

## 可附番自由度の力学系の統計流体力学

東大 工学部 桑原 真二

## § 1. 序論

乱流の場と確率過程として定式化すれば、位相空間をわさ、流れの場の無限空間にはる確率分布密度汎関数に対する確率保存の式となる。

我々が解きたい問題はまず、この確率保存の式の定常解であるが、特別な非現実的な解（非粘性の場合の白いスペクトル）以外に解は求まっていない。この問題と困難にしている原因は、現実の一樣な乱流では、必ず粘性散逸が存在し、定常解を予想することができず、粘性散逸をおさるうために、常にエネルギー供給を行っているような系、たとえば、管中の乱流、平板乱流境界層等、複雑な系でなければ、定常解が存在しないことに基固している。

次にときたい問題は、空間的一樣な乱流に対応する初期分布を与えて解く、初期値問題である。こゝでの困難は初期分布を如何にとるかという問題である。等重率のようなア・ポリオリな仮定はもちろん成りたない。なるべく簡単で、

確率分布の諸条件を満足するものを選ぶという経験的な方法がとられる。

簡単のため、可附番の変数であらわされる力学系に対する確率保存の式を求めよう。例えば第1図のように、2つのピストンで境された円柱に流体が満たされ、時刻  $t < 0$  では速度はゼロ：

$$v \equiv 0 \quad (\sqrt{v^2} \ll U) \quad (1.1)$$

とする。  $t=0$  で壁を急に速度  $-U$  で動かす。この系では、境界条件は定常である。このような流れの場が

$$u(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{l+1/2}(t) v_l^l(x) \quad (t > 0) \quad (1.2)$$

で表わされるものとする。ここで

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} v^0 &= 0 && \text{流れの場では} \\ v^0 &: \text{定常な境界条件を満足する} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} v^l &= 0 && : \text{流れの場では} \\ v^l &= 0 && : \text{境界では} \end{aligned} \right\} \quad l \geq 1 \quad (1.4)$$

であり、 $\{v^l\}_{l=0}^{\infty}$  は  $L_2$  の意味で完備な関数系とする。

Navier-Stokes の方程式は、連続の方程式と共に、適当な方法で、たとえば、Galerkin 法で

$$\frac{\partial a_m}{\partial t} = \mathcal{H}_m(a) + \mathcal{L}_m(a) \quad (1.5)$$

の形に帰着される。  $\mathcal{H}_m$  は  $a$  について 2 次 (非線型項)、  
 $\mathcal{L}_m$  は  $a$  について 1 次となる。この式により力学系は無限次元のベクトル  $a$  によって表わされたことになる。それ故、 $a$  空間を位相空間と考へ、そこに確率分布密度汎関数

$$D = D(a, t) \quad (1.6)$$

を導入することが出来る。1つの力学系を時間的に追跡すれば、運動方程式 (1.5) によって、位相空間中を自然運動 *natural motion* する。色々の初期値に対応する力学系を考へ、<sup>これは</sup>位相空間の各点から出発する自然運動がえられる。初めにこの各点に確率を分布させれば、(1.5) の助けをかりて、その後の確率分布は求められるはずである。確率保存の式は

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a_l} (\dot{a}_l D) = 0 \quad (1.7)$$

となる。ここで  $\dot{a}_l$  は (1.5) の右辺である。

## §2. 確率保存の式の種分と平均量

$\{a_l\}$  の  $l$  の大きいものは、いわば高周波であらわれ、共振散逸による減衰がはげしいと考へられる。そこで  $D$  を

$$D = D(a_0, a_1, \dots, a_L, t) \quad (2.1)$$

のように  $a$  を有限次元にする近似が許されよう。そこで

(1.7) 有限次元  $n$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \sum_{l=1}^L \frac{\partial}{\partial v_l} (u_l D) = 0 \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} D &= D(v_1, \dots, v_L, t) \\ u_l &= u_l(v, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\text{初期値} \quad D(v, 0) = \hat{D}(v, 0) \quad (2.4)$$

の積分を考へる。

今、運動方程式の初期条件：

$$v_l = \hat{v}_l \quad (t=0) \quad (2.5)$$

のもとに

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} = u_l(v, t) \quad (2.6)$$

とくと、

$$v_l = v_l(\hat{v}, t) \quad (2.7)$$

がえられる。そこで、 $v \in \hat{v}$  からの変換とみなし

$$\left\{ \begin{aligned} v_l &= v_l(\hat{v}, s) \\ t &= s \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} \hat{v}_l &= \hat{v}_l(v, t) \\ s &= t \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

