

Greenberg 予想について

東大数理 隅田浩樹 (Sumida Hiroki)

この小文で述べる Greenberg の予想とは、有限次代数体の $\mathbb{Z}_p$ -拡大に対して定義される岩澤 λ , μ -不変量が、総実体の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ -拡大に対しては消えるだろうというものです。この予想に対し、ここでは次の (1) (2) を与えます。

(1) ある特定の場合作における予想と同値な条件

(2) 岩澤主予想の情報を用いた予想の十分条件

そして、(1) (2) を比べることにより、どのような場合に成立を示すことが困難そうであるかを見てみたいと思います。

これらの結果を得るにあたり、重要な御意見、御助言を頂いた岩澤健吉先生に深く感謝いたします。

§ 1 Introduction

記号 p : 素数 $K/\mathbb{Q}$: 有限次代数体 K/k : $\mathbb{Z}_p$ -拡大

$K/k_n/k$: $[k_n:k] = p^n$, A_n : k_n の ideal 類群の p -part

定理. 0 (岩澤[4])

次の3つの不変量 $\lambda = \lambda_p(K/k)$ $\mu = \mu_p(K/k)$ $\nu = \nu_p(K/k)$ があり、十分大きな n に対し、

$$|A_n| = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu} \quad \text{となる。}$$

・ cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ -拡大

$\mu_n = \{1 \text{ の } n \text{ 乗根}\}$ $\mathbb{Q}(\mu_{p^n}) = \bigcup_{m=0} \mathbb{Q}(\mu_{p^m})$ とする。

$\mathbb{Q}(\mu_{p^n})/\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q}$ なる $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Z}_p$ -拡大 $\mathbb{Q}_n$ が存在することが分かる。(しかも $\mathbb{Q}_n$ は $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Z}_p$ -拡大としては、唯一のものである。) k : 有限次代数体に対し、 $k_n = k \cdot \mathbb{Q}_n$ を k の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ -拡大と呼ぶ。

・ Greenberg 予想 = $GC(k, p)$

$k/\mathbb{Q}$: 総実有限次拡大とし、全ての素数 p , k_n : k の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ -拡大に対して

$$\lambda_p(k_n/k) = \mu_p(k_n/k) = 0 \quad \text{となる。}$$

すなわち、 $|A_n|$ は、 $n \rightarrow \infty$ において有界。

知られている結果

$k = \mathbb{Q}$ という最も基本的な場合、 $\lambda = \mu = \nu = 0$ となることが分かる。(岩澤[8]) また、 k が総実でないとき $\lambda = \mu = 0$ とならない例としては、 p : irregular prime, $k = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ がある。(岩澤[9])

$k/\mathbb{Q}$: abel 拡大のとき、 $\mu_p(k/\mathbb{Q}) = 0$ となることが知られている。(Ferrero-Washington[2])

また、 $\mathbb{Z}_p$ -拡大に関する予想として Leopoldt 予想 (後述) がある。 k, p に対する Leopoldt 予想は、 k の独立な $\mathbb{Z}_p$ -拡大が $r_2 + 1$ 個 (r_2 : k の虚素点) のみであることと同値であることが類体論から分かる。 $k/\mathbb{Q}$: abel-拡大のとき、この予想が成立することが知られている。(Brumer[1])

・ Leopoldt 予想 = $LC(k; p)$

k : 有限次代数体 E_k : k の単数群

$\bar{E}_k := \text{Im} \left(E_k \xrightarrow[\varepsilon \mapsto \prod p_i(\varepsilon, \dots, \varepsilon)]{\hookrightarrow} \prod k_p^* \right)$ の閉包 (k_p : k の p による完備化) とするとき、 $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \bar{E}_k = \text{rank}_{\mathbb{Z}_p} \bar{E}_k$ となる。

§ 2. Greenberg 予想と同値な条件

まず、記号について説明する。

記号 k : 総実な有限次代数体、 p, k_0, k_n, A_n は §1 と

同じものとする。 $\Gamma = \text{Gal}(k_0/k)$, $\mathcal{C}_n(\alpha) = \alpha \in k_n$ の ideal 類

$H_{n,m} := \ker(i_{n,m}: A_n \rightarrow A_m) \quad (\mathcal{C}_n(\alpha) \mapsto \mathcal{C}_m(\alpha \text{ の延長}))$

$H_n := \bigcup_{m \geq n} H_{n,m} \quad D_n := \langle \mathcal{C}_n(p) \mid p \nmid p \rangle \cap A_n, E_n$: k_n の単数群

