

時系列データからの分岐図再構成

徳永 隆治 (Ryuji Tokunaga) 筑波大学 電子・情報工学系

梶原 志保子 (Shihoko Kajiwara) 筑波大学 情報学類

1. 導入

現在多くの関心を集めている非線形短期予測法 [1]-[6] は「与えられた時系列データ $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ を発生する非線形写像 $F: R^d \rightarrow R$ 即ち

$$x_{n+1} = F(X_n) = F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-d+1}) \quad (1)$$

をいかに構成するか」という逆問題である。非線形短期予測法は主として「不規則な時系列データの背後に決定論的力学規則が存在するか否か」、即ち「不規則な時系列データが決定論的カオスであるか否か」の判定法として扱われているが、残念ながらこれらにより分岐現象等のカオス的力学系のエッセンス¹を理解することは非常に難しい。

無論、時系列データの生成源がいくつかの係数 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ によって支配されている場合、単一の時系列データのみから非線形写像族 $F(P, X)$ としての性質は推定し難く、少なくとも係数空間の次元以上の異なる係数値に対応するデータが不可欠となる。この観点から「異なる係数値に対応する時系列データのみから（真の係数の情報なしに）これ

¹ カオスは分岐現象の枠組の中でとらえるのが自然である。[14]

らを生成する非線形写像族 $F(P, X)$ をいかに構成するか」という逆問題が設定される。これに対して本研究は「異なる係数値に対応する時系列データのみから発生源の分岐図と同質な分岐図をいかに再構成するか」という逆問題を設定しその一つの解法（分岐図再構成法）を提案する²。ここで、後者の逆問題はあからさまな関数関係の記述を目標とするものではないが本質は前者と同じである事、及び両者とも未知の力学系における真の係数の情報を全く利用しない事に注意を促す。以下第二章では本研究の基礎となる非線形予測子構成法及び Karhunen-Loève 変換（KL 変換） [7] について論述しつつ分岐図再構成法を 2 係数ヘノン写像族 [8] を例にとりて提案する。第三章では提案された手法をロジスティック写像族 [9] 及びディレイドロジスティック写像族 [10] をカップリングして構成される 3 係数写像族に適用しその有効性を示す。

2. 分岐図再構成法

a. 非線形予測子構成法

まず提案する手法の基礎を与える非線形短期予測法 [1]-[6] について述べる。未知の信号発生源からサンプルされた一次元時系列データを $S = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ とする。仮に未知の発生源がなんらかの決定論的力学規則に支配されている場合、

²分岐図もしくは相図とは系の状態に関する特徴量（不動点数、周期点数、あるいは周波数比等）で係数空間を分類したグラフである。

F.Takens の定理 [11] に基づきその相空間における軌道は d 次元状態ベクトル

$$X_n = ({}^1x_n, {}^2x_n, \dots, {}^dx_n) = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-d+1}) \quad (2)$$

を $n = d$ から $n = m$ まで発展させることで再構成される。
この軌道を生成した非線形写像を推定、記述する為には d 次元相空間中のベクトル場を再構成された軌道 $\{X_d, \dots, X_m\}$ に基づいて補間（内挿及び外挿）すればよい。特に、 d 個の過去の状態から現在の状態を記述する非線形写像 $F : R^d \rightarrow R^1$ 即ち

$${}^1x_{n+1} = F(X_n) = F({}^1x_n, {}^2x_n, \dots, {}^dx_n) \quad (3)$$

を非線形予測子と呼ぶ。従来、提案された非線形予測子の構成法は相空間をいくつかの部分空間に分割してその中で局所的予測子 [1]-[4] を構成する局所的（区分的）構成法と大域的に微分可能な関数の線形結合でこれを構成する大域的構成法 [5]-[6] の 2 つに分類される。特に本研究は後者を利用するため、ここでいくつかの定義を与える。

大域的構成法において多項式の利用も考えられるが、一般的には D.E.Rumelhart [12] らによって提案された多層パーセプトロン (multi layer perceptron ; MLP) が利用されている。その最も簡単な形式（3 層、 d 次元入力、1 次元出力、隠れ

ユニット数 h)³は以下で与えられる。

$$F(\Omega, X_n) = \sum_{j=1}^h \omega_j f\left(\sum_{i=1}^d \omega_{h+(j-1)d+i} x_n + \omega_{h(1+d)+j}\right) \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1 + e^{-x})}$$

ただし、記述の都合上、各係数は1次元の配列で与えそれを各要素とする係数列ベクトルを

$$\Omega =^T (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{h(d+2)}) \quad (5)$$

で記述する。一般に、与えられたデータ列 S から最適な予測子を与える係数ベクトル Ω を決定する為に予測二乗誤差

$$U(S, \Omega) = \sum_{n=d}^{m-1} |x_{n+1} - F(\Omega, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n+1-d})|^2 \quad (6)$$

