

Fricke path について

名大・理 寺西鎮男

最近、D. H. Hejhal は、compact Riemann 面上の、 g -正則微分 $f(z)(dz)^g$ が zero になる条件を、Fricke path と呼ばれるものを用いて、あらしめる事を試みた。しかし、彼は、 $g \leq 6$ という条件を付けているので、この Note では、古典的な、不変式論を用いて、条件 $g \leq 6$ を取り除く事も試みる。

今、 M を genus $g \geq 2$ の compact Riemann 面とする。その時、 M の基本群 $\pi_1(M)$ は、 $2g$ 個の元、

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g$$

で生成され、commutator relation

$$[\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_g, \beta_g] = 1$$

を満足する。

良く、知られている様に、 M の genus が 2 以上の時は、compact Riemann 面は、上半平面 H もある。 $SL(2, \mathbb{C})$ の discrete subgroup Γ で割、たまためとして、実現できるので、以下では、 M と H/Γ とを、同一視する。

今、 $\hat{\lambda} \in \text{Hom}(\Gamma, SL(n, \mathbb{C}))$ の元として、上半平面上の、一次独立な、正則関数の n 個の組を

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) \\ \vdots \\ \varphi_n(z) \end{pmatrix}$$

とする。 $\varphi(z)$ が、 Γ の任意の元 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

$$\varphi\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \hat{\lambda}(\sigma) \varphi(z) (cz+d)^{-n}, \quad \hat{\lambda}(\sigma) \in SL(n, \mathbb{C})$$

と云う、変換を受ける時、 $\varphi(z)$ を、zeta-Fuchs 関数と云う。

今、 $\varphi(z)$ を、一組の基本解として持つ、 n 階の線型微分方程式

$$\begin{vmatrix} y & \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ y' & \varphi_1' & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(n)} & \varphi_1^{(n)} & & \varphi_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

を、

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n y + \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} p_{\ell}(z) \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-\ell} y = 0$$

の形に、書いておくと、 $\hat{\chi}(0)$ かつ、 $SL(n, \mathbb{C})$ の元 τ がある事から、容易に、 $p_{\ell}(z) = 0$ となる事がわかるから、 $\varphi(z)$ の微分方程式は、

$$L_n(p|z, y) = \left(\frac{d}{dz}\right)^n y + \sum_{\ell=2}^n \binom{n}{\ell} p_{\ell}(z) \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-\ell} y = 0$$

と書ける、

さて、天下り式であるが、 $\varphi(z)$ に対して、 $n-1$ 個の、正則関数、 $\theta_1(z), \theta_2(z), \dots, \theta_n(z)$ を次の様に定義する。

定義 1. $\varphi(z)$ の微分方程式、 $L_n(p|z, y) = 0$ に対して、 $n-1$ 個の関数、 $\theta_1(z), \dots, \theta_n(z)$ を、

$$\theta_m(z) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{m-2} (-1)^{\ell} \frac{(m-2)! m! (2m-\ell-2)!}{(m-\ell-1)! (m-\ell)! (2m-3)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{\ell} p_{m-\ell}(z)$$

と、定義する。

定理 1. H/Γ の、 k -正則微分全体のなす、ハクトル空間を、 $S_k(\Gamma)$ と現わす時、

$$\varphi(z) \text{ が } \text{zetaeta-Fuchs 関数} \Leftrightarrow \theta_m(z)(dz)^m \in S_m(\Gamma) \\ (2 \leq m \leq n)$$

$S_M(\Gamma)_{\mathbb{R}}$ の basis を $\{\dots, g_{m,\alpha}(z), \dots\}$ を取れば、
定理 1 に よっ て、

$$\theta_m(z) (dz)^m = \sum_{\alpha} \lambda_{m,\alpha} \cdot g_{m,\alpha}(z)$$

と書けるが、 $\{\dots, \lambda_{m,\alpha}, \dots\}$ を accessory parameters と呼ぶ
事にする。

定義 2. n 個の関数の組 $A_{m,\alpha}(z)$ を、

$$A_{m,\alpha}(z) = \sum_{\ell=m}^n \binom{n}{\ell} \frac{(\ell-1)!}{(m-1)!} \frac{(2m-1)!}{(m+\ell-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-\ell} \varphi(z) \cdot \left(\frac{d}{dz}\right)^{\ell-m} g_{m,\alpha}(z)$$

によっ て、定義する。

定理 2. Γ の任意の元 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

$A_{m,\alpha}(z)$ は、次の変換を受ける。

$$A_{m,\alpha}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \hat{\chi}(\sigma) A_{m,\alpha}(z) (cz+d)^{n+1}$$

$$(2 \leq m \leq n)$$

次に、accessory parameters $\{\dots, \lambda_{m,\alpha}, \dots\}$ を、なめろ
かに、動かす時、定理 1 に よっ て、zeta-Fuchs
関数 $\varphi(z)$ や、 $\hat{\chi}(\sigma)$ も、なめろかに、変換され
るか、それらの variational formula を、求め
る。

行列,

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(z) & \cdots & \varphi_n(z) \\ \varphi_1'(z) & \cdots & \varphi_n'(z) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(z) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(z) \end{pmatrix}^{-1}$$

