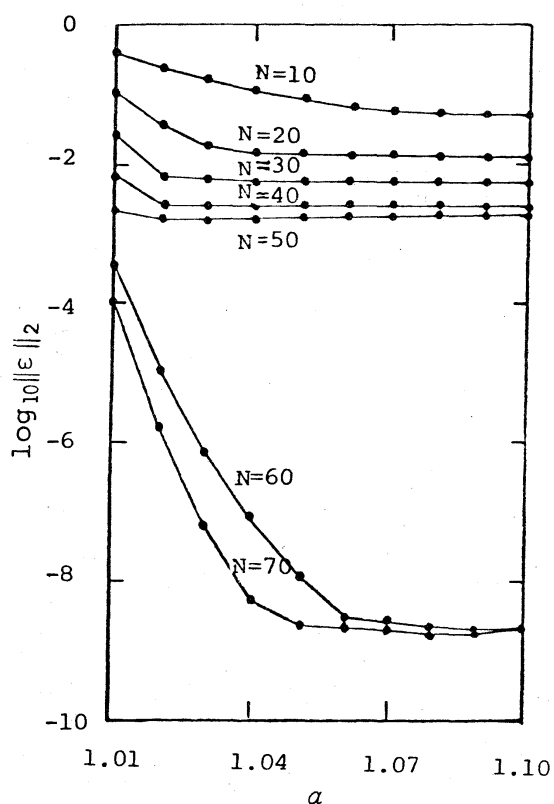


Fig. 4

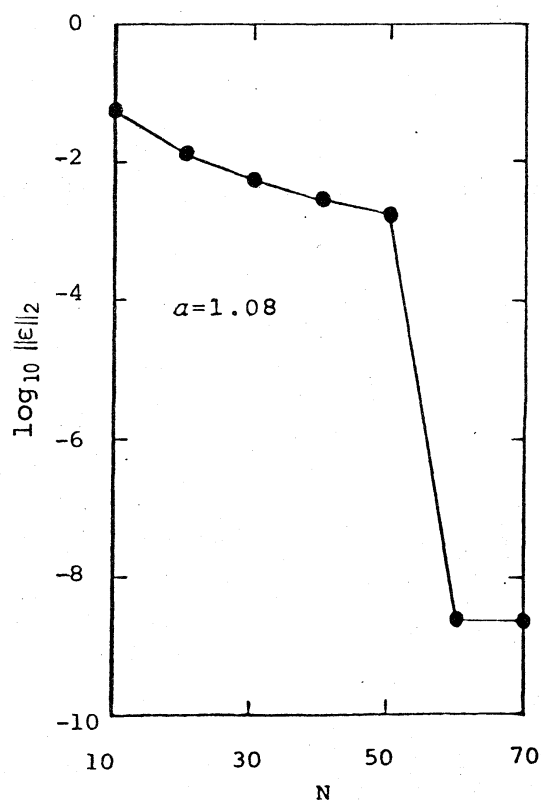


Fig. 5

§ 3. 最小二乗法

関数近似において Chebyshev 多項式が、多くの点で $\{q_j^{(w)}(x)\}$ によるものよりも優れていることが予想される。しかしながら、目的を別の面、たとえば、重みつき残差法による微分方

程式の近似解法などを考えると、基底関数の直交性が保存されなくなるので Chebyshev 展開はあまり有効でない。この意味では関数近似においても直交しない展開である $\{x^j\}$ による展開と $\{q_j^{(N)}(x)\}$ による展開を Chebyshev 近似をベースとして比較することは意味があると考えられる。そこで、 $\{q_j^{(N)}(x)\}$ を基底関数系とする最小二乗近似について述べ、その数値実験の結果を示すことにする。

§ 2. において $\{q_j^{(N)}(x)\}$ により、任意の整多項式を表現できることが示されたので、Weierstrass の定理を考慮することにより $\{q_j^{(N)}(x)\}$ の 1 次結合によって、 K で定義された任意の連続関数を一様に近似することができる。このことを示す。

