

超関数の積と canonical extensions について

広島大 総合科 板野 暢之 (Mitsuyuki Itano)

超関数の積については色々の形で研究され、それぞれに特徴をもっている。ここでは以前構成した2種類の積[3, 13]についてその部分積を考え、その応用を試みた。

Ω を N 次元ユークリッド空間 R^N の空でない開集合とし、 $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ とする。任意の $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して $\alpha S * \check{T}$ が原点 0 の近傍で存在し、Łojasiewicz [11] の意味の値 $(\alpha S * \check{T})(0)$ をもつとき、すなわち $\phi \geq 0$, $\int \phi dx = 1$ なる任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^N)$ に対して $\phi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^N} \phi(\frac{x}{\lambda})$, $\lambda > 0$, とおくと $(\alpha S * \check{T})(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle \alpha S * \check{T}, \phi_\lambda \rangle$ 。このとき $\mathcal{D}(\Omega) \ni \alpha \rightarrow (\alpha S * \check{T})(0)$ は連続となり $\langle W, \alpha \rangle = (\alpha S * \check{T})(0)$ となる $W \in \mathcal{D}'(\Omega)$ が一意的に存在する。 $W = S \circ T$ と記す [3]。

$$\langle \alpha S * \check{T}, \phi_\lambda \rangle = \langle S(T * \phi_\lambda), \alpha \rangle$$

より、上記の性質をもつすべての $\phi \in \mathcal{D}(R^N)$ に対して極限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S(T * \phi_\lambda)$ が ϕ のとり方に無関係に定まるとし、これを

$S \circ T$ と定義できる。

また $\{\phi_\lambda\}$ は restricted δ -列 $\{f_j\}$ [12] によって置きかえることも可能である。 $\{f_j\}$ は $f_j \geq 0$ なる $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ の列で ① $\text{supp } f_j \rightarrow \{0\}$, ② $\int f_j dx \rightarrow 1$ ③ 各 p に対し $\int |x|^{1p} |D^p f_j| dx \leq M_p$ となる j に無関係な定数 $M_p \in \mathbb{R}$ もつ。

任意の restricted δ -列 $\{f_j\}$ に対して超関数的極限 $\lim_{j \rightarrow \infty} S(T * f_j)$ が存在するとき, この極限を $S \circ T$ と定義する。更に任意の restricted δ -列 $\{f_j\}, \{\tilde{f}_j\}$ に対して $\lim_{j \rightarrow \infty} (S * f_j)(T * \tilde{f}_j)$ としても同値である。この積は次の性質を持っている。

(I) (1) $f, g \in C(\Omega)$ のとき, $f \circ g$ は存在し普通の積 fg と一致。

(2) $S \circ T$ が存在すれば $T \circ S$ が存在して両者は一致。

(3) $S_1 \circ T, S_2 \circ T$ が存在すれば $(S_1 + S_2) \circ T = S_1 \circ T + S_2 \circ T$ 。

(4) $S \circ T$ が存在すれば, 任意の $\alpha \in \mathcal{E}(\Omega)$ に対して $(\alpha S) \circ T$ が存在して $(\alpha S) \circ T = \alpha(S \circ T)$ 。

(II) $\frac{\partial S}{\partial x_i} \circ T$ ($i=1, 2, \dots, N$) が存在すれば, $S \circ T, S \circ \frac{\partial T}{\partial x_i}$ が存在して $\frac{\partial}{\partial x_i}(S \circ T) = \frac{\partial S}{\partial x_i} \circ T + S \circ \frac{\partial T}{\partial x_i}$ 。

(III) (1) $S \circ T$ が存在すれば, Ω_1 の制限に対しても $S_{\Omega_1} \circ T_{\Omega_1}$ が存在し $(S \circ T)_{\Omega_1}$ に等しい。

(2) $\Omega = \bigcup \Omega_i$ のとき, $S_{\Omega_i} \circ T_{\Omega_i}$ が存在すれば $S \circ T$ が存在。

