

場の量子論における Hamiltonian の定義

神戸大学理学部 麦 林 布 道

「散乱理論とその周辺」研究会において、江沢さんが自由度無限大の系の量子力学としての場の量子論^{*}の基本的なことを述べておられる。ここでは、本研究会の主題に則して QFT の Hamiltonian の Fock space における定義について最近に使っていること、ならびにそれに関連して J. Glimm と K. Hepp の conjecture をお話しして introductory talk としたい。

式を出さなければ簡単にするため、中性スカラー場に限る。他の場が共存する場合への拡張可能性については後で示す。

$x \in \mathbb{R}^s$ とし、 $t=0$ における field operator を

$$(1) \quad \phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int \frac{d^s k}{\sqrt{2\omega}} [a(-k) + a^*(k)] e^{-ikx}$$

の如く展開する。 kx は $\mathbb{R}^s$ における通常の内積、また

$$\omega(k) = (k^2 + m^2)^{1/2}, \quad m \text{ は粒子の質量である。}$$

^{*} 以下 QFT (quantum field theory) と略記する。

$$[a(k), a^*(k')] = \delta^s(k-k')$$

$$[a(k), a(k')] = [a^*(k), a^*(k')] = 0.$$

$$\phi(f) = \int \phi(x) f(x) d^s x, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^s), \quad \text{in Fock space } \mathcal{F}$$

a s. a. operator, Fock vacuum $\in \mathcal{B}_0$ かつ $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$, $\prod_{i=1}^n \phi(f_i) \mathcal{B}_0$,
 $n < \infty$, $f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^s)$, 及 $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0$ の一次結合の集合 ($\mathcal{W}_0$ は
 $\mathcal{D}$ を記す) は $\mathcal{T}$ で dense である。

free Hamiltonian is

$$(2) \quad H_0 = \int \omega(k) a^\dagger(k) a(k) d^3k$$

理論とは、相互作用が全く形式的な ϕ の n 乗の形で

$$(3) \quad V = \lambda \int : \phi^n(x) : g(x) d^5x$$

と書かれるものをいふ。 == の double colon は Wick 積。

$g(x)$ は space cutoff を表わす十分滑らかな関数である。 (3)

を Fourier 変換すると

$$V = \sum_{p+q=n} V_{pq}$$

$$(4) \quad \nabla_{p_j} = \int v_{p_j}(k_1, \dots, k_n) a^*(k_1) \dots a^*(k_p) a(-k_{p+1}) \dots a(-k_n) d^5 k_1 \dots d^5 k_n$$

$v_{\mathbf{p}\mathbf{b}}(k_1, \dots, k_n)$ は本質的¹⁾に $g(x)$ の Fourier 変換と,

$\phi(x)$ の展開 (1) に現われる因子 $(2\omega_i)^{-1/2}$ との積である。

V は一般に $\mathcal{H}$ 上の operator として定義できるわけではない。

V をどう考え, total Hamiltonian をどのように定義するの

が QFT の Hilbert space formulation の一つの課題である。

周知の van Hove - Miyatake のモデル¹⁾ は $n=1, s=3$

の場合に当る。その Hamiltonian の定義に関しては次のように

が利っている²⁾。 v_{n0} をかんたん³⁾に v_0 と書く。

$$(a) \quad D(H_{\text{ren}}) = D(H_0) \quad \text{iff} \quad v_0 \in L_2$$

このとき, $D(V) \supset D(H_0)$ であり, T. Kato の意味での

type (A) の regular perturbation の理論^{*}が適用できる。即ち

$$(5) \quad \|V\psi\| \leq a\|H_0\psi\| + b\|\psi\| \quad (a < 1) \quad \forall \psi \in D(H_0)$$