これと同様に p -整数環に対しても次を定義する。

$A'_n, H'_{n,m}, H'_n, i'_{n,m}, E'_n$

このとき、 $0 \rightarrow D_n \rightarrow A_n \rightarrow A'_n \rightarrow 0$ (完全)

* A_n, A'_n の幾何的な意味

L : k_0 上最大不分岐 abel p -拡大

L' : k_0 上最大の全ての素点で完全分解する abel p -拡大

とすると、類体論と k_0 における各素点の剰余体を考えれば、

$$\text{Gal}(L/k_0) \cong \varprojlim A_n, \quad \text{Gal}(L'/k_0) \cong \varprojlim A'_n \quad \text{となる。}$$

A'_n, A_n の言葉を使って Greenberg 予想と同値な条件を調べてみる。まず一般の場合から。

命題 1

k : 総実代数体, k_0/k で $p \nmid$ の素 ideal が不分解とする。

このとき $L_C(k, p)$ のもとで、

$$G_C(k, p) \iff A'_n = H'_n \quad \forall n \geq 0$$

$$\iff A_n^\Gamma \subset H'_n \quad \forall n \geq 0$$

証明. これは Greenberg [6] からすぐに得られる。総実体 k において $L_C(k, p)$ の下では、 $|A_n^\Gamma|$ は $n \rightarrow \infty$ で有界であることが分かる。 $D_n \subset A_n^\Gamma$ であるから $|A_n|$ の有界性と $|A'_n|$ の有界性は同値である。[6] と同様に、 $|A'_n|$ が $n \rightarrow \infty$ で有界であることと $A'_n = H'_n$ であることは同値である。 $(|H'_n|$ は $n \rightarrow \infty$ で有界 岩澤 [11] Th. 10) $A'_n = H'_n$ と $A_n^\Gamma \subset H'_n$ の同値性を示すことは難しくない。 ▣

k : 総実代数体とし、次の2つの場合を考える。

case I k_p において p 上に素ideal が1つしかない。

case II $k/\mathbb{Q}$ で p が完全分解し、 $L_c(k, p)$ を仮定する。

これら2つの case において、次の2つの定理が得られた。
(定理1は、Greenberg [6] の結果からすぐに得られる。)

定理. 1 (Greenberg) case I

$$G_c(k, p) \iff A'_0 = H'_0$$

定理. 2

case II

$$G_c(k, p) \iff \begin{cases} A'_0 = H'_0 \\ p\text{-rank}(\ker(H^2(k_p/k, E_n) \rightarrow H^2(k_p/k, k_n^\times))) \\ = p\text{-rank}(Im(H^0(k_p/k, A_n) \rightarrow H^1(k_p/k, D_n))) \end{cases} \quad n \gg 0$$

注意 Greenberg [6] において、case II の同値条件は、
 $A'_n = D_n \quad n \gg 0$ としている。定理2は、この条件を2つの条件に分離したものである。一般の総実体に対しても実際に確かめ得る同値条件 ($A'_n = H'_n, |A_n'^n| = |A_n| \quad \forall m \geq n \geq c$) が得られるが、上の2つの場合が典型的である。

証明 (命題1を用いる。)

$$R_n := \ker(H^2(k_n/k, E_n) \rightarrow H^2(k_n/k, k_n^\times))$$

$$R'_n := \ker(H^2(k_p/k, E_n) \rightarrow H^2(k_p/k, k_n^\times)) \quad \text{とおく。}$$

このとき、次のことが case I, case II の性質からいえる。

• case I $R'_n = \text{Ker}(R'_n \rightarrow R'_\infty)$

• case II $R'_n \cong \text{Ker}(R'_n \rightarrow R'_\infty) \oplus R_n \quad n \gg 0$

($R'_n \rightarrow R'_\infty$ は、 $H^p(k_n/k, E'_n) \xrightarrow{\text{infl.}} H^p(k_\infty/k, E'_\infty)$ から)

ここで次の可換図式がある。(一般的なもの 岩澤[12])

$$\begin{array}{ccccccc} A'_0 & \longrightarrow & A'^{\tau}_\infty & \longrightarrow & R'_\infty & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \uparrow \text{infl.} & & \uparrow \text{infl.} & & \\ A'_0 & \longrightarrow & A'^{\tau}_n & \xrightarrow{\varphi_n} & R'_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

case I の場合は、この可換図式と $R'_n = \text{Ker}(R'_n \rightarrow R'_\infty)$ から明らか。case II の場合は、 $n \gg 0$ のとき

$$\varphi_n^{-1}(\text{Ker}(R'_n \rightarrow R'_\infty)) \cong \text{Im}(H^0(k_n/k, A'_n) \rightarrow H^1(k_n/k, D_n))$$