(IV) 至多 Ω' から Ω の上への diffeomorphism とし, $J(x)$ を $x' =$

$\Phi^{-1}(x)$ のヤコビアンとする。 $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対し $\tilde{S} \in \mathcal{D}'(\Omega')$ を

$$\langle \tilde{S}(x'), \phi(x') \rangle = \langle S(x), |J(x)| \phi(\Phi^{-1}(x)) \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega')$$

とすると $S \circ T$ が存在すれば $\tilde{S} \circ \tilde{T}$ が存在して $(S \circ T)^\sim$ に等しい。

$\alpha \in \mathcal{E}(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対しては $\alpha \circ T$ は普通の積 αT と一致し, 冪 (I)(4) より $\text{supp}(S \circ T) \subset \text{supp } S \cap \text{supp } T$ である。性質 (IV) から C^∞ 多様体上の超関数の積, カレントの外積の定義を可能にする。ここでは特に性質 (II) に着目したい。これは「2つの超関数の積が可能であるためには, 一方が不正則であればそれだけ他方が正則であるべきだ」という Schwartz の言葉のひとつの定式化である。 $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ がすべての $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ と積が可能になるのは $\alpha \in \mathcal{E}(\Omega)$ のとき, そのときのみである。

$p \in \text{multi-index}$ とし $0 \leq |p| \leq |p|$ なるすべての q に対して $D^q S \circ T$ が存在すれば, $S \circ D^p T$ が存在して

$$S \circ D^p T = \sum_q (-1)^q \binom{p}{q} D^{p-q} (D^q S \circ T)$$

が成立することが性質 (II) から導びかれる。

定理 1 $R^N = R^n \times R^m \ni (x, t)$ に対し $\frac{\partial S}{\partial x_i} \circ T$, $i=1, 2, \dots, n$; $S \circ \frac{\partial T}{\partial t_j}$, $j=1, 2, \dots, m$ が存在すれば, $S \circ \frac{\partial T}{\partial x_i}$, $\frac{\partial S}{\partial t_j} \circ T$ が存在し, 次の式が成立する。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (S \circ T) = \frac{\partial S}{\partial x_i} \circ T + S \circ \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial t_j} (S \circ T) = \frac{\partial S}{\partial t_j} \circ T + S \circ \frac{\partial T}{\partial t_j}.$$

$S(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t^m)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ に対し $(1 \otimes S) \circ T$ が存在するとき,
やはり $S \circ T$ と記し, 部分積と呼ぶ。

この部分積が存在するための条件は, すべての $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_x^m)$
に対して積 $S(t) \circ \langle T(x, t), \phi(x) \rangle_x$ が存在することであり
 $\langle S \circ T, \phi \rangle_x = S \circ \langle T, \phi \rangle_x$ を得る。

$N=1$ のときは, 超関数の一点における値の概念を拡張する
ことによって (I) から (IV) までの性質を保存して我々の積
の定義を拡張できる。しかし $N \geq 2$ のとき (I) ~ (IV) を
みたす積は上記のもの以外に存在するかどうか不明である。

一方 $p_j \geq 0$ なる $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ の列 $\{p_j\}$ が ① $\text{supp } p_j \rightarrow \{0\}$, ②
 $\int p_j dx = 1$ なるとき, δ -列と呼ぶ。 $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対し,
任意の δ -列 $\{p_j\}$ に対して超関数的極限 $\lim_{j \rightarrow \infty} S(T * p_j)$ が
存在するとき, この極限を $S \cdot T$ と記し狭義の積 [13] と呼ぶ。

定理 2. $S \cdot T$ が存在するための必要十分条件は, 任意の
 $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して零近傍 U が存在し, $\alpha S * \check{T}$ が U で
有界, 原点で連続になることである。このとき

$$\langle S \cdot T, \alpha \rangle = (\alpha S * \check{T})(0) \quad \text{となる。}$$

$S \cdot T$ が存在すれば $S \circ T$ が存在し両者は一致する。 $N=1$
のとき, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \circ \delta = 0$ であるが $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \delta$ は存在しない。部
分積の概念はこの狭義の積に対しても同様に導入される。ま