そして operator として $H_{\text{ren}} = H_0 + V + C$ と書ける。ここで,

C は vacuum energy の shift を与える const. operator である

の場合有限。

$$(b) \quad D(H_{\text{ren}}^{1/2}) = D(H_0^{1/2}) \quad \text{iff} \quad v_0/\omega^{\pm} \in L_2$$

このとき, V は operator ではなく, bilinear form として i の

定義できな⁴⁾が, regular perturbation の type (B) の条件^{**}

* Ref. 3), p. 377

** Ref. 3), p. 398

$$(b) \quad |(\psi, V\psi)| \leq a(\psi, H_0\psi) + b(\psi, \psi) \quad (a < 1) \quad \text{for } \psi \in D(H_0^{1/2})$$

を仮定して、 $(\psi, (H_0 + V + C)\psi)$ を bilinear form とする。このとき s.a. operator $\psi \in H_{ren}$ が定義できる。尚 $D(H_{ren}) \cap D(H_0) = \{0\}$ であり、勿論 operator $\psi \in H_{ren} = H_0 + V + C$ とは書けない。この場合 C は有限 κ となる。

$$(c) \quad D(H_{ren}) \subset \mathcal{F} \quad \text{iff} \quad v_0/\omega \in L_2$$

このとき、vacuum shift は ∞ κ となるが、これを引いた後の H_{ren} は $\mathcal{F}$ 上で定義出来る。(H_0 と H_{ren} を結ぶユニタリ変換が与えられる)。 $D(H_{ren}^{1/2}) \cap D(H_0^{1/2}) = \{0\}$

これらの結果は類似の相互作用の場合に一般化できる。ここで、Glimm⁴⁾ と Hepp⁵⁾ は次の如き conjecture を述べている。相互作用 Hamiltonian の Wick monomial (4) κ あり、 a, a^* は boson であり、fermion であり、antifermion でありとする。更に

$$\gamma = \sum_{i=1}^n \omega(k_i)$$

を定義する。

$$(a') \quad D(H_{ren}) \subset D(H_0) \quad \text{iff} \quad v_0 \in L_2$$

$D(H_{ren}) = D(V) \cap D(H_0)$ は $\mathcal{F}$ 上で dense. 以上より $H_{ren} = H_0 + V + C$ と書ける。 C は有限の vacuum shift.

$$(b') \quad D(H_{\text{ren}}^{1/2}) \subset D(H_0^{1/2}) \quad \text{if} \quad v_0/\gamma \in L_2.$$

$H_{\text{ren}} = H_0 + V + C$ is bilinear form の意味に解せらる。

C は矢張り有限, $D(H_{\text{ren}}) \cap D(H_0) = \{0\}$

$$(c') \quad D(H_{\text{ren}}) \subset \mathcal{F} \quad \text{if} \quad v_0/\gamma \in L_2.$$

この時 C は無限大, $D(H_{\text{ren}}^{1/2}) \cap D(H_0^{1/2}) = \{0\}$

この conjecture は既にいくつかのモデルについて成立していることが確認されている。しかし、その何れもが、いわゆる superrenormalizable なモデルである。即ち C の他の counter term を λ の中級数で求める、ある次数以降は有限な答を与える。 λ の dimension $[\lambda] = L^d$ の $d < 0$ の時 superrenormalizable であるという判定条件はよく知られている。

いくつかの理論について、上記の条件がどの段階まで成り立っているか、また d 及び superrenormalizability の程度はどうか、を表にすると次のようになる。

	(a')	(b')	(c')	d	
$(\phi^{2n})_2$				-2	すべての次数で有限
$(\phi^2)_3$	X			-2	
$(\phi^2)_4$	X	X		-2	
$(\phi^2)_5$	X	X	X	-2	
$(\phi^4)_3$	X	X	X	-1	4次以上で有限

$(\bar{\psi}\psi)_2$				-1	3次以上 で有限
$(\bar{\psi}\psi)_3$				$-\frac{1}{2}$	7次以上 で有限

