

Linear cellular automata over commutative Artin rings

東洋大学総合情報学部

佐藤 忠一

Tadakazu Sato

Department of Information Science and Arts
Toyo University

1. まえがき

セルオートマトンは各セルの状態集合は有限集合として議論され、それ故並列写像の単射性や全射性との間には顕著な関係があるがセルの状態集合を無限集合にまで広げると、セルオートマトンを線形に制限しても並列写像のこの関係が崩れてしまう。そこで、線形セルオートマトンの場合状態集合として、どのような無限環を選べば有限集合上のセルオートマトンと同じような議論ができるのかを調べた結果、可換なアルティン環上であれば有限集合上と同じ議論ができることを示す。さらに、線形並列写像の逆写像を求める過程で現れる線形局所関数の群について述べ、この群は局所関数のスコープ幅には無関係ですべて可換なアルティン環の単元の集合と同型になっていることを示す。また群の逆元と並列写像の逆写像との間の関係を明らかにする。

2. 諸定義と基本的性質

1次元セルオートマトンは4組 $\langle Z, Q, n, f \rangle$ で与えられる。ここで、 Z は整数の集合で1次元セル空間、 Q はセルがとる状態の有限集合、 n は近傍のサイズ、 f は $Q^n \rightarrow Q$ なる写像で局所関数と呼ばれる。

写像 $c: Z \rightarrow Q$ を様相といい、様相の集合を Q^Z で表す。

並列写像 $f_\infty: Q^Z \rightarrow Q^Z$ は次のように定義される。

$$f_{\infty}(c_1) = c_2 \Leftrightarrow c_2(i) = f(c_1(i), \dots, c_1(i+n-1)) \quad (\forall i \in Z).$$

シフト写像 $\sigma: Q^Z \rightarrow Q^Z$ は以下のように定義される。

$$\sigma(c_1) = c_2 \Leftrightarrow c_2(i) = c_1(i+1) \quad (\forall i \in Z)$$

並列写像の一般形は $\exists s \in Z, \sigma^s f_{\infty}$ で表せられる。シフト写像 σ は全単射なので

並列写像の単射性、全射性は f_{∞} について調べればよい。また適当な線形局所関数

$g: Q^m \rightarrow Q$ に対して $\exists k \in Z, f_{\infty} g_{\infty} \sigma^k = I$ であるとき f_{∞} は逆写像をもつ。

ここで、 f と g の近傍のサイズは一般に等しくはない。 $(n \neq m \text{ である。})$

Richardson[1] は並列写像に対して次の関係が成立することを示した。

ここで、 $C_F(Q)$ は $C(Q)$ の部分集合でセルの状態が有限個を除いて静止状態である様相の集合である。

$$f_{\infty} \text{ is injective on } C(Q) \Leftrightarrow f_{\infty} \text{ has an inverse}$$

$\Downarrow$

$$f_{\infty} \text{ is surjective on } C(Q) \Leftrightarrow f_{\infty} \text{ is injective on } C_F(Q)$$

図 1. 並列写像の関係

注意 1. 図 1 における並列写像の関係はセルの状態の集合 Q が無限集合の場合

並列写像を線形に限っても一般には成立しない。

例 1. $f = 2x$ を Z 上のスコープ幅 1 の線形局所関数とする。明らかに $f_{\infty} = 2$ は

単射でその逆写像は $f_{\infty}^{-1} = 1/2$ しかし、 $1/2 \notin Z$ なので逆写像は存在しない。

可換なアルティン環 R とはイデアルに関する降鎖条件を満たす環である。

すなわち、 R の任意イデアル $\{I_j\}$ に対して次の条件を満たすことである。

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots I_n \supseteq \cdots \quad \text{ならば、適当な } n \text{ に対して } I_n = I_{n+1}.$$

可換なアルティン環 R 上の 1 次元線形セルオートマトンは 4 組 $\langle Z, R, n, f \rangle$ で

与えられる。ここで f は $R^n \rightarrow R$ なる線形写像で $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_j x_j$

は線形局所関数と呼ばれる。

線形並列写像 $f_\infty : R^Z \rightarrow R^Z$ は次のように定義される。

$$f_\infty(c_1) = c_2 \quad \Leftrightarrow \quad c_2(i) = \sum_{j=1}^n a_j c_1(i+j-1) \quad \text{for all } i \in Z.$$