この狭義の積は (I) から (III) の性質, また定理 1 もみれば,
が, (IV) をみればどうかは分かっていない。

例 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ とし $\mathcal{H}(D)$ を D での正則関数全体
で compact conv. top. をもつ空間とする。 $\mathcal{H}(D) \ni h = h_r(0)$ が
超関数的極限 $\lim_{r \rightarrow 1-0} h_r(0)$ をもつのは $(1-r)^k h(z)$ が D で有
界となる整数 $k > 0$ が存在する = と, すなわち $h(z) = \sum a_j z^j$
とすると, $\|h\|_k = \sup_{j \geq 0} |a_j| / (1+j)^k < \infty$ である。
そこで $\|h\|_k < \infty$ となる $\mathcal{H}(D)$ の元からなる Banach 空間を
 $\mathcal{Y}_k$ とし, $\mathcal{Y}$ を $\mathcal{Y}_k$ の inductive limit とする。 $\mathcal{Y}$ の元
 h の境界値 $(h(z))_+$ の全体を $\mathcal{Y}_+$ で記すと

$\mathcal{Y}_+$ の任意の元 f_1, f_2 に対して常に狭義の積 $f_1 \cdot f_2$ が存
在する。 $f_1 = (h_1(z))_+, f_2 = (h_2(z))_+$ とすると, $f_1 \cdot f_2 =$
 $(h_1(z)h_2(z))_+$ を得る。

$\Gamma \in \mathbb{C}$ 上の simple analytic arc とし, 領域 G が Γ の一方の
側にのみあって, その境界がある open arc $\Gamma_0 \subset \Gamma$ を含むと
する。 $\mathcal{H}(G)$ の元 $h_1(z), h_2(z)$ が境界値 f_1, f_2 をもてば, 積
 $f_1 \cdot f_2$ は存在する。

積。 は局所的性質 (III) をもち, diffeomorphism 特には
conformal map で不変である = とより導く = とができる。

以後 $N = n+1$ とする。 $f(t)$ を R_t 上の実数値 C^∞ -関数

で $t \leq 1$ に対して 0, $t \geq 2$ に対して 1 なる関数とし, $\rho_{(\varepsilon)}(t) = \rho(\frac{t}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ と記す. Ω を空でない R^n の開集合, $a > 0$ とし, $u \in \mathcal{D}'(\Omega \times (0, a))$ とする. $\rho_{(\varepsilon)} u$ を $t < \varepsilon$ で 0 と定義して $\mathcal{D}'(\Omega \times (-\infty, a))$ の元とみる. もし上記 ρ のすべてに対して極限 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_{(\varepsilon)} u$ が $\mathcal{D}'(\Omega \times (-\infty, a))$ で存在し, ρ のとり方に無関係のとき, $\alpha \otimes \gamma$ として u の $t=0$ を $\alpha \otimes \gamma$ での canonical ext. と呼ぶ.

$\lim_{t \rightarrow 0} u$ ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon t) = \alpha \otimes \gamma$) が存在するとき, $u_\sim$ は存在する. $u = \frac{\partial v}{\partial t}$ のとき $u_\sim$ の存在と $\lim_{t \rightarrow 0} v$ の存在は同値になる.

P は $m \times m$ 行列 $\|P_{ij}(x, t, D_x)\|$ で $P_{ij} = \sum a_{i,j,\nu}(x, t) D^\nu$, $a_{i,j,\nu}(x, t) \in C^\infty(\Omega \times (-a, a))$ とする. u, f, α は m 次列ベクトルとして次の初期値問題を考える.