Weierstrass の定理により、任意の正数 ε に対して、適当な自然数 L を取れば、 $m > L$ に対して

$$(3.1) \quad \left| f(x) - \sum_{j=0}^m a_j x^j \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

とすることができる。また、Cauchy の積分表示により

$$(3.2) \quad x^j = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^j}{z - x} dz.$$

さらに、式 (3.2) は、次式で定義される Riemann 和

$$(3.3) \quad q_j^{(N)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \frac{z_k^j (z_k - z_{k-1})}{z_k - x}$$

によって一様に近似される。したがって、式(3.2), (3.3)により

$$(3.4) \quad x^j - g_j^{(N)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left\{ \frac{z^j}{z-x} - \frac{z_k^j}{z_k-x} \right\} dz$$

を得る。任意の正数 δ_j に対して適当な自然数 L をとれば、 $N > L$ に対して

$$(3.5) \quad \left| \frac{z^j}{z-x} - \frac{z_k^j}{z_k-x} \right| < \delta_j$$

とすることができる。 $2\pi L$ を積分路 Γ の長さとする

$$(3.6) \quad |x^j - g_j^{(N)}(x)| < L \delta_j \equiv \varepsilon_j.$$

式(3.1), (3.6) により

$$(3.7) \quad \left| f(x) - \sum_{j=0}^m a_j g_j^{(N)}(x) \right| < \frac{1}{2} \varepsilon + \sum_{j=0}^m |a_j| \varepsilon_j.$$

$a_0, a_1, \dots, a_m$ は、 N に無関係な定数であるから、十分大きな N によって

$$(3.8) \quad \sum_{j=0}^m |a_j| \varepsilon_j < \frac{\varepsilon}{2}$$

とすることができる。したがって

$$(3.9) \quad \left| f(x) - \sum_{k=1}^N \frac{C_k^*}{z_k - x} \right| < \varepsilon.$$

ただし

$$(3.10) \quad c_n^* = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^m a_j z_n^j (z_n - z_{n-1}).$$

$\{\varphi_j^{(N)}(x)\}$ で表現すると

$$(3.11) \quad \left| f(x) - \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j^{(N)}(x) \right| < \varepsilon$$