従って、並列写像は $f_\infty = \sum_{j=1}^n a_j \sigma^{j-1}$ のように表せられる。明らかに

$f_\infty \sigma = \sigma f_\infty$ が成立する。シフト写像 σ を不定元 X と同一視すれば以下のようになる。

$$f_\infty = \sum_{j=1}^n a_j \sigma^{j-1} \quad \Leftrightarrow \quad F(X) = \sum_{j=1}^n a_j X^{j-1}$$

$$\therefore f_\infty \sigma = \sigma f_\infty \quad \Leftrightarrow \quad F(X)X = XF(X)$$

命題（可換なアルティン環の構造定理）可換なアルティン環 R は局所環に一意に直和分解される。すなわち、 $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_k$ ここで、 k は R における極大イデアルの個数である。

可換なアルティン環の例

$$\{Z_m\} \subsetneq \{\text{有限可換環}\} \subsetneq \{\text{可換なアルティン環}\}$$

次に、線形並列写像の単射性や全射性の判定に不可欠なザリスキー位相について簡単に説明する。

$\text{Spec}(R)$ で R のすべての素イデアルの集合を表し、 $N(R)$ で R のすべての

ベキ零元の集合を表す。 $N(R) = \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P$ が成立することが知られている。

$D(a_j) = \{P \in \text{Spec}(R) \mid a_j \notin P\}$ はザリスキー位相のベースである。

3. 線形セルオートマトンの単射性・全射性

$h: R \rightarrow R/N(R)$ を環準同型写像とする。 R 上の線形局所関数

$f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して $R/N(R)$ 上の線形局所関数を $h(f) = \sum_{j=1}^n h(a_j) x_j$

で定義する。

補題 f_∞ が $C(R)$ 上で単射(全射)になるための必要かつ十分条件は

$h(f)_\infty$ が $C(R/N(R))$ 上で単射(全射)になることである。

定理 1. $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して、次の各命題はすべて等価である。

(1) f_∞ は $C(R)$ 上で全射である。

(2) f_∞ は $C_F(R)$ 上で単射である。

(3) $F(X)$ は零因子ではない。

(4) $(a_1, \dots, a_n) = 1$.

(5) $\bigcup_{j=1}^n D(a_j) = \text{Spec}(R)$.

定理 2. $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して、次の各命題はすべて等価である。

- (1) f_{∞} は $C(R)$ 上で単射である。
- (2) f_{∞} は $C(R)$ 上で逆写像を持つ。
- (3) f_{∞} は $C_F(R)$ 上で全射である
- (4) $\text{Spec}(R) = \bigcup_{j=1}^n D(a_j)$ かつ $D(a_i) \cap D(a_j) = \emptyset$ ($i \neq j$)
- (5) $\sum_{j=1}^n a_j \in R^*$ かつ $a_i a_j \in N(R)$ ($i \neq j$)
- (6) $\sum_{j=1}^n h(a_j) \in (R/N(R))^*$ かつ $h(a_i)h(a_j) = 0$ ($i \neq j$)

ここで、 R^* は R の単元の集合である。

系 1. 可換なアルティン環上の線形並列写像はセルの状態集合が有限集合上の並列写像と同じように図 1 の関係が成り立つ。

4. R 上の線形局所関数の群

定義 1. R 上の線形局所関数 $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ ($a_j \neq 0$) に対して $\sum_{j=1}^n a_j \in R^*$

かつ $a_i a_j = 0$ ($i \neq j$) が成り立つとき f は群構造をもつという。

明らかに、 f が群構造をもてば f_{∞} は単射である。

定理 2 の (6) より次の系 1 が成り立つ。

系 2. f_{∞} が $C(R)$ 上で単射になるための必要かつ十分条件は $h(f)_{\infty}$ が

$C(R/N(R))$ 上で群構造をもつことである。

定理 3. R 上の線形局所関数 $f = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ ($a_j \neq 0$) が群構造をもつとき

$$f \text{ の係数の和を } \alpha \in R^*, \quad f^0 = \alpha^{-1}f \quad \text{とおくと } G(f) = \{\beta f^0 \mid \beta \in R^*\}$$