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = P(x, t, D_x) u + f & , \quad \Omega \times (0, a) \\ \lim_{t \rightarrow 0} u = \alpha \end{cases}$$

定理 3 [4] $(*)$ の解 $u = {}^t(u_1, \dots, u_m)$, $u_j \in \mathcal{D}'(\Omega \times (0, a))$ が存在すれば f は canonical ext. $f_\sim = {}^t(f_{1\sim}, \dots, f_{m\sim})$ とも,

$$\frac{\partial u_\sim}{\partial t} = P(x, t, D_x) u_\sim + f_\sim + \alpha \otimes \delta, \quad \Omega \times (-a, a).$$

逆に $t < 0$ で 0 になる $v = {}^t(v_1, \dots, v_m)$, $v_j \in \mathcal{D}'(\Omega \times (-a, a))$ が

$$\frac{\partial v}{\partial t} = P(x, t, D_x) v + f_\sim + \alpha \otimes \delta, \quad \Omega \times (-a, a)$$

をみたせば $u = v|_{\Omega \times (0, a)}$ は $(*)$ の解となり, $u_\sim = v$ となる.

超関数の積について狭義のものと同様に超関数の canonical ext., 境界値についても考えられる。すなわち $\text{supp } g_k \subset (0, \infty)$ である任意の δ -列 $\{g_k\}$ に対して, $f_k = Y * g_k$ とおく。 $u \in \mathcal{D}'(\Omega \times (0, a))$ に対し $\lim f_k u, \lim \langle u, g_k \rangle$ が上記すべての δ -列 $\{g_k\}$ に対して存在するとし, それぞれ狭義の canonical ext., 狭義の境界値 ($\delta\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} u$) という。これらに対しても上の定理は成立する。

$\mathcal{D}'(\Omega \times (0, a))$ の元 u が $\mathcal{D}'(\Omega) \hat{\otimes} C(0, a)$ に属するとし, t にかんして連続と呼ぶ。これは $\mathcal{D}'(\Omega)$ -値連続関数 $u(t)$ と同一視される。

定理 4 $u = {}^t(u_1, \dots, u_m), u_j \in \mathcal{D}'(\Omega \times (0, a))$ が $\Omega \times (0, a)$ で $\frac{\partial u}{\partial t} = P(x, t, D_x)u + f$ をみたしているとする。

I. もし $f_{\sim} = {}^t(f_{1\sim}, \dots, f_{m\sim})$ が存在すれば (1), (2) は同値。

(1) u は $t=0$ を越えて拡張できる。

(2) $\lim_{t \rightarrow 0} u$ が存在する。

II. 次の (1), (2) は同値。

(1) u が $0 < t < a$ なる t にかんして連続。

(2) $f = \frac{\partial g}{\partial t}$ となる任意の g は $0 < t < a$ で連続。

III. 次の (1), (2) は同値。

(1) u が $0 < t < a$ なる t にかんして連続で $u(t)$ が,

t にかんして $\mathcal{D}'(\Omega)$ -値連続微分可能。

(2) f が $0 < t < a$ なる t にかんして連続.

このとき $u'(t) = p(x, t, D_x)u(t) + f(t)$ をみとす.

II. の略証と超関数の積 (部分積) の性質を利用して示す.

(1) $\Rightarrow$ (2). $0 < t' < a$ なる任意の点 t' をとり, t' に台をもつ

Dirac の δ -関数 $\delta_{(t')}$ を考える. 狭義の部分積 $g(x, t) \cdot \delta_{(t')}$ の存在を示せばよい. $u(x, t) \cdot \delta_{(t')} = u(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (1 \otimes Y(t-t'))$,

$u(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (1 \otimes Y(t-t')) = 0$ より狭義の積にかんする定理 1 から部分積 $\frac{\partial u}{\partial t} \cdot Y(t-t')$, $u \cdot Y(t-t')$ の存在がわかる. 従って

$f(x, t) \cdot Y(t-t')$ が存在し, 再び同定理を使って部分積 $g(x, t) \cdot \delta_{(t')}$ の存在がわかる.