この内, $\lambda(\phi^4)_2$ 及び $\lambda(\bar{\psi}\psi)_2$ は最近 J. Glimm と A. Jaffe
 によって精力的に調べられた。とくに $\lambda(\phi^4)_2$ では cutoff
 Hamiltonian の self-adjointness を証明するのに対して "singular
 perturbation" の理論を展開し, axiomatic QFT, algebraic QFT
 において既に開発されていた手法を駆使して cutoff を取り除
 き, QFT の基本的要請を満たす理論をつくりあげることに
 成功した (constructive QFT)。その過程の主要な点は, 関根さん,
 池辺さん, 荒木さんのお話に出てくる。ここでは constructive
 QFT の最近の論文を網羅して参考に資するに止めた。

文 献

- [1] L. van Hove, Physica 18 (1952), 145. O. Miyatake, J. Inst. Polytech.
Osaka City Univ. 2A (1952), 89, 3A (1952), 145.
- [2] H. Ezawa, Prog. Theor. Phys. 30 (1963), 545. Y. Kato and N. Mugibayashi,
Prog. Theor. Phys. 30 (1963), 409.
- [3] T. Kato, *Perturbation Theory of Linear Operators*; Springer, 1966
- [4] J. Glimm, Varenna Lectures, Course 45 (1968), 97-119.
- [5] K. Hepp, *Théorie de la Renormalisation*, Springer, 1969.

Constructive Quantum Field Theory

1970 July

Lectures (including Surveys)

- [G1] J. Glimm: Varenna Lectures, Course 45 (1968), pp. 97-119
Models for QFT
- [G2] J. Glimm: Advances in Math. 3 (1969), 101-124
The foundations of QFT
- [J1] A. M. Jaffe: *Contemporary Physics* Vol.2 (1968), pp. 463-470
Progress in constructive field theory
- [J2] A. M. Jaffe: Varenna Lectures, Course 45 (1968), pp. 120-151
Constructing the $\lambda(\phi^4)_2$ theory
- [J3] A. M. Jaffe: RMP 41 (1969), 576-580
Whither axiomatic field theory ?
- [K1] J. R. Klauder: Acta Phys. Austr. Suppl. 6 (1969), 167-214
Hamiltonian approach to QFT

Announcements

- [GJ1] J. Glimm and A. Jaffe: PRL 23 (1969), 1326
A model of Yukawa QFT
- [GJ2] J. Glimm and A. Jaffe: Bull. AMS 76 (1970), 407-410
Rigorous QFT models

Originals

- [CJ1] J. T. Cannon and A. M. Jaffe: Preprint
Lorentz covariance of the $\lambda(\phi^4)_2$ QFT
 Corresponding theory of bounded observables satisfies all the Haag-Kastler axioms. The Poincaré group is represented by *-automorphisms of the C^* algebra, the norm closure of $U_B \mathcal{O}(B)$.

- [E1] J.-P. Eckmann: Thesis, Genève (1970)
Hamiltonians of persistent interactions
 $(\phi_b^+ \phi_b^- P(\phi_a))$ Hamiltonians with momentum cutoff self-adjoint for $\deg P = 1, 2, 4$ and $s = 1$. Semibounded without cutoff for $\deg P = 2$, $s = 1$. The model $\deg P = 1$, $s = 3$ has an infinite mass renormalization. Self-adjointness of the Hamiltonians with no cutoff is shown by summing the Born series.
- [F1] P. Federbush: JMP 10 (1969), 50-52
Partially alternative derivation of a result of Nelson
 Proof of Nelson's result [N1] avoiding the use of functional integration.
- [G3] A. Galindo: Proc. NAS 48 (1962), 1128-1134
On a class of perturbation in QFT
 $(\phi^n)_4$, $n \geq 3$. Expectation values of H_{tot} can be arbitrarily negative.
- [G4] M. Guenin: CMP 3 (1966), 120-132
On the interaction picture
 Escape from Haag's theorem - space cutoff, yet the Heisenberg field satisfies the correct equation of motion in a diamond-like region of space-time.
- [G5] J. Glimm: CMP 5 (1967), 343-386
Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions I
 $(\bar{\psi}\psi)_2$ with space cutoff. H_{ren} defined as a bilinear form in Fock space.
- [G6] J. Glimm: CMP 6 (1967), 61-76
Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions II
 H_{ren} positive definite. Schrödinger equation for H_{ren} can be solved.
- [G7] J. Glimm: CMP 8 (1968), 12-25
Boson fields with nonlinear self-interaction in two dimensions
 $(P(\phi))_2$, even degree, positive leading coefficient with space cutoff. H_{tot} bounded from below due to the Feynman-Kac formula.
- [G8] J. Glimm: CMP 10 (1968), 1-47
Boson fields with ϕ^4 : interaction in three dimensions