となる。したがって、 K で定義される任意の連続関数は、 $\{\varphi_j^{(N)}(x)\}$ の 1 次結合で表わすことができる。

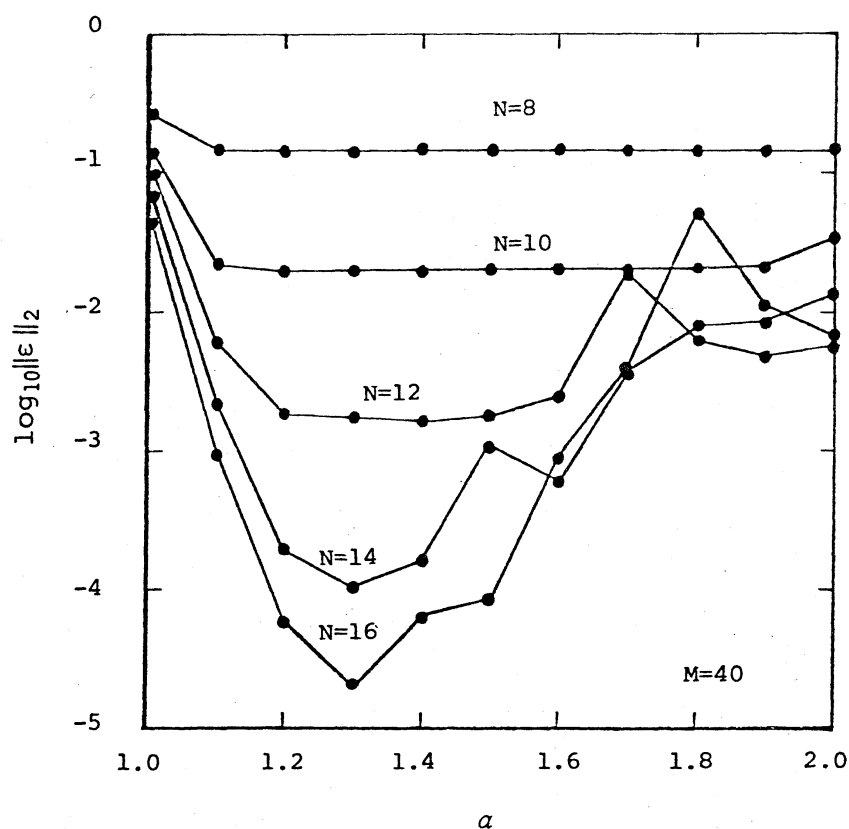


Fig. 6

つぎに、 $f(x) = \cos 2\pi x$ を最小二乗近似で解いた実験例を示す。Fig. 6 は、 N をパラメータとして楕円 Γ の長軸 a を変化した場合の誤差を示す。これは、従来の関数近似には現れない特性であり、調整パラメータ a の影響を表わすシミュレーション結果である。実験は、係数行列の要素を決定する際に生じる内積計算を、台形法によって行なったが、その分割数 M を $M=40$ とした。われわれの種々のシミュレーション結果では、 a の最適値は1と2の間に存在する。Fig. 7 は、

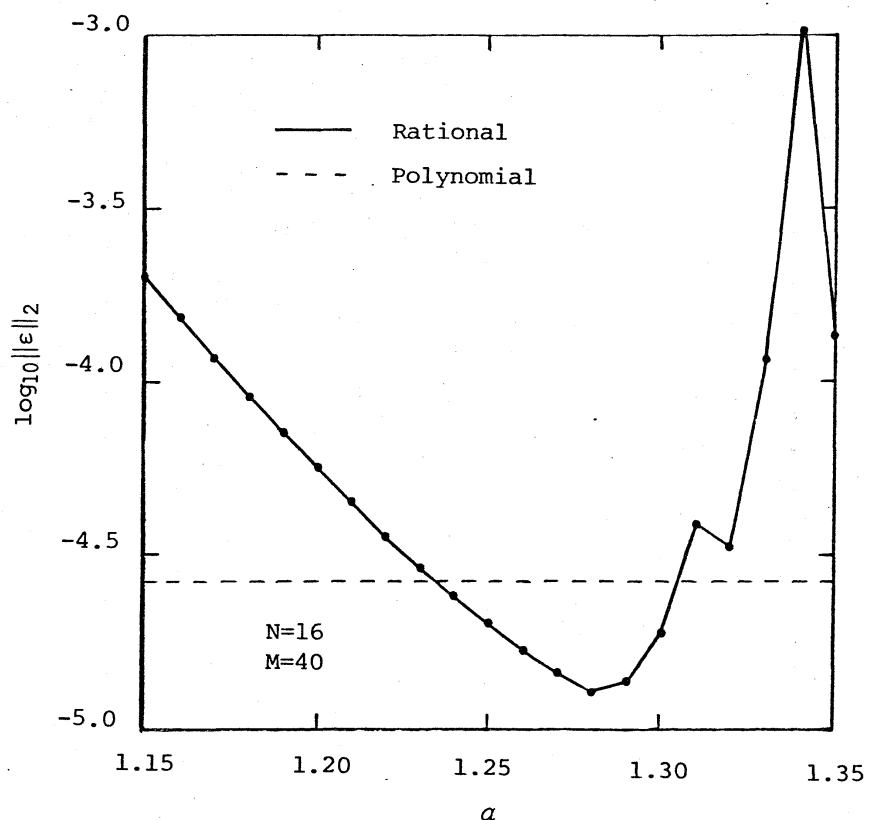


Fig. 7

$N=16$ として, Fig. 6 における α の最適値近傍を拡大したものであり、 $\{x^j\}$ との比較を示している。

Fig. 8 は、Chebyshev 近似と $\{\varphi_j^{(N)}(x)\}$ および $\{x^j\}$ の展開による近似の比較を示したものである。