(2) $\Rightarrow$ (1). $f = \frac{\partial g}{\partial t}$ なる g が $0 < t < a$ で連続であることより, $0 < t' < a$ の任意の t' に対して (1) $\Rightarrow$ (2) の証明と同様にして $f(x, t) \cdot Y(t-t')$ の存在を知る. 故に f は $t = t'$ を越えて狭義の canonical ext. $f_{\sim}$ をもつから定理 3 を $t = t'$ で考えて

$$\frac{\partial u_{\sim}}{\partial t} = p(x, t, D_x)u_{\sim} + f_{\sim} + \alpha \otimes \delta_{(t')}$$

をみとす. 任意の開集合 $G \subset \Omega$ に対し $Y_{k_0+1} *_{+} u_{\sim}$ が $G \times (0, a)$ で

t にかんして連続になる正の整数 k_0 がえらべる. ここに

$Y_{\ell} = x_{+}^{\ell}$ で $Y_0 = \delta$, $Y_1 = Y$ を意味する. 予に $*_{\pm}$ は t にか

んする部分合成積である. $\phi \in \mathcal{E}(R^{n+1})$, $v \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$ に対し

$$Y_{\ell} *_{\pm} (\phi v) = \sum_j (-1)^j \binom{\ell}{j} Y_j *_{\pm} ((D^j \phi)(Y_{\ell} *_{\pm} v))$$

を利用して, u の t にかんする連続性が導かれる。

$\mu \in \mathcal{E}^{n+1} = (R^{n+1})'$ 上の temperate weight function とし, 空間 $B_{p,\mu}(R^{n+1})$, $1 \leq p < \infty$ [1] を考える. $\mathcal{D}(R^{n+1})$ は $B_{p,\mu}(R^{n+1})$ で稠密である. 写像 $\mathcal{D}(R^{n+1}) \ni u \rightarrow u(x, 0) \in \mathcal{D}'(R^n)$ が連続的に $B_{p,\mu}(R^{n+1})$ から $\mathcal{D}'(R^n)$ へ拡張できるとき, この拡張された写像を跡写像と呼ぶ. $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni u$ の像を同じ記号 $u(x, 0)$ で記す. 跡写像が存在するための条件は任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^{n+1})$ に対して $\phi \otimes \delta \in B_{p,\mu}(R^{n+1})$ である. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ で δ は空間 R_t での Dirac の δ -関数である.

$R_+^{n+1} = \{(x, t) \in R^{n+1}; t > 0\}$ とし $\mathcal{D}'(R_+^{n+1}) \ni u$ に対して $\lim_{t \rightarrow 0} (u|_{R_+^{n+1}})$ が存在するとき $\lim_{t \rightarrow 0} u$ と記し u の境界値と呼ぶことにする. $\Delta\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} u$ についても同様である. 跡写像の存在条件と境界値, δ との部分積の関係で示すことが出来る.

定理 5 [5, 6, 7] 空間 $B_{p,\mu}(R^{n+1})$, $1 \leq p < \infty$ に対し次の命題は同値である.

- (1) 跡写像 $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni u \rightarrow u(x, 0) \in \mathcal{D}'(R^n)$ が定義できる.
- (2) $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ に対して部分積 $\delta \circ u$ が存在する.
- (2') $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ に対して部分積 $\delta \cdot u$ が存在する.
- (3) $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ と, $\mathcal{D}(R^{n+1})$ のある固定した restricted δ -列 $\{\delta_j\}$ に対して $\lim_{j \rightarrow \infty} (1 \otimes \delta)(u * \delta_j)$ が存在する.

(3)' $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ と, $\mathcal{D}(R^{n+1})$ のある固定した δ -列 $\{\delta_j\}$ に対して $\lim_{j \rightarrow \infty} (1 \otimes \delta)(u * \delta_j)$ が存在する。

(4) $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ と, $\mathcal{D}(R_t)$ のある固定した restricted δ -列 $\{\delta_j\}$ に対して $\lim_{j \rightarrow \infty} \delta_j u$ が存在する。

(4)' $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ と, $\mathcal{D}(R_t)$ のある固定した δ -列に対して $\lim_{j \rightarrow \infty} \delta_j u$ が存在する。

(5) $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ に対して $\lim_{t \rightarrow 0} u$ が存在する。

