

An ε -Equilibrium Point of the Fractional Game

秋田県立大学 経営システム工学 木村 寛 (YUTAKA KIMURA)¹
秋田県立大学 経営システム工学 星野 満博 (MITSUHIRO HOSHINO)²
新潟工科大学 情報電子工学 田中 謙輔 (KENSUKE TANAKA)³

1 Introduction

分数型非協力 n 人ゲーム (GP) を次の集合

$$(N, X, f_i, g_i, G^i) \quad (1.1)$$

で与える. ここで,

1. $N := \{1, 2, \dots, n\}$ をプレイヤーの集合とし, i 番目のプレイヤーを $i = 1, 2, \dots, n$ で表す.
2. E をバナッハ空間とし, 各々のプレイヤー $i \in N$ は戦略集合 $X_i \subset E$ から戦略 x_i を選ぶものとする. また $X := \prod_{i=1}^n X_i$ とおき, $X \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ で n 人の戦略を表し, これを多価戦略 (multistrategies) と呼ぶ.
3. 各 $i \in N$ に対して, $f_i: X \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$, $g_i: X \rightarrow \mathbf{R}_+$ とする. ただし, $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$ と定義する.
4. 各 $i \in N$ に対して, $G^i = \frac{f_i}{g_i}$ と定義し, G^i をゲーム (GP) におけるプレイヤー i の損失関数とする.

上記の設定のもとに各プレイヤーの戦略の決定過程がその対応する損失関数によって評価され, i 番目のプレイヤーの行動が損失関数 G^i によって与えられるゲームを考える. つまり, 各プレイヤー $i \in N$ は出来るだけ自分の損失を最小にする戦略を選ぼうとする. そこで, 各プレイヤーが妥協できる解として, ゲームの均衡点がよく知られているが, ここでは, $\varepsilon > 0$ を与え ε -均衡点 (ε -noncooperative equilibrium point) の存在について考える.

¹ 〒 015-0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84-4 E-mail: yutaka@akita-pu.ac.jp

² 〒 015-0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84-4 E-mail: hoshino@akita-pu.ac.jp

³ 〒 945-1195 新潟県柏崎市藤橋 1719 番地 E-mail: tanaka@iee.niit.ac.jp

2 A Noncooperative n -Person Parametric Game

ある $\varepsilon > 0$ を与え, 各 $i \in N$ に対して

$$G^i(\bar{x}) < \inf_{y_i \in X_i} G^i(y_i, \hat{\bar{x}}^i) + \varepsilon \quad (2.1)$$

となる $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in X$ の存在を考える.

ただし, 記号 $\hat{\bar{x}}^i$ は $\hat{\bar{x}}^i = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n)$ を表す.

ここで ε -均衡点の定義を与える.

Definition 2.1 ある $\varepsilon > 0$ に対して, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in X$ がゲーム (GP) の ε -均衡点 (ε -n.e.p.) であるとは, 任意の $i \in N$ に対して,

$$G^i(\bar{x}) < \inf_{y_i \in X_i} G^i(y_i, \hat{\bar{x}}^i) + \varepsilon \quad (2.2)$$

が成り立つことをいう.

(GP) における ε -n.e.p. の解の存在を直接求めるのは困難である. つまり, 一般に, 損失関数に凸 (または, 凹) などの性質があれば比較的このような解を得やすいが, 上で与えた分数型の損失関数を持ったゲームでは, 例え各 $i \in N$ で f_i が凸, g_i が凹であったとしても $\frac{f_i}{g_i}$ は凸, または凹になるとは限らない. そこでこの論文の目的である, この分数型非協力 n 人ゲーム (GP) における ε -n.e.p. の存在を示すために, 新たに, (GP) から構成されるあるパラメトリックゲーム (GP_θ) を定義し, (GP_θ) でのアプローチを通して, 解析をおこなった.