とおくと、

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^L u_l \frac{\partial}{\partial v_l} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{v}_l} &= \sum \frac{\partial v_m}{\partial \hat{v}_l} \frac{\partial}{\partial v_m} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

から、(2.2) は

$$\frac{\partial}{\partial S} J D = 0 \quad (2.10)$$

となる。ここで

$$J = \frac{\partial(v_1, \dots, v_L)}{\partial(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_L)} \quad (2.11)$$

は、 $v \rightarrow \hat{v}$  の変換のヤコビ行列である。

(2.10)は

$$J D = \hat{D} \quad (2.12)$$

ととける。今  $f = f(v, t)$  なる量の統計平均値は

$$\begin{aligned} \langle f \rangle(t) &= \langle f \rangle(S) \\ &= \int \dots \int f(v, t) D(v, t) dv \\ &= \int \dots \int f(v(\hat{v}, t), t) \hat{D}(\hat{v}) d\hat{v} \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる。

§3. Burgers 方程式に対するフーリエ級数モデル

Burgers 方程式:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (3.1)$$

を簡単のために

$$v(0, t) = v(1, t) = 0$$

の境界条件を課して,

$$v = \sum_{l=1}^{\infty} v_l(t) \sin \pi l x \quad (3.2)$$

の形に展開できるとすると、(3.1)から

$$\dot{v}_1 + \pi^2 \bar{v} v_1 + \frac{\pi}{2} \left[ v_1 v_2 - \sum_{m=2}^{\infty} m v_m (v_{m-1} - v_{m+1}) \right] \quad (3.3a)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_l + \pi^2 l^2 \bar{v} v_l + \frac{\pi}{2} \left[ \sum_{m=1}^{l-1} m v_m v_{l-m} - \sum_{m=l+1}^{\infty} m v_m v_{m-l} \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} m v_m v_{l+m} \right] = 0 \quad l \geq 1 \end{aligned} \quad (3.3b)$$

がえられる。(3.3a), (3.3b)において、 $v_l \in L^2 \mathbb{R}$ ととり  
ると

$$\dot{v}_1 + \pi^2 \bar{v} v_1 + \frac{\pi}{2} (v_1 v_2 + v_2 v_3 + \dots + v_{L-1} v_L) = 0 \quad (3.4a)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_l + \pi^2 l^2 \bar{v} v_l - \frac{\pi}{2} \left[ l (v_1 v_{l+1} + v_2 v_{l+2} + \dots + v_{L-2} v_L) \right. \\ \left. - v_1 v_{l-1} - 2 v_2 v_{l-2} - \dots - (l-1) v_{l-1} v_L \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.4b)$$

がえられる。

そこで(3.4a)の $v_1 \in$ 、(3.4b)の $v_l \in$ をかけて加え合  
すとすると、 $\bar{v} = 0$ の場合に

$$\frac{d}{dt} \sum_{l=1}^L v_l^2 = 0 \quad (3.5)$$

すなわち、エネルギー保存  $\frac{1}{2} \sum_{l=1}^L v_l^2 = \text{一定}$  がえられる。

フーリエ成分だけとて

$$v_1 = a \cos \theta \quad v_2 = a \sin \theta$$

と おく と  $\dot{v} = 0$  の場合、(3.4a)、(3.4b) は

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= 0 \\ \dot{\theta} + \frac{\pi}{2} a \cos \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

初期条件:  $a = \hat{a}, \quad \theta = \hat{\theta}$  に対する解は

$$\sin \theta = - \frac{\sinh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t - \cosh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t \sin \hat{\theta}}{\cosh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t - \sinh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t \sin \hat{\theta}} \quad (3.7a)$$

$$\cos \theta = \frac{\cosh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t}{\cosh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t - \sinh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t \sin \hat{\theta}} \quad (3.7b)$$

となる。

次に確率保存の式を  $(a, \theta, t)$  でかくと

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial a} (a \dot{a} D) + \frac{\partial}{\partial \theta} (a \dot{\theta} D) = 0 \quad (3.8)$$

となる。こゝで (3.6) を入れると

$$\frac{\partial D}{\partial t} - \frac{\pi}{2} a \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta D) = 0 \quad (3.9)$$

がえられる。この定常解は

$$\left. \begin{aligned} D &= f_1(a) \delta(\theta - \frac{\pi}{2}) + f_2(a) \delta(\theta - \frac{3\pi}{2}) \\ \int_0^\infty (f_1 + f_2) a da &= 1, \quad f_1, f_2 \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