(5)' $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ に対して $\Delta\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} u$ が存在する。

このとき, u は $B_{p,\nu_p}(R^n)$ -値連続関数 $u(t)$ と同一視される。

すなわち

$$\nu_p(\xi) = \begin{cases} \left\{ \int \frac{1}{\mu^{p'}(\xi, \tau)} d\tau \right\}^{1/p'} & p > 1 \\ \inf_{\tau} \mu(\xi, \tau) & p = 1 \end{cases}$$

$\mathcal{D}'(R_+^{n+1}) \ni u$ に対して, $(u|_{R_+^{n+1}})_{\sim}$ が存在するとき, u_+ と記し, u の canonical ext. と呼ぶことにする。

定理 6 [8] $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ に対して u_+ が存在するための条件は

$$\begin{cases} (1+\tau^2)^{-1/2} \mu^{-1}(0, \tau) \in L^{p'} & p > 1 \\ \inf (1+\tau^2)^{1/2} \mu(0, \tau) > 0 & p = 1 \end{cases}$$

である。

写像 $\mathcal{D}(R^{n+1}) \ni u \rightarrow u_+ \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$ が $B_{p,\mu}(R^{n+1})$ から $\mathcal{D}'(R^{n+1})$ へ連続的に拡張できるとき、拡張された写像を $\tilde{Y}$ で記す。

$\tilde{Y}$ が存在するための条件は $\mathcal{D}(R^{n+1})$ の任意の元 ϕ に対して $\phi_+ \in B_{p,\mu}(R^{n+1})$ である。 Y を空間 R_+ での Heaviside 関数とすると

定理 7. $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ に対して u_+ が存在するための条件は、次の各命題と同値である。

- (1) 写像 $\tilde{Y}: B_{p,\mu}(R^{n+1}) \rightarrow \mathcal{D}'(R^{n+1})$ が定義される。
- (2) $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ に対して部分積 $Y \circ u$ が存在する。
- (2') $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ に対して部分積 $Y \cdot u$ が存在する。
- (3) $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ と、 $\mathcal{D}(R^{n+1})$ のある固定した restricted δ -列 $\{s_j\}$ に対して $\lim_{j \rightarrow \infty} (u * s_j)Y$ が存在する。
- (3') $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ と、 $\mathcal{D}(R^{n+1})$ のある固定した δ -列 $\{s_j\}$ に対して $\lim_{j \rightarrow \infty} (u * s_j)Y$ が存在する。
- (4) $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ と、 $\mathcal{D}(R_+)$ のある固定した restricted δ -列 $\{s_j\}$ に対して $\lim_{j \rightarrow \infty} (Y * s_j)u$ が存在する。
- (4') $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ と、 $\mathcal{D}(R_+)$ のある固定した δ -列 $\{s_j\}$ に対して $\lim_{j \rightarrow \infty} (Y * s_j)u$ が存在する。

$B_{p,\mu}(R^{n+1})$ の任意の元 u に対して $D_t v - \partial_t v = u$ となる $v \in B_{p,(1+\varepsilon)/2,\mu}(R^{n+1})$ が存在し、定理 4 から u_+ の存在と $\lim_{t \rightarrow 0} v$ の存在が対応し、上の 2 定理が結びつけられる。

$p > 1$ のとき, $B_{p,\mu}(R^{n+1})$ の任意の元 u に対して $\gamma \circ u$ が存在し, $B_{p,\mu}(R^{n+1})$ に入るとき, 写像 $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni u \rightarrow \gamma \circ u \in B_{p,\mu}(R^{n+1})$ が連続になる。従って $B_{p,1/\mu}(R^{n+1})$ の任意の元 v に対して $\gamma \circ v$ が存在し $\gamma \circ v \in B_{p,1/\mu}(R^{n+1})$ である。 $\overline{R^{n+1}}$ によっても $B_{p,\mu}(R^{n+1})$ の元からなる $B_{p,\mu}(R^{n+1})$ の閉部分空間を $B_{p,\mu}^+$ とする。 $B_{p,\mu}^-$ についても同様である。