- [J4] A. Jaffe: CMP 1 (1965), 127-149
Divergence of perturbation theory for bosons
 $(\sum a_j \phi^j)_2$, finite sum from $j = 3$, $a_j \geq 0$. Perturbation of all orders finite, but the series diverges. Green's function not analytic in λ at $\lambda = 0$.
- [J5] A. Jaffe: JMP 7 (1966), 1250-1255
Wick polynomials at a fixed time
 $(P(\phi))_2$ with space cutoff. Smearing in space is sufficient to prove H_{tot} be densely defined symmetric by the use of Weinberg's asymptotic theorem.
- [JLW1] A. Jaffe, O. Lanford and A. S. Wightman: CMP 15 (1969), 47-68
A general class of cutoff model fields
Existence of Heisenberg fields and Wightman functions. The Kato perturbation is applicable thanks to cutoff dominant boson self-interaction.
- [JP1] A. Jaffe and R. T. Powers: CMP 7 (1968), 218-221
Infinite volume limit of a $\lambda \phi^4$ field theory
 $(\phi^4)_4$ Wightman functional, with infinite volume, finite momentum cutoff. The infinite volume limit not given by a density matrix in Fock space.
- [N1] E. Nelson: *Mathematical Theory of Elementary Particles* (1966), pp. 69-74
A quartic interaction in two dimensions
 $(\phi^4)_2$ in a periodic box. H bounded from below.
- [O1] K. Osterwalder: Preprint
Boson fields with $\lambda \phi^3$ interaction in two, three and four dimensions
 $(\phi^3)_4$ can be renormalized.
- [P1] S. Parrott: CMP 13 (1969), 68-72
Uniqueness of the Hamiltonian in QFT
Remarks on the uniqueness of self-adjoint extension, referring to [G5], [G6], [G8].
- [P2] R. T. Powers: CMP 4 (1967), 145-156
Absence of interaction as a consequence of good ultraviolet behavior in the case of a local Fermi field
Under a certain regularity condition slightly stronger than the finite mass renorm., ICAR theorem asserts that a local relativistic Fermi field must be free.

H_{ren} densely defined symmetric (positivity?). Infinite vacuum energy, mass renorm. and wave function renorm. $(\phi^4)_3$ with space cutoff.

[GJ3] J. Glimm and A. Jaffe: CMP 11 (1968), 9-18

A Yukawa interaction in infinite volume

$(\bar{\psi}\psi\phi)_4$ with momentum cutoff on ψ , but without space cutoff. Existence of Heisenberg fields.

[GJ4] J. Glimm and A. Jaffe: PR 176 (1968), 1945-1951

A $\lambda\phi^4$ QFT without cutoffs I

$(\phi^4)_2$ with space cutoff. $H_{\text{tot}}(g)$ defined as a self-adjoint operator in Fock space. $H_{\text{tot}}(g)$ proved self-adjoint by singular perturbation. Heisenberg picture dynamics discussed à la [G4]. The theory is local. Formally, Lorentz covariant; non-trivial S-matrix.