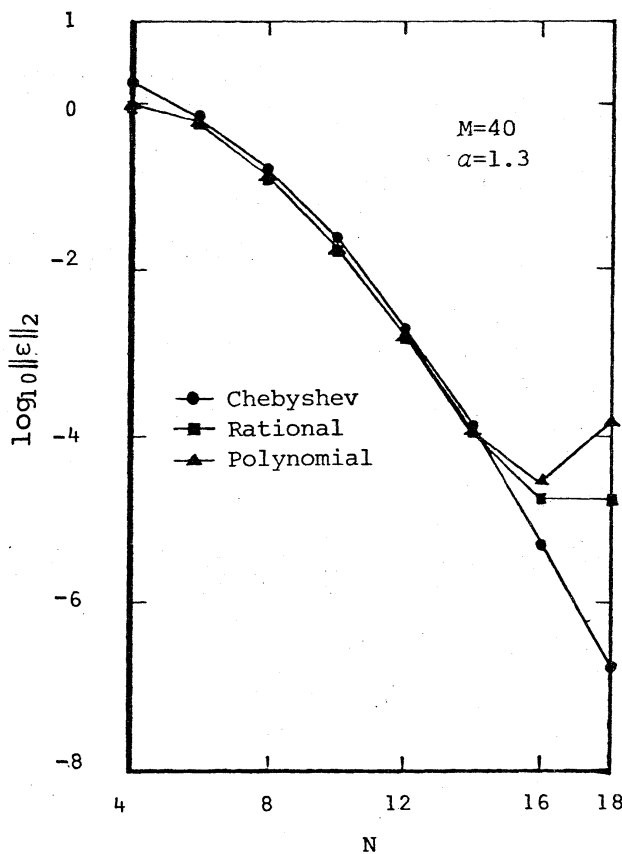


Fig. 8

本関数系 $\{\varphi_j^{(N)}(x)\}$ は、微分方程式の境界値問題の近似解法に適用できる。重みつき残差法で解く場合、重み関数に何を選ぶかによって、かなり精度の点で違いがでてくる。しかし、

いずれの重みに対しても、われわれのシミュレーション結果では $\{x_i\}$ と比較した場合、同等以上の精度を得た。さらに、本解法の特徴である調整パラメータ α の最適値は、関数近似の場合と同様、有限の範囲に存在することが確認された。

§ 4. おわりに

- (1) Cauchy の積分表示を使った本関数系による関数近似は、任意の解析関数に対して有効であるが、展開項数を多くとる必要がある。この点の改良の必要性がある。
- (2) 最小二乗法による解法では、少ない項数で精度の良い結果を得ることができ、パラメータ α の最適値を決定する問題が生じる。
- (3) これらの関数近似における誤差解析については、現在検討中である。

参考文献

- [1] Ralston, A., "Rational Chebyshev Approximation", *Mathematical Methods for Digital Computers*, 2, (1967), John Wiley, 264-284.

- [2] 渋谷政昭, "有理関数による最良近似について", 数理解析研究所講究録 73, (1969), 67-74.
- [3] 一松 信, "有理関数近似について", 数学, 20, (1968), 40-46.

訂正事項

個所	誤	正
P. 4 下より1行目	式(2.1) 近似される.	削除
P. 7 2行目	$a = 1.8$	$a = 1.08$
P. 11 1行目	$f(x) = \cos 2\pi x \dots$... 実験例 ...	$f(x) = \cos 2\pi x$ に対する最小二乗近似の実験例 ...