の n 番目の行からなる、横ベクトルを、 $W(z)$ とする。

さて、zeta - Fuchs 関数 $\varphi(z)$ と、 $\varphi(z)$ に対応する $n-1$ 個の正則微分 $\theta_1(z)(dz), \dots, \theta_{n-1}(z)(dz)$ に対して、正則微分、 $\theta_m(z)(dz)^n + \sum_k \lambda_{m,k} \cdot g_{m,k}(z)$ ($2 \leq m \leq n$) に対応する、zeta - Fuchs 関数を、 $\varphi(z, \lambda)$ ($\lambda = \{\dots \lambda_{m,k} \dots\}_{2 \leq m \leq n}$) と書き、それに対応する、monodromy 準同型を、 $\hat{\chi}(\sigma, \lambda)$ と書く事にする。

定理 3. 次の variational formula が成り立つ。

$$(i) \quad \left(\frac{\partial \varphi(z, \lambda)}{\partial \lambda_{m,k}} \right)_{\lambda=0} = - \int_{z_0}^z A_{m,k}(z) W(z) dz \cdot \varphi(z)$$

$$(ii) \quad \left(\frac{\partial \hat{\chi}(\sigma, \lambda)}{\partial \lambda_{m,k}} \right)_{\lambda=0} = - \int_{z_0}^{\sigma z_0 + 1/\sigma + d} A_{m,k}(z) W(z) dz \cdot \hat{\chi}(\sigma)$$

2 つの、たてベクトル $X(z)$, $Y(z)$ を

$$X(z) = (z^{n-1-d}), \quad Y(z) = ((-1)^d \binom{n-1}{d} z^d)$$

$$0 \leq d \leq n-1$$

とし、 $M(z) = X(z)^t Y(z)$ と定義する。

$SL(n, \mathbb{C})$ の任意の元 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

$$X(\sigma z) (cz+d)^{n-1} = \chi(\sigma) X(z)$$

$$\exists \sigma \in \text{Hom}(SL(2, \mathbb{C}), SL(n, \mathbb{C}))$$

従って、 $X(z)$ は *zeta-Fuchsian* であり、対応する微分方程式は、 $(\frac{d}{dz})^n y = 0$ である。

次に、 $\varphi(z) = X(z)$ に対して、定理 3 を適用する。この時、 $w(z) = \frac{1}{(n-1)!} Y(z)$ となる、

定義 3. $\varphi(z) = X(z)$, $\sigma \in \Gamma$ に対して、

$$I[\varphi_{m,d}, \sigma] = \text{Tr} \left(\int_{\sigma z_0}^{\frac{az_0+b}{cz_0+d}} A_{m,d}(z)^t Y(z) dz \cdot \chi(\sigma) \right)$$

と定義する。(但し、 $\text{Tr}(\cdot)$ は、 $n \times n$ 行列、

$$\int_{\sigma z_0}^{\frac{az_0+b}{cz_0+d}} A_{m,d}(z)^t Y(z) dz \cdot \chi(\sigma) \text{ の trace を現わす})$$

$\text{Hom}(\Gamma, SL(n, \mathbb{C}))$ には、 $SL(n, \mathbb{C})$ が、内部自己同型として、自然に作用しているから、 $\text{Hom}(\Gamma, SL(n, \mathbb{C}))$ の、 $SL(n, \mathbb{C})$ による、quotient は $\text{Hom}(\Gamma, SL(n, \mathbb{C})/SL(n, \mathbb{C}))$

で表わす. $V = \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}(n, \mathbb{C})) / \text{SL}(n, \mathbb{C})$ には, 複素多様体の構造が入り, その複素次元は,

$2(n-1)(g-1)$ である事が知られている. 一方,

Riemann - Roch の定理により,

$$\dim_{\mathbb{R}} \left(\bigoplus_{m=2}^n S_m(\Gamma) \right) = 2(n^2-1)(g-1)$$

であるので,

$$\dim_{\mathbb{C}} V = \dim \left(\bigoplus_{m=2}^n S_m(\Gamma) \right)$$

となる事に, 注意する.

さて, Γ の任意の元 σ は, V の任意の元, $[\hat{\sigma}]$ ($[\hat{\sigma}]$ は, $\hat{\sigma}$ の $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ による代表類) に対して

$\text{Tr}(\hat{\sigma}(\sigma))$ を対応させる事により, V 上の関数と見なせる. $X(z)$ に対応する, V の元, $[X]$ で V は, 正則である事が, 知られているので, 次の定義をする. $r = \dim V$ とおく.

定義 4 Γ の r 個の元 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ を, V 上の関数と見た時, V の点, $[X]$ のある近傍の局所座標となっている時, $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ を, Fricke paths という.

ベクトル空間 $\bigoplus_{m=2}^n S_m(\Gamma)$ から $g_1(z) \dots g_r(z)$ を, 取り, Γ から r 個の元, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ を取って

次の行列式 J を考える.

$$J = \det \left[\begin{array}{cc} I_m & I(g_i, \sigma_j) \end{array} \right]_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}}$$

(但し、 I_m は imaginary part をあしわす)

定理 3 を用いて、次の定理が、証明できる.

定理 4 $J \neq 0$ の時、次の (a), (b) が成り立つ.

(a). $\{g_1, \dots, g_r\}$ は、 $\bigoplus_{n=2}^n S_n(\Gamma)$ の basis である.

(b). $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ は、Fricke paths である.

定理 5 $\{g_1, \dots, g_r\}$ が、 $\bigoplus_{n=2}^n S_n(\Gamma)$ の basis の時、

$J \neq 0 \iff \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ は Fricke paths.

References

1. D.A. Hejhal. Monodromy groups and Poincare series.
Bull. Amer. Math. Soc. 1978.
2. 森川 寿. 不変式論. 紀伊屋.
3. R. Gunning. Lectures on vector bundles over Riemann surfaces. Princeton.