定理 8. $B_{p,\mu}(R^{n+1})$ の任意の元 u に対して, 部分積 $\gamma \circ u$ が存在するとき ($1 < p < \infty$), 次の命題は同値である。

- (1) $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ に対して $\gamma \circ u \in B_{p,\mu}(R^{n+1})$.
- (2) $B_{p,1/\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ に対して $\gamma \circ u \in B_{p,1/\mu}(R^{n+1})$.
- (3) $\mathcal{D}(R^{n+1}) \ni \forall \phi$ に対して $\gamma \phi \in B_{p,1/\mu}(R^{n+1})$ かつ

$$B_{p,\mu}(R^{n+1}) = B_{p,\mu}^+ + B_{p,\mu}^- \quad (\text{位相和})$$

- (4) $\mathcal{D}(R^{n+1}) \ni \forall \phi$ に対して $\gamma \phi \in B_{p,\mu}(R^{n+1})$ かつ

$$B_{p,1/\mu}(R^{n+1}) = B_{p,1/\mu}^+ + B_{p,1/\mu}^- \quad (\text{位相和})$$

最後に超関数の積について注意したい。よく知られているように, 任意の $S \in \mathcal{D}'(R)$ は上下半平面で正則な関数 $\widehat{S}(z)$ の上下からの境界値として表現される。 $\widehat{S}_\varepsilon = \widehat{S}(x+i\varepsilon) - \widehat{S}(x-i\varepsilon)$ とおく。任意の $S, T \in \mathcal{D}'(R)$ に対して $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \widehat{S}_\varepsilon \widehat{T}_\varepsilon$ が存在するとき, もっと一般に $\widehat{S}_\varepsilon \widehat{T}_\varepsilon$ の Hadamard の意味における有限部分をとることによって H.G. Tillmann は積 $[2]$ を定義し

た。この積は有用でもあるし、具体的に計算もしやすい。しかし、この積は最初にはべた積の基本的性質 (I) (4), (II) はみたしていない。また $N \geq 2$ に自然な方法で拡張できるが、積に関して零因子があらわれる。

量子力学などへの応用も考えての積の定義は Klaus Keller 氏の論文 [9] にくわしい。また $N=1$ のとき Non-standard Analysis の立場で Li - Bang - He [10] の研究がある。

References

- [1] L. Hörmander, Linear partial differential operators, Springer, 1969.
- [2] M. Itano, On the multiplicative products of distributions, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 29(1965), 51-74.
- [3] M. Itano, On the theory of the multiplicative products of distributions, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 30(1966), 151-181.
- [4] M. Itano, On the fine Cauchy problem for the system of linear partial differential equations, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 33(1969), 11-27.
- [5] M. Itano, Note on the canonical extensions and the boundary values for distributions in the space H^u , Hiroshima Math. J. 1(1971), 405-425.
- [6] M. Itano, On the trace mappings for the space $B_{p,\mu}(R^N)$,

- Hiroshima Math. J. 8(1978), 165-180.
- [7] M. Itano, On the trace mappings in the space $B_{1,\mu}(\mathbb{R}^N)$,
Hiroshima Math. J. 11(1981), 561-570.
- [8] M. Itano, On the canonical extensions for distributions in
the space $B_{p,\mu}$, Studia Math. 77(1983), to appear.
- [9] K. Keller, Analytic regularizations, finite part prescriptions
and products of distributions, Math. Ann. 236(1978), 49-84.
- [10] Li Bang-He, Non-standard analysis and multiplication of
distributions, Scientia Sinica 11(1978), 561-585.
- [11] S. Łojasiewicz, Sur la fixation des variables dans une
distribution, Studia Math. 17(1958), 1-64.
- [12] R. Shiraishi, On the value of distributions at a point and
the multiplicative products, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser.
A-I(1967), 89-104.
- [13] R. Shiraishi and M. Itano, On the multiplicative products
of distributions, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 28(1964),
223-235.