となることに気がついて可換図式を見ればよい。 ▣

§3 岩澤主予想との関連

まず、結果を述べることにする。

定理 3

$k/\mathbb{Q}$: 実 abel 拡大、 p は $[k:\mathbb{Q}]$ を割らない奇素数

$\Delta := \text{Gal}(k/\mathbb{Q})$ とする。 $\psi: \mathbb{Q}_p$ 上の Δ の 1 次指標に対して

$\Psi := \bigoplus_{\psi} \psi^{\sigma} \quad \sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\psi)/\mathbb{Q}_p)$ を定める。

• $h_{\Psi}(T) := \prod_{\psi} g_{\psi^{\sigma}}(T) \in \mathbb{Z}_p[T]$ が $\mathbb{Z}_p[T]$ 内で既約。

• ある n に対して、 $\varepsilon_{\Psi} H_n \neq 0$

$$\Rightarrow \lambda_p(k_n/k)_{\Psi} = 0$$

記号 $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[T]]$ $\mathbb{Q}_p(\psi) := \mathbb{Q}_p$ に ψ の値を添加した体
 ε_ψ : ψ に対する中等元 $\in \mathbb{Z}_p[\Delta]$ で、上記の加群は自然に $\mathbb{Z}_p[\Delta]$
 -加群となる。 ψ は $\mathbb{Q}_p$ 上の Δ の既約指標となることに注意。
 ψ' : ψ に対応する $\mathbb{Q}_p$ -値 primitive even Dirichlet 指標
 ($\psi'^\sigma := \sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\psi)/\mathbb{Q}_p)$ をわたる。)
 $g_\psi(T)$: p 進 L 関数 $L_p(s, \psi)$ から構成される distinguished
 polynomial $\in \Lambda[\psi]$ (Λ に ψ の値を添加した環)
 $\lambda_p(k_\infty/k)_\psi$: 定理 0 において、 A_n のかわりに $\varepsilon_\psi A_n$ とおいた
 ときの λ の値。

この定理では、岩澤主予想から得られる情報を用いるため、
 まず主予想から説明する。

定理 (岩澤主予想) Greenberg [7] における formulation
 $\mathbb{C}_p := \widehat{\mathbb{Q}_p}$, $\delta = \begin{cases} p & p = \text{odd} \\ p^2 & p = 2 \end{cases}$

ψ : $\mathbb{C}_p$ に値をもつ primitive Dirichlet 指標で even ($\psi(-1) = 1$) かつ first kind (conductor が $p \cdot \delta$ で割れない。)

$k_\psi/\mathbb{Q}$: ψ に対応する abel 拡大。

γ_0 : $\text{Gal}(k_{\psi, \infty}/k_\psi)$ の位相生成元を 1 つ fix.

$K_0: \zeta^{\gamma_0} = \zeta^{K_0} \quad \forall \zeta \in \mu_{p^\infty} \quad K_0 \in \mathbb{Z}_p^\times$

◦ $f_\psi(T)$ の構成

M : $k_{\psi, \infty}$ 上最大 $p \cdot \infty$ の外不分岐 abel p -拡大

$W := \text{Gal}(M/k_{\infty}) \otimes \mathbb{C}_p, \text{Gal}(k_{\infty}/\mathbb{Q})$ の有限次元表現空間

$$\left(\begin{array}{l} g \in \text{Gal}(k_{\infty}/\mathbb{Q}), x \in \text{Gal}(M/k_{\infty}) \text{ に対し, } x^g = \bar{g} x \bar{g}^{-1} \\ \bar{g} \text{ は } g \text{ の } \text{Gal}(M/\mathbb{Q}) \text{ への延長.} \end{array} \right)$$

$$W_{\psi} := \{ w \in W \mid s(w) = \psi(s) \cdot w \quad \forall s \in \text{Gal}(k_{\infty}/\mathbb{Q}) \}$$

$f(T) : k_0 - 1$ の W_{ψ} への作用の特性多項式

• $g_{\psi}(T)$ の構成 (岩澤 [10] より)

p 進 L 関数 (久保田 - Leopoldt によって得られた。)

$$L_p(s, \psi) : s \in \mathbb{Z}_p (\psi = 1 \text{ のときは } s = 1 \text{ を除く。})$$