に対して最急降下法が適用される⁴。無論、MLPに依らず M.Casdagli が用いた動径基底関数による手法 [6]、あるいはそれに類似する J.Moody のニューラルネットワーク [13] 等を利用して以降の論議を展開できる事を付記しておく。

b. 分岐図再構成法の概略

大域的に構成される非線形予測子に基づく差分力学系を

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= G(\Omega, X_n) \\ &= (F(\Omega, X_n),^1 x_n, ^2 x_n, \dots, ^{d-1} x_n) \\ \dim[\Omega] &= D(= h(d+2)) \end{aligned} \quad (7)$$

³本論文の全ての実験では、 $(h, d) = (7, 2)$ を選択した。

⁴本研究では慣性項 μ を考慮した以下の差分方程式の反復で Ω を決定する。

$$\Omega' = \Omega - \alpha \frac{\partial U}{\partial \Omega} + \beta \mu, \quad \mu' = \Omega' - \Omega$$

ただし α 及び β は降下ステップと慣性項の定数を表す。特に、本論文の全ての実験では $(\alpha, \beta) = (0.04, 0.7)$ を選択した。

と記式し、 $G(\Omega, X) : R^d \rightarrow R^d$ を係数ベクトル Ω に関する非線形写像族とみなす。今、未知の力学系が n 個の係数 $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ で滑らかに支配される写像族で記述されると仮定する。その n 次元係数空間のある位置 $P(1)$ に対応する時系列データ $S(1)$ が計測されたとき、非線形予測子を構成することで写像族 $G(\Omega, X)$ の係数ベクトル $\Omega(1)$ が決定される。即ち、予測子の構成とは写像族から最適な写像を一つ選択する事に他ならない。今、次元 D が十分に大きいと仮定すると、 $P(1)$ を δP で摂動して得られる新しい位置 $P(2) = P(1) + \delta P$ に対応する時系列データ $S(2)$ は $\Omega(1)$ の近傍に属す係数ベクトル $\Omega(2)$ で定められた写像 $G(\Omega(2), X)$ で十分近似できるはずである。この行程を反復する事で位置の列 $\{P(1), P(2), \dots, P(N)\}$ に対応する時系列データの列 $\{S(1), S(2), \dots, S(N)\}$ が計測され、係数ベクトルの列 $\{\Omega(1), \Omega(2), \dots, \Omega(N)\}$ が定まる。対象としている系の係数 P の次元 n は一般に Ω の次元 $h(D+2)$ よりはるかに小さく Ω は小自由度の部分空間に拘束される。この部分空間は一般に超平面ではなく超曲面に対応しているが、任意の $P(i)$ 及び $P(j) (i \neq j)$ が相互にその近傍に属すならば、これを超平面で十分に近似できるであろう。そこで次の問題は係数ベクトル列

$$\{\Omega(1), \dots, \Omega(N)\} \quad (8)$$

よりいかにしてこの部分空間を抽出し、本質的係数をとらえるかにある。

c. KL 変換の適用

本研究では、高次元係数空間における部分空間の直交基底の推定に KL 変換 [7] を利用する。KL 変換は、統計学における主成分分析や代数学における特異値分解と等価であることは広く知られている。ここでは、分岐図再構成法をより具体的に説明するために p_1 及び p_2 を係数とするエノン写像族

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (1 - p_1 x_n^2 + y_n, p_2 x_n) \quad (9)$$

を例にとり論議を進める。(9) の 2 係数空間中から以下のような N 個の位置ベクトル $P(i)$ を抽出する (図 1 参照) ⁵。

$$\begin{aligned} P(i) &= (P_1(i), P_2(i)) \\ &= (0.12 \sin(2\pi(i-1)/N) + 1.346, 0.12 \cos(2\pi(i-1)/N) + 0.2) \end{aligned} \quad (10)$$

次に 2 つの位置 $P(i)$ と $P(i+1)$ を結ぶ係数空間中のパス (分岐パス) :

$$P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow \dots \rightarrow P(N)(= P(1)) \rightarrow P(N+1)(= P(2)) \rightarrow \dots \quad (11)$$

を構成し、分岐パス (11) に対応する時系列データ⁶の列

$$S(1) \rightarrow S(2) \rightarrow \dots \rightarrow S(N)(= S(1)) \rightarrow S(N+1)(= S(2)) \rightarrow \dots \quad (12)$$

を順次計測する。第一段階では時系列データ $S(1)$ に対する

⁵ただしエノン写像族を用いた実験において $N = 10$ とした。

⁶本論文中の全ての実験において時系列データ S は x 成分を 100 点抽出し構成される。

非線形予測子を構成する。ただし係数ベクトル Ω の要素は全て区間 $[-1, 1]$ に属す一様乱数で初期化され、最急降下法の反復は一定回数⁷で打ち切られる。ここで求められた写像族 $G(\Omega, X)$ の係数ベクトルを $\Omega(1)$ と表記する。同様に $S(2)$ に対する係数ベクトル $\Omega(2)$ を求める場合、係数ベクトルは乱数で初期化せず $\Omega(1)$ を用いる。これは $\Omega(1)$ の近傍から $\Omega(2)$ を選択させる為である。以上の行程を反復する事で係数ベクトルの列 $\{\Omega(1), \Omega(2), \dots\}$ が構成される。第二段階では以上の係数ベクトル列から切り出された $\Omega(I)$ を初項とする J 個の有限部分列 $\{\Omega(I), \Omega(I+1), \dots, \Omega(I+J-1)\}$ を用いて KL 展開を行なう。即ち係数ベクトルから平均値 Ω_0 を取り除き、

$$\begin{aligned}\delta\Omega_i &= \Omega(I+i-1) - \Omega_0 \quad (i = 1, 2, \dots, J) \\ \Omega_0 &= \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \Omega(I+j-1)\end{aligned}\tag{13}$$