よってはじめに, (GP) に対するパラメトリックゲーム (GP_θ) を構成する.

$$(N, X, f_i, g_i, \theta_i, F_{\theta_i}^i) \quad (2.3)$$

ここで,

1. $N := \{1, 2, \dots, n\}$ をプレイヤーの集合.
2. E をバナッハ空間, $X_i \subset E$ を各プレイヤー $i \in N$ の戦略集合とし, また, $X := \prod_{i=1}^n X_i$ とおく.
3. 各 $i \in N$ に対して, $f_i: X \rightarrow \mathbf{R}$, $g_i: X \rightarrow \mathbf{R}_+$ とする.
4. 各 $i \in N$ に対して $\theta_i: \hat{X}^i \rightarrow \mathbf{R}_+$ と定義し, $\theta := (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n): \prod_i \hat{X}^i \rightarrow \mathbf{R}_+^n$ をゲーム (GP_θ) におけるパラメーター関数と呼ぶ. ただし, $\hat{X}^i := \prod_{j \neq i} X_j$ である.
5. 各 $i \in N$ に対して, $F_{\theta_i}^i := f_i - \theta_i g_i: X \rightarrow \mathbf{R}$ をゲーム (GP_θ) におけるプレイヤー i の損失関数とする. つまり, 任意の $x \in X$ に対して $F_{\theta_i}^i(x) = f_i(x) - \theta_i(\hat{x}^i)g_i(x)$ である.

Definition 2.2 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in X$ がゲーム (GP_θ) の均衡点 (n.e.p.) であるとは, 任意の $i \in N$ に対して,

$$F_{\theta_i}^i(\bar{x}) = \inf_{y_i \in X_i} F_{\theta_i}^i(y_i, \hat{\bar{x}}^i) \quad (2.4)$$

$$= \inf_{y_i \in X_i} \{f_i(y_i, \hat{\bar{x}}^i) - \theta_i(\hat{\bar{x}}^i)g_i(y_i, \hat{\bar{x}}^i)\} \quad (2.5)$$

が成り立つことをいう.

今, 各 $i \in N$ において $\varphi_i: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, y) &= F_{\theta_i}^i(x) - F_{\theta_i}^i(y_i, \hat{x}^i) \\ &= f_i(x) - f_i(y_i, \hat{x}^i) - \theta_i(\hat{x}^i)(g_i(x) - g_i(y_i, \hat{x}^i)), \quad \forall (x, y) \in X \times X. \end{aligned}$$

また, $\varphi: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ を次で定義する.

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x, y), \quad \forall (x, y) \in X \times X. \quad (2.6)$$

このとき次の Lemma 2.1 が成り立つ.

Lemma 2.1 次の (1), (2) は同値である.

(1) $\bar{x} \in X$ がゲーム (GP_θ) の n.e.p. である.

(2) $\varphi(\bar{x}, y) \leq 0, \quad \forall y \in X.$

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) であることは, $\bar{x} \in X$ がゲームの均衡点であることより, Definition 2.2 と φ の作り方より明らか.

次に (2) $\Rightarrow$ (1) であることは, 任意の $i \in N$ を固定し, $y = (y_i, \hat{\bar{x}}^i)$ をとる. 今, $\varphi(\bar{x}, y) \leq 0$ であることより,

$$\varphi_i(\bar{x}, y) + \sum_{j \neq i} \varphi_j(\bar{x}, y) \leq 0 \quad (2.7)$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} \varphi_j(\bar{x}, y) &= \sum_{j \neq i} \{f_j(\bar{x}) - f_j(y_j, \hat{\bar{x}}^j) - \theta_j(\hat{\bar{x}}^j)(g_j(\bar{x}) - g_j(y_j, \hat{\bar{x}}^j))\} \\ &= \sum_{j \neq i} \{f_j(\bar{x}) - f_j(\bar{x}_j, \hat{\bar{x}}^j) - \theta_j(\hat{\bar{x}}^j)(g_j(\bar{x}) - g_j(\bar{x}_j, \hat{\bar{x}}^j))\} \\ &\quad (\text{今 } j \neq i \text{ より, } \bar{x} = (\bar{x}_j, \hat{\bar{x}}^j) = (y_j, \hat{\bar{x}}^j)) \\ &= \sum_{j \neq i} \{f_j(\bar{x}) - f_j(\bar{x}) - \theta_j(\hat{\bar{x}}^j)(g_j(\bar{x}) - g_j(\bar{x}))\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって以上より $\varphi_i(\bar{x}, y) \leq 0$ であるので, φ_i の作り方から, $\bar{x} \in X$ はゲーム (GP_θ) の n.e.p. である. $\square$

Lemma 2.2 (Ky Fan's Inequality) X をバナッハ空間, K を X のコンパクトな凸部分集合とし, 実数値関数 $\varphi: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ は次の条件 (1),(2),(3) を満たすものと仮定する.

