

Links of complex isolated singularities

東大 教養 森田 茂之

1. 序 V^{r+1} を複素 $(n+1)$ -空間 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中の $(r+1)$ 次元 analytic set, $P \in V$ を孤立特異点とする。点 P を中心とする半径 ε の球面を S_ε^{2n+1} とし, $L = V \cap S_\varepsilon^{2n+1}$ とおくと ε が十分小さいとき L は $(2r+1)$ 次元向きづけられた $\mathbb{C}^\infty$ -多様体となる。 L の S_ε^{2n+1} 中での法束を ν とすると, ν には自然に $p (= n-r)$ 次元複素ベクトル束の構造が入る。 $BV(p)$ を p 次元複素ベクトル束の分類空間, $\mathcal{B}$ の上の普遍ベクトル束とする。 $\mathcal{B}$ の適当な metric に関する disk bundle sphere bundle をそれぞれ $D(\mathcal{B}), S(\mathcal{B})$ とする。商空間 $D(\mathcal{B})/S(\mathcal{B})$ は普通 $MV(p)$ と記される Thom space と呼ばれる。 $\mathcal{B}$ 上 $f: L \rightarrow BV(p)$ を ν の分類写像とする。 $\mathcal{B}$ にも適当に metric を入れておくと f は写像 $f': D(\mathcal{B})/S(\mathcal{B}) \rightarrow MV(p)$ を誘導する。 $\mathcal{B}$ 上 L の S_ε^{2n+1} 中での管状近傍を T とすると $(T, \partial T)$ と $(D(\mathcal{B}), S(\mathcal{B}))$ とは

微分同相である。そこで写像

$$\alpha: S_{\mathbb{C}}^{2n+1} \rightarrow T/\partial T \cong D(V)/S(V) \xrightarrow{f'} MU(p)$$

を考える。ここで上の写像は $S_{\mathbb{C}}^{2n+1}$ における $\bar{T}$ の補集合上一点に写す写像である。 α はホモトピー群

$\pi_{2n+1}(MU(p))$ の元を定義する。この元を以後 $\theta(V, p)$ と

記す。以上の構成は Pontryagin-Thom の construction

と呼ばれるものであるが、コボルディズム理論における基本的

なものである。さて $p=1$ としよう。このとき

点 p 上での写像 α を $Milnor$ ファイバーと呼ばれる

ものとして考えることにより容易に $\theta(V, p)=0$ となる。更

に一般に、特異点 p が適当な意味で smoothable である

(たとえば Hartshorne [3] 参照) $\theta(V, p)=0$ となる。実

際 $\theta(V, p)$ は特異点の smoothability へのある位相的障

害と見えてくるのである。本稿では $\theta(V, p)$ に関する

Sullivan の予想 [9] とそれに関連する topics の紹介

をしてい。

2. 極小モデル

この節では Sullivan に

よる極小モデルの理論を簡単にまとめよう。詳しくは [2]

[8][9] を参照したい。

M を C^∞ -多様体とする。 $\Omega^*(M)$ を M の

de Rham 複体とすると de Rham の定理により $\Omega^*(M)$ は M の実コホモロジーを与える: $H^*(\Omega^*(M)) \cong H^*(M; \mathbb{R})$. Sullivan の理論のひとつ重要な帰結は 複体 $\Omega^*(M)$ から M の実ホモトピー型が完全に決定できるということである。少し詳しく説明しよう。簡単のため以後は M は単連結かつ $H^*(M; \mathbb{R})$ 有限次元とする。

定義 $\mathbb{R}$ 上の differential graded algebra (以後 DGA と略記する) $M = \bigoplus_{i \geq 0} M^i$ が $\Omega^*(M)$ の (マロト) モデルであるとは DGA 写像 $f: M \rightarrow \Omega^*(M)$ が $f^*: H^*(M) \rightarrow H^*(\Omega^*(M))$ が同型となるものが存在するということ。