である。

初期分布  $D(a, \theta, 0) = \hat{D}(a, \theta)$  とし

$$\hat{D}(a, \theta) = \frac{1}{2\pi a} \delta(a - \hat{a}) \quad (3.11)$$

とすれば、種分は

$$\left. \begin{aligned} \langle v_1 \rangle(t) &= 0 \\ \langle v_2 \rangle(t) &= -\frac{\hat{a}}{\sinh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t} (\cosh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t - 1) \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

がえられる。そこで

$$\begin{aligned} \langle v \rangle(t) &= \langle v_1 \sin \pi x + v_2 \sin 2\pi x \rangle \\ &= -\frac{\cosh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t - 1}{\sinh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t} \sin 2\pi x \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\langle v(x) v(x') \rangle(t) = \hat{a}^2 \frac{\cosh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t - 1}{\sinh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t}$$

$$[\sin \pi x \sin \pi x' + \cosh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t \sin 2\pi x \sin 2\pi x'] \quad (3.14)$$

がえられる。

$\bar{v} \neq 0$  については、(3.6)に対応する式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} + \pi^2 \bar{v} a (1 + 3 \sin^2 \theta) &= 0 \\ \dot{\theta} + 3\pi^2 \bar{v} \cos \theta \sin \theta + \frac{\pi}{2} a \cos \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

となる。これは数値計算でとくおける。  $a=1$  の初期条件で  $\bar{v} = 0.01$  ( $R=100$ ) の場合にとくと図2図のようになる。

$\bar{v} = 0$  の場合の3成分を

$$v_1 = \omega \theta \quad v_2 = a \sin \theta \cos \varphi \quad v_3 = a \sin \theta \sin \varphi \quad (3.16)$$

とおくと、

$$\dot{a} = 0$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\pi}{2} (\omega \theta + \sin \theta \sin \varphi) \cos \varphi \quad \left. \vphantom{\dot{\theta}} \right\} (3.17)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\pi}{2} [\sin \theta (2 + \cos^2 \varphi) - \omega \theta \sin^2 \varphi] \cos \theta$$

となる。上の微分方程式から予想される解曲線は次の図のようになる。

#### §4. まとめ

この論文であつかった問題をまとめると次のようになる。

(1) 連続無限次元の力学系は完備な関数系に展開できて、すなわち有限次元の方程式であらわされる（運動方程式）。しかも、高次のモードは粘性減衰が大きく省略可能で力学系は有限次元で近似できる。