(1) $\forall y \in K, \quad x \mapsto \varphi(x, y)$; 下半連続関数.

(2) $\forall x \in K, \quad y \mapsto \varphi(x, y)$; 凹関数.

(3) $\forall y \in K, \quad \varphi(y, y) \leq 0$.

このとき, 次が成り立つ.

$$\exists \bar{x} \in K \quad s.t. \quad \forall y \in K, \quad \varphi(\bar{x}, y) \leq 0. \quad (2.8)$$

この Lemma 2.2 の証明は, 参考論文 [5] を参照.

Theorem 2.1 各 $i \in N$ において, $X_i \subset E$ はコンパクト凸な部分集合, f_i, g_i, θ_i は次の条件 (1),(2),(3) を満たしていると仮定する.

(1) $f_i: X \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$, X 上で連続かつ X_i 上で凸関数である.

(2) $g_i: X \rightarrow \mathbf{R}_+$, X 上で連続かつ X_i 上で凹関数である.

(3) $\theta_i: \hat{X}^i \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$, $\hat{X}^i$ 上で連続である.

このとき, ゲーム (GP_θ) の n.e.p. $\bar{x} \in X$ が存在する. すなわち, $\bar{x} \in X$ は

$$\forall i \in N, \quad F_{\theta_i}^i(\bar{x}) = \inf_{y_i \in X_i} F_{\theta_i}^i(y_i, \hat{x}^i) \quad (2.9)$$

を満たす.

Proof. 各 $i \in N$ で $X_i \subset E$ はコンパクト凸集合より, $X = \prod_{i=1}^n X_i$ はコンパクト凸集合. 仮定 (1)(2) より, 任意の $y \in X$ において $\varphi_i(\cdot, y)$ は X 上で連続であるので, $\varphi(\cdot, y)$ も X 上で連続であり, Lemma 2.2 の条件 (1) を満たす. また, f_i, g_i はそれぞれ X_i 上で凸関数, 凹関数であることと, $\theta_i: \hat{X}^i \rightarrow \mathbf{R}_+$ であることから, 任意の $x \in X$ に対して, $\varphi(x, \cdot)$ は X 上で凹関数となり, Lemma 2.2 の条件 (2) を満たす. 更に, すべての $y \in X$ に対して, $\varphi(y, y) = 0$ であることは明らかなので,

$$\sup_{y \in X} \varphi(y, y) = 0,$$

を得る. よって, 以上より Lemma 2.2 から,

$$\exists \bar{x} \in X \quad s.t. \quad \forall y \in K, \quad \varphi(\bar{x}, y) \leq 0. \quad (2.10)$$

従って, Lemma 2.1 より, この $\bar{x} \in X$ はゲームの均衡点であることがいえる. $\square$

ゲーム (GP_θ) での一般のパラメーター関数 θ に対して, 各 $i \in N$ において特に以下で定義する $\bar{\theta}_i$ の適用を試みる.

$$\bar{\theta}_i(\hat{x}^i) := \inf_{y_i \in X_i} G^i(y_i, \hat{x}^i), \quad \forall x \in X. \quad (2.11)$$

ただし, $G^i(y_i, \hat{x}^i) = \frac{f_i(y_i, \hat{x}^i)}{g_i(y_i, \hat{x}^i)}$. また, $\bar{\theta} := (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_n)$ とおく.

上の $\bar{\theta}$ で導入されたゲーム $(GP_{\bar{\theta}})$ における各プレイヤー i の損失関数は,

$$F_{\bar{\theta}_i}^i = f_i - \bar{\theta}_i g_i : X \rightarrow \mathbf{R} \quad (2.12)$$

である.