[GJ5] J. Glimm and A. Jaffe: Ann. Math. 91 (1970), 362-401

The $\lambda(\phi^4)_2$ QFT without cutoffs II. The field operators and the approximate vacuum

Existence of a unique vacuum Ω_g : $H(g)\Omega_g = E_g\Omega_g$. $H(g)$ compact in $[E_g, E_g + m_0 - \varepsilon]$. $\mathcal{U}(B)$ satisfies the Haag-Kastler axioms except the Lorentz covariance (the exception is removed in [CJ1]).

[GJ6] J. Glimm and A. Jaffe: Preprint

The $\lambda(\phi^4)_2$ QFT without cutoffs III. The physical vacuum

The limit $g(x/n)$ tending n to infinity in the states ω_g . GNS construction then getting the physical space.

[GJ7] J. Glimm and A. Jaffe: JMP 10 (1969), 2213-2214

Infinite renormalization of the Hamiltonian is necessary

Unrenormalized H unbounded from below whenever first-order perturbation theory indicates that this is true.

[GJ8] J. Glimm and A. Jaffe: Preprint

Self-adjointness of the Yukawa₂ Hamiltonian

$(\bar{\psi}\psi)_2$. Momentum cutoff makes $\delta m^2(g,K)$, $E(g,K)$ finite. To renormalize as required by perturbation theory. $H(g,K) \rightarrow H(g)$ as $K \rightarrow \infty$, in the sense of resolvent. $H(g)$ has a vacuum.

[GJ9] J. Glimm and A. Jaffe: Preprint

The Yukawa₂ QFT without cutoffs

Heisenberg picture dynamics. All cutoffs are removed in the field operators. The fields are local and formally Lorentz covariant.

- [R1] L. Rosen: CMP 16 (1970), 157-183
A $\lambda\phi^{2n}$ field theory without cutoffs
 $(P(\phi))_2$. Remove box, momentum and space cutoffs. H , positive self-adjoint, has a physical vacuum.
- [SE1] K. Sinha and G. G. Emch: Bull. APS 14 (1969), 86
Adaptation of Powers' no-interaction theorem to Bose field
 Space dimension $n = 3$.

Mathematical Tools

Feynman-Kac Formula

M. Kac: *Probability and Related Topics in Physical Sciences*, Intersci. 1959

J. Glimm: Varenna Lectures, Course 45 (1968), pp. 227-233

Integration in function space

Trotter Product Formula

H. F. Trotter: Pacific J. Math. 8 (1958), 887-919

Approximation of semi-groups of operators

H. F. Trotter: Proc. AMS 10 (1959), 545-551

On the product of semi-groups of operators

I. Segal: Proc. NAS 57 (1967), 1178-1183

Note towards the construction of nonlinear relativistic quantum fields I. The Hamiltonian in two dimensions as the generator of a C^* automorphism group

Analytic Vector

E. Nelson: Ann. Math. 70 (1959), 572-615

Analytic vectors

H. J. Borchers and W. Zimmermann: NC 31 (1964), 1047-1059

On the self-adjointness of field operators

V. P. Gachok: DAN 178 (1968), 1033-1035

A description of all self-adjoint extensions of the field operators

Singular Perturbation

J. Glimm and A. Jaffe: CPAM 22 (1969), 401-414

Singular perturbations of self-adjoint operators

Regular Perturbation

T. Kato: *Perturbation Theory of Linear Operators*, Springer, 1966

Weinberg's Asymptotic Theorem

S. Weinberg: PR 118 (1960), 838-849

High energy behavior in QFT

GNS Construction

R. F. Streater and A. S. Wightman: *PCT Spin [&] and Statistics and All That*, Benjamin, 1964, P. 117 ff.

M. A. Naimark: *Normed Rings*, Noordhoff, 1959, Chap. IV.