(2) 統計は、位相空間（速度ベクトル場空間）にはる確率分布密度汎関数により導入される。分布関数は確率保存の式により、決定論的に求められる。

(3) 平均量は、運動方程式の初期値問題の解と、初期の確率分布から求められる。

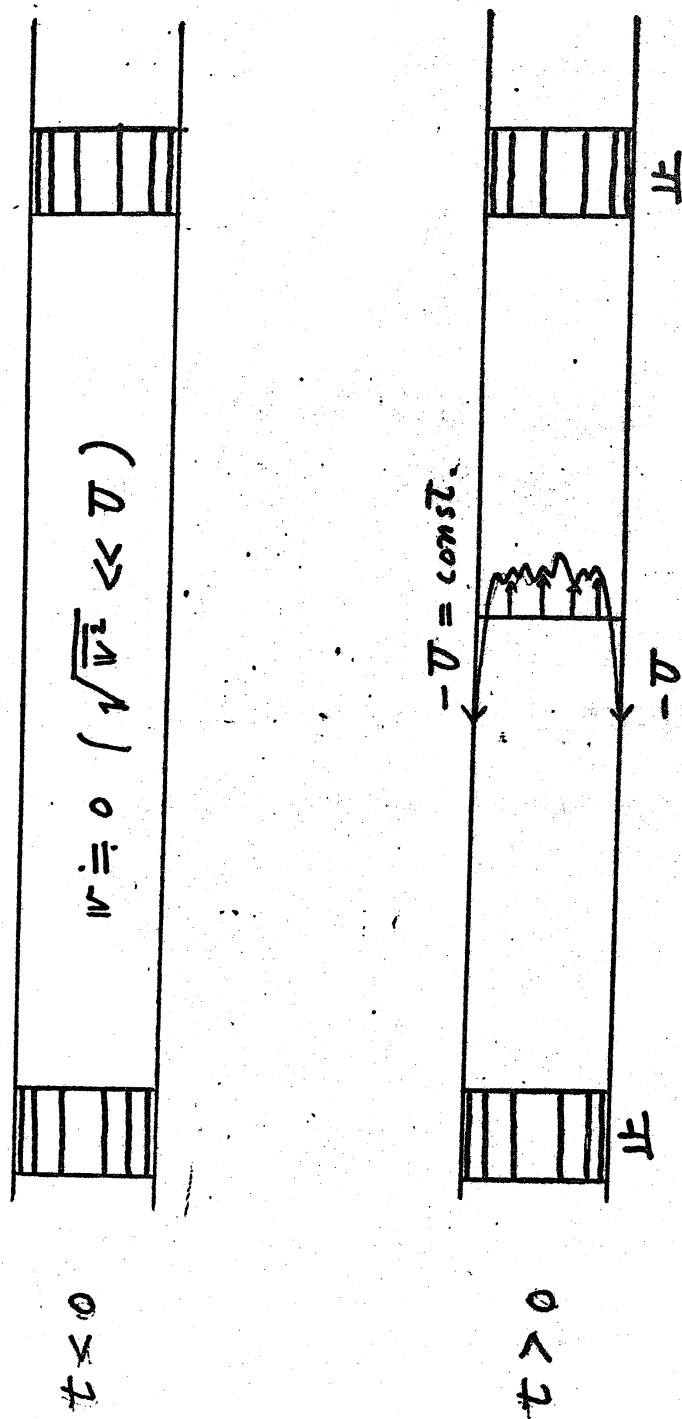
(4) 運動方程式の近似（次元）を小さくすることによって近似とすることが出来る。運動方程式の解析（連立常微分方

式)は必ずかくないが、平均量を求めるとき、必要な積分が次元数だけの重積分となるため、次元を小さくすることによって非常な困難ともなる。

なお、初期エネルギー分布  $\hat{E}_m = E(k_m, 0)$  とあるときの最も適切な初期確率分布は

$$\hat{p}(w) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2} (\hat{E}_1 \hat{E}_2 \cdots \hat{E}_L)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^L w_k^2 / \hat{E}_k^2}$$