定義 DGA M が M の極小モデルであるとは M はモデルであって二条件 (i) M は graded algebra として自由 (ii) $dM \subset M^+ M^+$ つまり M の微分 d による image は decomposable elements より成る。とみたことという。

次の定理は基本的である。

定理 1 (i) M には極小モデル $\rho: M(H) \rightarrow \Omega^*(H)$ が存在する。

(ii) $\rho': M'(H) \rightarrow \Omega^*(H)$ と他の極小モデルとある $D&A$ 写像 $f: M(H) \rightarrow M'(H)$ が存在し $f^*: H^*(M(H)) \cong H^*(M'(H))$ かつ ρ と $\rho' \circ f$ と同次の意味でホモトピーである。即ち $D&A$ 写像 $F: M(H) \rightarrow \Omega^*(H) \otimes (t, dt)$ が存在して $F|_{t=0, dt=0} = \rho$, $F|_{t=1, dt=0} = \rho' \circ f$ 。ここに (t, dt) は $R[t] \otimes \Lambda(dt)$ の次数 $= 0$, dt の次数 $= 1$ である。

(iii) $f: M \rightarrow N$ と (∞) -写像とある。このとき $D&A$ 写像 $\hat{f}: M(N) \rightarrow M(H)$ がホモトピーを除いて唯一つ存在しこの図式は可変になる。

$$\begin{array}{ccc} M(N) & \xrightarrow{\hat{f}} & M(H) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ \Omega^*(N) & \xrightarrow{f^*} & \Omega^*(H) \end{array}$$

さて M のホモトピー群 $\pi_k(M)$ には *Whitehead* 積と呼ばれる演算が定義される。即ち $\pi_p(M)$ の元 α と $\pi_q(M)$ の元 β とに對してある元 $[\alpha, \beta] \in \pi_{p+q-1}(M)$ が次のように定義される。 α, β はそれぞれ写像 $a: (D^p, \partial D^p) \rightarrow (M, x_0)$, $b: (D^q, \partial D^q) \rightarrow (M, x_0)$ により代表さ

これより $[\alpha, \beta]$ は写像 $c: \partial(D^{p+q}) = D^p \times \partial D^q \cup \partial D^p \times D^q \rightarrow M$, $c(x, y) = a(x)$ (if $y \in \partial D^q$), $b(y)$ (if $x \in \partial D^p$) により定義される。Whitehead 積に関する性質がある。

$$(i) \quad [\alpha, \beta] = (-1)^{pq} [\beta, \alpha]$$

$$(ii) \quad (-1)^{pr} [[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{qp} [[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{rq} [[\gamma, \alpha], \beta] = 0$$

$$(\gamma \in \pi_r(M))$$

従って $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\pi_{*}(M) \otimes \mathbb{R}$ には $\mathbb{R}$ 上の graded Lie algebra の構造が入る。

また $m(M)$ を M の極小モデルとする。 $I = m^+(M) / m^+(M)m^+(M)$ を $m(M)$ の indecomposable element の全体とすると自然な同型

$$I \cong \text{Hom}(\pi_*(M) \otimes \mathbb{R}, \mathbb{R})$$

が得られる。更に $m(M)$ の微分 d により誘導される I 上の余積は上の同型により Whitehead 積の dual に対応する。

3. Formal spaces と Formal mappings 前節

述べたように M の実ホモトピー型は M の極小モデル $m(M)$ により完全に決定される。(しかし多様体の中には(或いは、一般に空間の中には) その実ホモトピー型が

コホモロジー環 $H^*(M; \mathbb{R})$ により既に決定されるということがある。このような空間は次のように定式化される [2]。

定義 M が formal であるとは DGA 写像 $\psi: M(M) \rightarrow H^*(M; \mathbb{R})$ が $\psi^*: \text{コホモロジー同型}$ となるものが存在するを意味する。ここに $H^*(M; \mathbb{R})$ の微分は恒等的に 0 とする。

M が formal のときにはその極小モデル $M(M)$ は $H^*(M; \mathbb{R})$ から構成することができる。更に写像に関するは次のように定義する。