Lemma 2.3 次の (1), (2) が成り立つ.

(1) 任意の $i \in N$, $x \in X$ に対して, $\theta_i^1(\hat{x}^i) > \theta_i^2(\hat{x}^i) \geq 0$ ならば, 次が成り立つ.

$$\inf_{y_i \in X_i} F_{\theta_i^1}^i(y_i, \hat{x}^i) \leq \inf_{y_i \in X_i} F_{\theta_i^2}^i(y_i, \hat{x}^i) \quad (2.13)$$

(2) 任意の $i \in N$, $x \in X$ に対して, 次の (i)(ii) は同値.

$$(i) \quad \inf_{y_i \in X_i} F_{\theta_i}^i(y_i, \hat{x}^i) < 0.$$

$$(ii) \quad \theta_i(\hat{x}^i) > \bar{\theta}_i(\hat{x}^i).$$

さらにこの時,

$$\inf_{y_i \in X_i} F_{\bar{\theta}_i}^i(y_i, \hat{x}^i) \geq 0, \quad (2.14)$$

が成り立つ.

Proof. (1) の証明: 仮定より任意の $y_i \in X_i$ に対して, $\theta_i^2(\hat{x}^i) g_i(y_i, \hat{x}^i) < \theta_i^1(\hat{x}^i) g_i(y_i, \hat{x}^i)$ であるので,

$$\begin{aligned} F_{\theta_i^1}^i(y_i, \hat{x}^i) &= f_i(y_i, \hat{x}^i) - \theta_i^1(\hat{x}^i) g_i(y_i, \hat{x}^i) \\ &< f_i(y_i, \hat{x}^i) - \theta_i^2(\hat{x}^i) g_i(y_i, \hat{x}^i) \\ &= F_{\theta_i^2}^i(y_i, \hat{x}^i). \end{aligned}$$

よって,

$$\inf_{y_i \in X_i} F_{\theta_i^1}^i(y_i, \hat{x}^i) \leq \inf_{y_i \in X_i} F_{\theta_i^2}^i(y_i, \hat{x}^i).$$

(2) の証明: (i) $\Rightarrow$ (ii) であることは, 仮定より $F_{\theta_i}^i(\bar{y}_i, \hat{x}^i) < 0$ となる $\bar{y}_i \in X_i$ が存在する. ゆえに $F_{\theta_i}^i$ の定義と $g_i(\bar{y}_i, \hat{x}^i) > 0$ であることから,

$$\theta_i(\hat{x}^i) > \frac{f_i(\bar{y}_i, \hat{x}^i)}{g_i(\bar{y}_i, \hat{x}^i)} \geq \inf_{y_i \in X_i} G^i(y_i, \hat{x}^i) = \bar{\theta}_i(\hat{x}^i).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) であることは, $\theta_i(\hat{x}^i) > \bar{\theta}_i(\hat{x}^i) = \inf_{y_i \in X_i} G^i(y_i, \hat{x}^i)$ より, $f_i(\bar{y}_i, \hat{x}^i) - \theta_i(\hat{x}^i) g_i(\bar{y}_i, \hat{x}^i) < 0$ なる $\bar{y}_i \in X_i$ が存在するので,

$$0 > F_{\theta_i}^i(\bar{y}_i, \hat{x}^i) \geq \inf_{y_i \in X_i} F_{\theta_i}^i(y_i, \hat{x}^i).$$

さらに, (2.14) であることは, $\inf_{y_i \in X_i} F_{\bar{\theta}_i}^i(y_i, \bar{x}^i) < 0$ なる $\bar{x}^i \in X^i$ が存在したと仮定すると, $F_{\bar{\theta}_i}^i(\bar{y}_i, \bar{x}^i) < 0$ となる $\bar{y}_i \in X_i$ が存在する. ゆえに,

$$\bar{\theta}_i(\bar{x}^i) > G^i(\bar{y}_i, \bar{x}^i) = \bar{\theta}_i(\bar{x}^i),$$

であり, これは矛盾である. よって,

$$\inf_{y_i \in X_i} F_{\bar{\theta}_i}^i(y_i, \bar{x}^i) \geq 0.$$

□

3 An ε -Equilibrium Point of The n -Person Fractional Game

以下 (GP_θ) での結果を用いて (GP) における ε -n.e.p. の存在を考える.