と考えられるが、これによって平均量は求められていない。



才11図. 乱流場についての思考実験

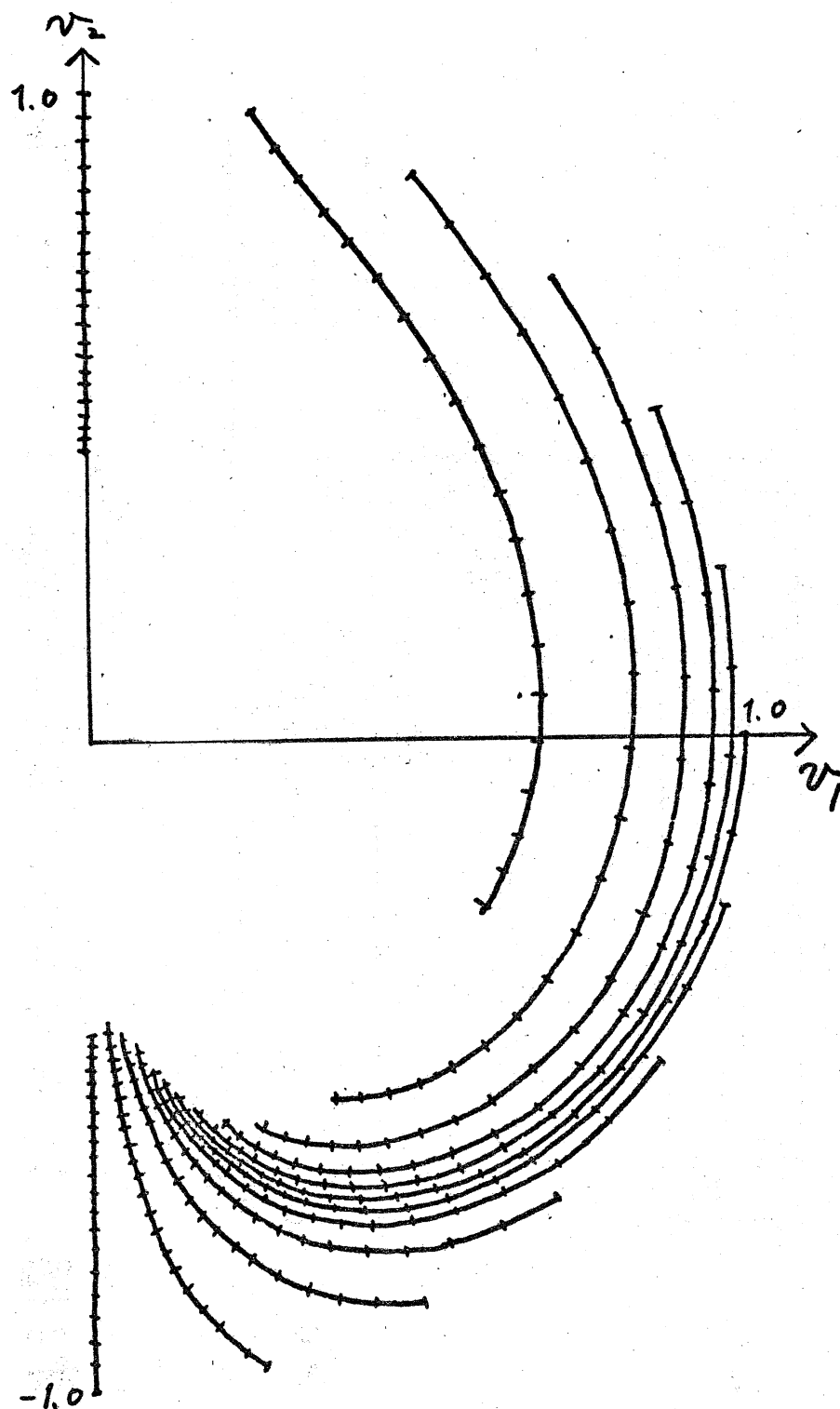
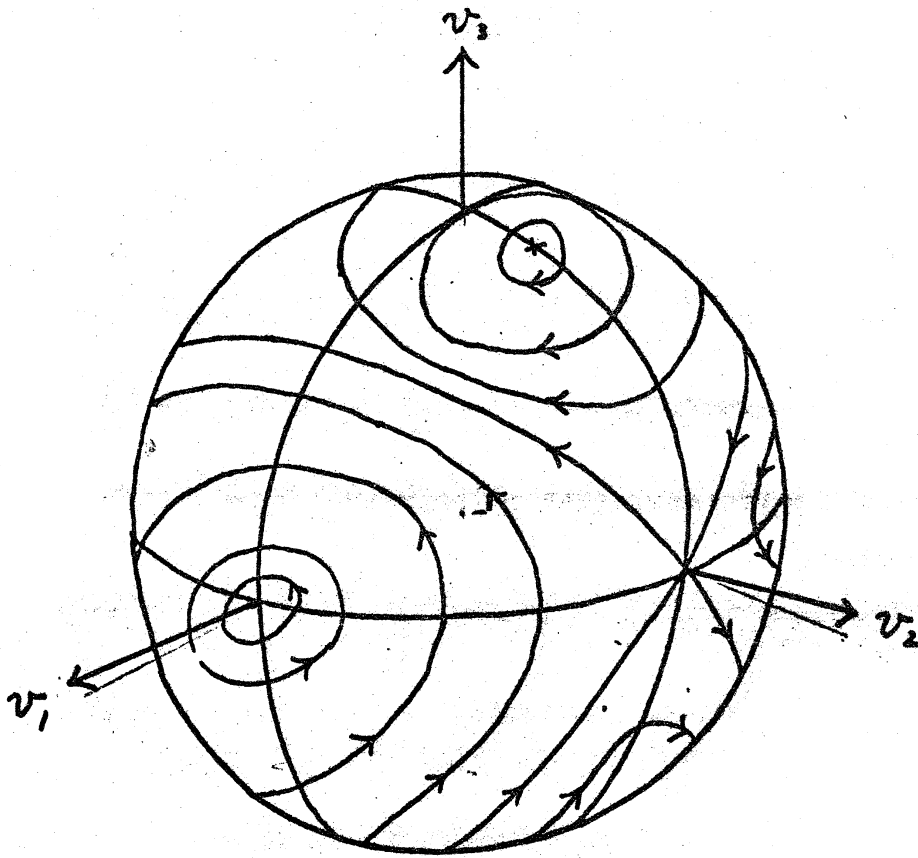


図2. Burgers 方程式, 2フーリエ成分モデル  
 $\nu = 0.01$  の時の解曲線.



第3図 Burgers 方程式, 3 フーリエ成分  
 モデル  $\bar{v}=0$  の時の解曲線