定義 C^∞ -写像 $f: M \rightarrow N$ が formal であるとは M, N が共に formal である図式がホモトピー可換のときをいう。

$$\begin{array}{ccc} M(N) & \xrightarrow{\psi} & H^*(N; \mathbb{R}) \\ \hat{f} \downarrow & & f^* \downarrow \\ M(M) & \xrightarrow{\psi} & H^*(M; \mathbb{R}) \end{array}$$

ここに ψ は M, N の formalities を与える DGA 写像。

formal space と formal map に関する定理

としは次のことが著しい。

定理2 ([2]) コンパクト Kähler 多様体及び
それらの間の正則写像は formal である。

4. $\pi_*(H^*(p)) \otimes \mathbb{R}$ ここで本題にもどろう。
まず $\mathcal{O}(V, E)$ の層で成群 $\pi_*(H^*(p))$ を決定したいの
があるが Torsion は無視して $\pi_*(H^*(p)) \otimes \mathbb{R}$ を考える。
(それに伴って $\mathcal{O}(V, E)$ を $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(V, E)$ と記す) まず定義
により $H^*(p) = D(\xi)/S(\xi)$ である。これは多様体では
ないが 多様体の対により近似することが出来る。従って
2, 3 節の結果が使える。(2, 3 節の結果は一般の単複
体に対して $\mathbb{Q}$ 上で成立する。本稿では簡単のために $\mathbb{C}$ -
多様体だけを考えていたのである)。

まず $H^*(p)$ は formal space であることがわかる。
従ってその実ホモロジー群 1 上のコホモロジー環 $H^*(H^*(p); \mathbb{R})$
により決まる。ところが Thom 同型により

$$\begin{aligned} \tilde{H}^*(H^*(p); \mathbb{R}) &= \text{Ideal of } c_p \text{ in } H^*(BU(p)) \\ &= c_p \mathbb{R}[c_1, \dots, c_p]. \end{aligned}$$

$F(p)$ は $H^*(p)$ におけるコホモロジー類 c_p を消した空
間である。 $F(p)$ は $H^*(p)$ 上の S^{2p-1} をファイバー とする

ファイバー空間の全空間と考えることが出来る。従って

Gysin 系列により

$$\begin{aligned}\tilde{H}^*(F(p)) &\cong H^*(C_p R[c_1, \dots, c_p](y), dy = c_p \\ &\cong \tilde{H}^*\left(\bigvee_{\alpha} S^{l(p|\alpha)}\right).\end{aligned}$$

とする。ここに c_{α} は $c_1, \dots, c_{p-1}$ の monomial 全体を動かして $l(p|\alpha) = c_p(\alpha)$ の次数, $\bigvee$ は one point union である。空間 $F(p)$ は formal であることがわかるので結局

$$F(p) \underset{\text{有理 h.e.}}{\sim} \bigvee_{\alpha} S^{l(p|\alpha)}$$

とする。従って Hilton [4] により次のことがわかる。

$$\pi_* (F(p)) \underset{\otimes \mathbb{R}}{\cong} \{c_p(\alpha) \mid \alpha \text{ は } \pm \text{ 成えとる free Lie algebra } (= L \text{ と記す})\}$$

5. Links of complex isolated singularities.

P は V の孤立特異点とし $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(V, P) \in \pi_{2n+1}(MU(p)) \otimes \mathbb{R}$ と考える。 $\pi_{2n+1}(MU(p)) \otimes \mathbb{R} \cong \pi_{2n+1}(F(p)) \otimes \mathbb{R} \cong L$ であるので $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(V, P) \in L$ と思える。 Sullivan はこの元に関する予想をした ([9])。

予想 $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(V, P)$ は L の元として bracket とひもつが含めるべきだろう。

この予想は志賀 [7] により特別な (V, P) に対して

証明されたのであるが後述する Barth の結果 [1] よりもと
彼の議論は全く一般の (V, p) に対して通用するので結局
Sullivan の予想は肯定的に解かれたことになる。議論を詳
しく述べることはこのようになる。