$\mathbb{C}_p$ に値をとる連続関数

$$\text{s.t. } L_p(1-n, \psi) = L(1-n, \psi \omega^{-n}) (1 - \psi \omega^{-n}(p) p^{n-1})$$

$\forall n \geq 1 \quad \omega = \text{Teichmüller 指標}$

$$\text{ここで } L_p(1-s, \psi) = \frac{G_{\psi}(k_0^s - 1)}{(k_0^s - 1)^s} \quad s = \begin{cases} 0 & \psi \neq 1 \\ 1 & \psi = 1 \end{cases} \quad \text{と定める}$$

$G_{\psi}(T) \in \Lambda[\psi]$ があって, p 進 Weierstrass の準備定理から

$$G_{\psi}(T) = 2\pi \mu_{\psi} \underline{g_{\psi}(T)} \cdot U_{\psi}(T) \quad \text{とかける。}$$

$\pi : \mathbb{Z}_p[\psi]$ の極大 ideal の生成元, $U_{\psi}(T) \in \Lambda[\psi]^{\times}$

$g_{\psi}(T) : \text{distinguished polynomial} \in \mathbb{Z}_p[\psi][T]$

★ 主予想 $f_{\psi}(T) = g_{\psi}(T)$

注意 上の予想は最終的に, より一般に Wiles [15] において証明されている。(F: 総実代数体, Deligne - Ribet による p 進 L 関数, $p = \text{odd}$)

定理3の証明のあらすじ

$Y := \text{Gal}(M/k_\infty)$ とすると, Y は non-trivial finite Λ -submodule を持たない. (岩澤 [11] Th. 18) また $k/\mathbb{Q} : T$ -ヘル拡大なので $\mu = 0$ がいえている. (Ferrero-Washington [2]) ゆえに, $\varepsilon_\Psi Y \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^k \Lambda/(f_{\Psi,i}(T))$, $f_{\Psi,i}(T) : \text{disting. polyn. (reflection, } p \neq 2)$ ここで $T \in M/k_\infty$ における p 上の素idealの慣性群をあわせたものとする. もし $\varepsilon_\Psi T$ が, trivial であつたとすると, $\exists Z \subset \varepsilon_\Psi Y$ (finite index) に対して, $\varepsilon_\Psi A_m \cong \varepsilon_\Psi Y / v_m Z$ $m \gg e$, $v_m = \frac{(1+T)^{p^m} - 1}{(1+T)^{p^e} - 1}$ (岩澤 [11] Th. 6) $\varepsilon_\Psi Y \hookrightarrow \bigoplus \Lambda/(f_{\Psi,i}(T))$ だから, $\varepsilon_\Psi H_m = 0$ となってしまう. 実はこの場合, $H_n \neq 0 \Rightarrow H_m \neq 0 \quad \forall m \geq n$ (岩澤 [13]) となるから, $\varepsilon_\Psi T = 0$ と $\varepsilon_\Psi H_n \neq 0$ とは, 両立しないことが分かる. $\varepsilon_\Psi T \neq 0$ ならば, $\prod_{i=1}^k f_{\Psi,i}(T) = h_\Psi(T)$ (岩澤主予想) が既約であるから, $\varepsilon_\Psi(Y/T) : \text{有限}$. 故に $\lambda_p(k_\infty/k)_\Psi = 0$ ▣

証明内の M は, k_∞ 上最大 p の外不分岐abel p -拡大,
 Y は non-trivial とした.

§4. 実二次体の場合

今まで述べてきたことを実二次体で見してみる.

k を実二次体 (素数次ガロア拡大でも可) とすると, 全ての素数 p に対して定理1又は定理2が適用され得る. ($p=2$ の

ときは体を取り換える必要性がでてくる ことがある。)

簡単のため、 $p = \text{odd}$ ($p = 2$ でも同様) としておく。

定理 1 K : 実二次体、 p が不分解のとき

$$GC(K, p) \iff A'_0 = H'_0$$

定理 2 K : 実二次体、 p が分解するとき

$$GC(K, p) \iff \begin{cases} A'_0 = H'_0 \\ |A'_n|^r > |A'_n/D_n| & n \gg 0 \\ A'_n{}^r : \text{cyclic} & n \gg 0 \end{cases}$$

証明 (§2 参考)