はじめに $\varepsilon > 0$ を与え, すべての $i \in N$ に対して, $\bar{\theta}_i^\varepsilon := \bar{\theta}_i + \varepsilon$ と定義する. つまり,

$$\bar{\theta}_i^\varepsilon(\bar{x}^i) := \bar{\theta}_i(\bar{x}^i) + \varepsilon, \quad \forall x \in X, \quad (3.1)$$

とし, また, $\bar{\theta}_\varepsilon := (\bar{\theta}_1^\varepsilon, \dots, \bar{\theta}_n^\varepsilon)$ とおく. 明らかに, すべての $x \in X$ に対して, $\bar{\theta}_i^\varepsilon(\bar{x}^i) > \bar{\theta}_i(\bar{x}^i)$ であることから, Lemma 2.3(2) より, $\inf_{y_i \in X_i} F_{\bar{\theta}_i^\varepsilon}^i(y_i, \bar{x}^i) < 0$ を得る.

Definition 3.1 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in X$ がゲーム $(GP_{\bar{\theta}_\varepsilon})$ の n.e.p. であるとは, 任意の $i \in N$ に対して,

$$F_{\bar{\theta}_i^\varepsilon}^i(\bar{x}) = \inf_{y_i \in X_i} F_{\bar{\theta}_i^\varepsilon}^i(y_i, \bar{x}^i) \quad (3.2)$$

$$= \inf_{y_i \in X_i} \{f_i(y_i, \bar{x}^i) - (\bar{\theta}_i(\bar{x}^i) + \varepsilon)g_i(y_i, \bar{x}^i)\} \quad (3.3)$$

が成り立つことをいう.

Theorem 3.1 ある $\varepsilon > 0$ に対して, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in X$ がゲーム $(GP_{\bar{\theta}_\varepsilon})$ の n.e.p. であるならば, $\bar{x} \in X$ はゲーム (GP) の ε -n.e.p. である.

Proof. 任意の $i \in N, x \in X$ に対して, $\bar{\theta}_i(\bar{x}^i) + \varepsilon > \bar{\theta}_i(\bar{x}^i)$ より, Lemma 2.3(2) から,

$$0 > \inf_{y_i \in X_i} F_{\bar{\theta}_i^\varepsilon}^i(y_i, \bar{x}^i). \quad (3.4)$$

また, $\bar{x}$ が $(GP_{\bar{\theta}_\varepsilon})$ の n.e.p. より,

$$0 > f_i(\bar{x}) - (\bar{\theta}_i(\bar{x}^i) + \varepsilon)g_i(\bar{x}) \quad (3.5)$$

が成り立つ. よって,

$$G^i(\bar{x}) < \bar{\theta}_i(\bar{x}^i) + \varepsilon.$$

ゆえに, $\bar{x}$ は (GP) の ε -n.e.p. である. □

Lemma 3.1 各 $i \in N$ において $X_i \subset E$ はコンパクト集合であり, f_i, g_i は次の (1),(2) を満たしていると仮定する.

(1) $f_i : X \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$, X 上で連続.

(2) $g_i : X \rightarrow \mathbf{R}_+$, X 上で連続.

このとき, 任意の $i \in N$ に対して, $\bar{\theta}_i^\varepsilon : X^{\hat{i}} \rightarrow \mathbf{R}_+$ は $X^{\hat{i}}$ の上で一様連続である.

この Lemma 3.1 の証明は, 参考論文 [8] を参照.

Theorem 3.2 ある $\varepsilon > 0$ を与え, 各 $i \in N$ において, $X_i \subset E$ はコンパクト凸集合であり, f_i, g_i は次の (1),(2) を満たしていると仮定する.

(1) $f_i : X \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$, X 上で連続かつ X_i 上で凸関数である.

(2) $g_i : X \rightarrow \mathbf{R}_+$, X 上で連続かつ X_i 上で凹関数である.