は線形局所関数の係数の成分ごとの積により群をなす。特に、 f^0 の係数の

和は 1 で群 $G(f)$ の単位元である。明らかに $G(f) \cong R^*$

系 3. R 上のスコープ n 幅の群構造を持つ線形局所関数の群を G_n とおくと

$$\forall f \in G_n \text{ に対して、 } G_n \cong \{\alpha f \mid \alpha \in R^*\} \cong R^* \text{ が成立する。}$$

次に線形局所関数が群構造を持つ場合並列写像の逆写像について考える。並列写像

$$f_\infty = \sum_{j=1}^n a_j \sigma^{j-1} \text{ に対して共役な並列写像 } \bar{f}_\infty \text{ を次のように定義する。}$$

$$\bar{f}_\infty = \sum_{j=1}^n a_j \sigma^{-(j-1)}, \quad \text{明らかに } \bar{f}_\infty f_\infty = f_\infty \bar{f}_\infty = (a_1 + \cdots + a_n)^2$$

定理 4. $\forall f \in G_n$ に対して、 $f = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ とすると次式が成立。

$$f_\infty^{-1} = (a_1 + \cdots + a_n)^{-2} \bar{f}_\infty = (a_1 + \cdots + a_n)^{-1} \bar{f}^0_\infty$$

すなわち、並列写像の逆写像を求めるには f の群における逆元を求めて、その共役な並列写像を作ればよい。

系 4. $f \in G_n$ が群の単位元るとき f 自身の共役な並列写像が逆写像となる。

次に G_n から G_{n-1} の作り方を考える。 $\forall f \in G_n$ に対して f の任意の 2 つの

係数を加えてできるスコープ幅 $n-1$ の線形局所関数 g を考える。明らかに g は

群構造をもつので $g \in G_{n-1}$ が成立する。

定理 5. $K = |\text{Spec}(R)|$ とすると次の定理 (同型定理) が成立する。

$$R^* \cong G_1 \cong \cdots \cong G_n \cong \cdots \cong G_k$$

線形セルオートマトンではセル空間が多次元でも同様な結果が成立する。

5. 参考文献

- [1] S. Amoroso and Y. N. Patt, Decision procedures for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures. *J.Comput.Systems Sci.*6(1972),448-464.
- [2] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, Introduction to commutative algebra,(1969) Addison-Wesley Pub.
- [3] R Gilmer and W Heinzer, Products of commutative rings and zero-dimensionality, *Transaction of the A M S* 331 no.2 (1992) 663-680
- [4] H. Aso and N. Honda, Dynamical characteristics of linear cellular automata, *J. Comput. System Sci.*30 No3 (1985),291-317.
- [5] M. Garzon, "Models of Massive Parallelism "EATACS Text in Theoretical Computer Science, Springer-Verlag, New-York/Berlin, (1995).
- [6] G. A. Hedlund, Endomorphisms and automorphisms of shift dynamical systems. *Mathematical systems Theory* 3 (1969), 320-375.
- [7] M. Ito, N. Osato and M. Nasu, Linear cellular automata over $\mathbb{Z}_m$, *J.Comput. System Sci.*27 No.2 (1983), 125 – 140.
- [8] J. Kari, Reversibility of 2D cellular automata is undecidable, *Physica D* 45 (1990), 379-385.
- [9] J. Kari, Reversibility and surjectivity problems of cellular automata, *J. Comput. System Sci.* 48 (1) (1994), 149-182.
- [10] G. Manzini and L. Margana, Invertible linear cellular automata over $\mathbb{Z}_m$, *J. Comput. System Sci* 56 (1998) 60-67.
- [11] G. Manzini and L. Margana, Attractors of linear cellular automata, *J. Comput. System Sci.* 58 (1999), 597-610.
- [12] D. Richardson, Tessellation with local translations, *J. Comput.System Sci* 6 (12) (1972), 373-388.
- [13] T. Sato, Decidability for some problems of linear cellular automata over finite commutative rings, *Information Processing Letters* 46 (1993), 151-155.
- [14] T. Sato, Group structured linear cellular automata over $\mathbb{Z}_m$, *J. Comput. System Sci* 49 No1. (1994), 18-23.
- [15] T. Sato, Ergodic characterization of linear cellular automata over $\mathbb{Z}_m$, *Theoretical Computer Science, Elsevier* 205 (1998), 135-144.
- [16] T. Sato, Surjective linear cellular automata over $\mathbb{Z}_m$, *Informaiton Processing Letters* 66 (1998), 101-104