定理1 は、§2 と同じ。定理2 は、 p_n, p'_n を K_n における p の素 ideal とすると、 $D_n = \langle \text{Cl}_n(p_n), \text{Cl}_n(p'_n) \rangle \cap A_n$ であり、 p_n, p'_n は単項だから、 D_n は cyclic になることを気をつけなければよい。(上の条件は意味が分かり易いよう類群の言葉で書き換えている。3つの条件にはそれぞれ関連がある。) $\square$

ψ : K に対応する primitive な Dirichlet 指標とすると、

定理 3 K : 実二次体

$$\begin{cases} g_\psi(T) \text{ が } \mathbb{Z}_p[T] \text{ 内で既約。} \\ \text{ある } n \text{ に対して、} H_n \neq 0 \end{cases}$$

$$\implies GC(K, p)$$

証明 (§3 参考)

ψ^0 -part は、trivial になることに気をつける。 $\square$

定理2で、 $A_n^r = A_n^r$ が non-cyclic となる場合として、 A_n^r, A_n^r が Γ -module として split するときがある。そこで、 $A_n^r = A_n^r$ ではないが、 $\text{Gal}(M/k_n)$ が split しないような状況を考えて得られたのが定理3である。

定理3の条件にあてはまらない一般的な状況において、予想の正否はどうなっているのだろうか。 A_n^r, A_n^r が non-cyclic $n \gg 0$ となる場合はないのだろうか。

このことから、そして一般的な興味からも、 $g_n(T)$ の性質を調べることは重要なことであると思う。

最後に実験結果を載せておく。

• $p = 2$ $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ $m < 50000$ m : square free
 $m \equiv 1 \pmod{8}$ (case II) 5061例

$r = 0$ の判定で $\frac{3618}{5061}$ (約7割) が成立

$r = 1$ の判定で $\frac{4145}{5061}$ (約8割) が成立

判定法 $A_n^r \supset A_n^r/D_n$ から $|D_n| \geq |A_n^r|/|A_n^r|$. Greenberg の必要十分条件から $|A_n^r| = |D_n|$ がいえればよい。 $|A_n^r|, |A_n^r|$ については、genus formula から k_r の p -単数群を計算することによって得られる。(参考 福田-小松[3], 福田-小松-和田[4], 福田[5], 田谷[14])

$A_n^r \neq 0$ となる中で、 $H_n \neq 0$ が k_r の情報から少なくともいえているもの $\frac{1166}{1443}$ (約8割)

参考文献

- [1] Brumer, On the units of algebraic number fields, *Mathematika* 14 (1967), 121-124
- [2] Ferrero - Washington, The Iwasawa invariant μ vanishes for abelian number fields, *Ann. of Math.* 109 (1979), 377-395
- [3] 福田 - 小松, On $\mathbb{Z}_p$ -extensions of real quadratic fields, *J. Math. Soc. Japan* 38 (1986), 95-102
- [4] 福田 - 小松 - 和田, A Remark on the λ -invariant of Real Quadratic Fields, *Proc. Japan Acad.* 62 Ser.A (1986), 318-319
- [5] 福田, Iwasawa's λ -invariants of Certain Real Quadratic Fields, *Proc. Japan Acad.* 65 Ser.A (1989), 260-262
- [6] Greenberg, On Iwasawa invariants of totally real number fields, *Amer. J. Math.* 98 (1976), 263-284
- [7] Greenberg, On p -adic L -function and cyclotomic fields II, *Nagoya Math. J.* 67 (1977), 139-158
- [8] 岩澤, A note on class numbers of algebraic number fields, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 20 (1956), 257-258
- [9] 岩澤, On T -extensions of algebraic number fields, *Bull. Amer. Math. Soc.* 65 (1959), 183-226

- [10] 岩澤, Lectures on p -adic L -functions, Ann. of Math. Studies 74 Princeton Univ. Press N.J. 1972
- [11] 岩澤, On $\mathbb{Z}_2$ -extensions of algebraic number fields, Ann. of Math (2) 98 (1973), 246 - 326
- [12] 岩澤, On cohomology groups of units for $\mathbb{Z}_p$ -extensions, Amer. J. Math. 105 (1983), 189 - 200
- [13] 岩澤, Greenberg 予想に関する講演
(unpublished)
- [14] 田谷, On the Iwasawa λ -Invariants of Real Quadratic Fields, to appear in Tokyo J. of Math.
- [15] Wiles, The Iwasawa conjecture for totally real fields, Ann. of Math. 131 (1990), 493 - 540