定理 3 ([7]) $\sigma_R(V, p)$ は前記の通りである。

- (i) n : 偶数 $\Rightarrow \sigma_R(V, p) = 0$
- (ii) n : 奇数 $\Rightarrow \sigma_R(V, p)$ は $[C_p C_{r-\frac{n-1}{2}},$
 $C_{p C_{r-\frac{n-1}{2}}}]$ のスカラー倍。

志賀 [7] の議論は次のようである。 V は non-
singular proj. manifold $M \subset \mathbb{C}P^n$ 上の affine cone
とする。このとき $\emptyset$ が孤立特異点となるが
Larsen [5] により L は $(2r-n)$ 連結となる。従って
分類写像 $f: L \rightarrow BU(p)$ は $BU(p)$ の $(2r-n)$ 連結
被覆 $BU(p) \langle 2r-n \rangle$ にリフトする。 $HU(p) \langle 2r-n \rangle$ は
対応する Thom space とすると $\sigma(V, \emptyset)$ は π_{2n+1}
 $(HU(p) \langle 2r-n \rangle)$ の元と思える。ところが L の bracket
は二個以上含む次数 $(2n+1)$ の元は $HU(p) \langle 2r-n \rangle$ には
リフトしないことが計算によりわかるので上述の結果となる
のである。一般には L は $(2r-n)$ 連結とは限らないが

そしてこれが Barth [17] の結果: $H^*(L; \mathbb{C}) = 0$ for $0 < * \leq 2r-1$ があるという議論は一般の (V, E) に対して成立するのだろうか。

ここでもう一つ特別にみる。 V は Segre imbedding $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ 上の cone である。このとき $\mathcal{O}(V, \mathbb{Q})$ は $[C_1, C_2]$ の non-zero multiple である。 ([3] 参照)

6. 結語. 筆者は Sullivan の予想の意味を考へる過程で次の疑問にぶつかった。

問 M はコンパクト Kähler 多様体 N への余次元 p の部分多様体とする。 V は N の正則な写像

$$M \rightarrow D(V)/S(V)$$

は formal か? 又は弱く写像

$$M \rightarrow MU(p)$$

は formal か?

今のところこの結果が得られていない。

定理 4 ([6]) M は $\mathbb{C}P^n$ の中の余次元 p の複素部分多様体とする。このとき写像

$$M \rightarrow MU(p)$$

は formal である。

この定理は一言でいうと “余次元 p が小さいとき $\mathbb{C}P^n$ の中の複素部分多様体は (∞ - 部分多様体にくらべて) 非常に少ない” ことを意味する。つまり定理 3 にあいて V が puj manifold 上の cone のときには定理の主張は定理 4 から従う。

一般の M に関する問題の正否は今のところ尚さ
わかってない。

文 献

[1] Barth, W., Lokale Cohomologie bei isolierten Singularitäten analytischer Mengen, Schr. Math. Inst. Univ. Münster (2) Heft 5 (1971), 59 pp.

[2] Deligne, P., P. Griffiths, J. Morgan,

- D. Sullivan, The real homotopy of Kähler manifolds, *Invent. Math.* 29 (1975), 245-274.
- [3] Hartshorne, R., Topological conditions for smoothing algebraic singularities, *Topology* 13 (1974), 241-253.
- [4] Hilton, P. J., On the homotopy groups of the union of spheres, *J. London Math. Soc.* 30 (1955), 154-171.
- [5] Larsen, M. E., On the topology of complex projective manifolds, *Invent. Math.* 19 (1973), 251-260.
- [6] Morita, S., in preparation.
- [7] Shiga, H., Notes on links of complex isolated singular points, preprint.
- [8] Sullivan, D., Differential forms and the topology of manifolds, *Manifolds - Tokyo* (1973), 37-49.
- [9] Sullivan, D., Infinitesimal computations in topology, *Publ. I. H. E. S.* 48 (1978), 269-331.