このとき, ゲーム $(GP_{\bar{\theta}_\varepsilon})$ の **n.e.p.** $\bar{x} \in X$ が存在する. また, この $\bar{x} \in X$ はゲーム (GP) の ε -**n.e.p.** である.

Proof. 任意の $i \in N$ に対して, $\varphi_i^\varepsilon : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} \varphi_i^\varepsilon(x, y) &:= F_{\bar{\theta}_i^\varepsilon}^i(x) - F_{\bar{\theta}_i^\varepsilon}^i(y_i, x^{\hat{i}}) \\ &= f_i(x) - f_i(y_i, x^{\hat{i}}) - (\bar{\theta}_i(x^{\hat{i}}) + \varepsilon)(g_i(x) - g_i(y_i, x^{\hat{i}})), \quad \forall (x, y) \in X \times X. \end{aligned}$$

また, $\varphi^\varepsilon : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ を次で定義する.

$$\varphi^\varepsilon(x, y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i^\varepsilon(x, y), \quad \forall (x, y) \in X \times X. \quad (3.6)$$

各 $i \in N$ で $X_i \subset E$ はコンパクト凸集合より, $X = \prod_{i=1}^n X_i$ はコンパクト凸集合. 仮定 (1)(2) より, $\varphi_i^\varepsilon(\cdot, y)$ は X 上で連続であるので, $\varphi^\varepsilon(\cdot, y)$ も X 上で連続であり, Lemma 2.2 の条件 (1) を満たす. また, f_i, g_i はそれぞれ X_i 上で凸関数, 凹関数であることと, $\bar{\theta}_i^\varepsilon : X^{\hat{i}} \rightarrow \mathbf{R}_+$ であることから, $\varphi^\varepsilon(x, \cdot)$ は X 上で凹関数となり, Lemma 2.2 の条件 (2) を満たす. 更に, すべての $y \in X$ に対して, $\varphi^\varepsilon(y, y) = 0$ であることは明らかなので,

$$\sup_{y \in X} \varphi^\varepsilon(y, y) = 0,$$

を得る. よって, Lemma 2.2 から, 任意の $y \in X$ に対して, $\varphi^\varepsilon(\bar{x}_\theta, y) \leq 0$ なる $\bar{x}_\theta \in X$ が存在する. ゆえに Lemma 2.1 より, $\bar{x}_\theta$ はゲーム $(GP_{\bar{\theta}_\theta^\varepsilon})$ の **n.e.p.** である. また Theorem 3.1 より, $\bar{x}_\theta$ はゲーム (GP) の ε -**n.e.p.** である. $\square$

References

- [1] J.P.Aubin, Mathematical Methods of Game and Economic Theory, Revised Edition (North-Holland, Amsterdam 1982).
- [2] J.-P. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusion, Springer-Verlag, Grundlehren der math, (1984).
- [3] J.-P. Aubin and I. Ekeland, Applied Nonlinear Analysis, A Wiley-Interscience Publication, (1984).
- [4] J.P. Aubin and H. Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhäuser Boston, (1990).
- [5] J.P.Aubin, Optima and Equilibria (Springer-Verlag, New York, 1993).
- [6] V. Barbu and Th. Precupanu, Convexity and Optimization in Banach Spaces, Editura Academiei, Bucharest, Romania, (1986).
- [7] R.E.Bruck, A Simple Proof of The Mean Ergodic Theorem for Nonlinear Contractions in Banach Spaces, Israel J. Math. 32 (1979) 107-116.
- [8] Y. Kimura, Y. Sawasaki, and K. Tanaka, A Noncooperative Equilibrium for n -Person Game with Fractional Loss Function, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, World Scientific, (1999) 44-51.
- [9] D.G.Luenberger, Optimization by Vector Space Methods (John Wiley & Sons, inc., 1969).
- [10] K. Tanaka and K. Yokoyama, On ε -Equilibrium Point in a Noncooperative n -person Game, J. Math. Anal. Appl., 160 (1991) 413-423.
- [11] R.T.Rockafellar, Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions, Duke Math. J. 33 (1966) 81-89.