これを用いて D 行 J 列の行列

$$[\delta\Omega_1 | \delta\Omega_2 | \dots | \delta\Omega_J]_{D \times J}\tag{14}$$

を構成し、その共分散行列を $\Omega_{D \times D}$ とする。 $\Omega_{D \times D}$ は非負の対称行列であるためその固有値もすべて非負であり、降順に

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_D > 0\tag{15}$$

と表記される。固有値 λ_i に対応する固有ベクトル (列ベクトル) u_i を用いて、係数ベクトル $\delta\Omega$ は以下のように KL 展

⁷本論文での全ての実験では 30000 回に固定される。

開される。

$$\delta\Omega = {}^T [u_1|u_2|\cdots|u_D]\Gamma \quad (16)$$

ただし $\Gamma = {}^T (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_D)$ は

$$\Gamma = {}^T [u_1|u_2|\cdots|u_D]^{-1}\delta\Omega \quad (17)$$

を満たす展開係数を表記する。

仮に、 λ_{K+1} が λ_K よりも十分に小さい場合、 $i > K$ を満たす展開係数 γ_i の大きさも十分小さいと考えられ $\delta\Omega$ を K 次元係数ベクトル

$$\Gamma_K = {}^T (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_K) \quad (18)$$

で近似的に表現できる。ここでは Γ_K を写像族 $G(\Omega, X)$ の K 次元最適係数と呼ぶ。主成分分析の観点では、 Γ_K の第 i 番目の要素は第 i 主成分と呼ばれ、その決定法の一つには、累積寄与率を用いる方法

$$K = \min \left\{ k \mid 100 \times \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{j=1}^D \lambda_j} > 80 \right\} \quad (19)$$

がある。ここでエノン写像族への適用結果を述べる。実験では写像族 $G(\Omega, X)$ の係数空間の次元 D は $28 (= 7 \times (2 + 2))$ 次元であり、直交基底の推定に $(I, J) = (279, 20)$ の有限部分列 $\{\Omega(279), \cdots, \Omega(298)\}$ を用いた。故に、これより得られる共分散行列は $\Omega_{28 \times 28}$ と表記される。図2は第 k 成分に対応する固有値 λ_k の寄与率

$$100 \times \frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^{28} \lambda_j} \quad (20)$$

及び固有値 λ_1 から λ_k までの累積寄与率

$$100 \times \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{j=1}^{28} \lambda_j} \quad (21)$$

を成分番号 k を横軸にプロットしたグラフである。2成分で累積寄与率は80%を超え、3成分は十分小さいことが理解される。これより、エノン写像族を近似する写像は写像族 $G(\Omega, X)$ の28次元係数空間中の高々2次元超平面上に拘束されている事が理解できる。即ち、非線形予測子(5)の係数は28から2までその冗長性を排除できる。

この事実をより明確にすべく、分岐パスに対して分岐ローカスを定義する。有限部分列 $\{\Omega(279), \dots, \Omega(298)\}$ に対して式(14), (17), 及び(18)を用いると左から順に対応する K 次元最適係数 Γ_K の列 $\{\Gamma_K(1), \dots, \Gamma_K(20)\}$ が得られる。そこで K 次元部分空間 $(\gamma_1, \dots, \gamma_K)$ において $\Gamma_K(i)$ と $\Gamma_K(i+1)$ を結ぶ軌跡

$$\Gamma_K(1) \rightarrow \Gamma_K(2) \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_K(20) \quad (22)$$

を考え、これを分岐ローカスと呼ぶ。未知の力学系が真の係数空間で動いた道程が分岐パスであるが、これを予測子の最適係数空間で観察したものが分岐ローカスと考えられる。図3及び4は (γ_1, γ_2) 空間及び $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ 空間における分岐ロー

カスを示している。図3における節点番号は図1におけるどの係数値の時系列データを利用したかを示しており、ローカスが (p_1, p_2) 空間に構成された分岐パス (11) と完全に対応づけがなされることが分かる。パス及びローカスの節点番号を比較すると $p_1 \leftrightarrow \gamma_2$ 及び $p_2 \leftrightarrow \gamma_1$ なる係数間の対応が見い出せる。また、 γ_1 及び γ_2 成分の変動巾が γ_3 のそれより十分大きいという事実は、 Γ_K の次元が高々2つである事を裏づけている。

d. 分岐図再構成

次に、エノン写像族の分岐図再構成を行なう。0 を $(D - K)$ 次元零行ベクトルとし $\Gamma = {}^T ({}^T \Gamma_K | 0)$ を (16) に代入する事で Ω は

$$\Omega = {}^T [u_1 | u_2 | \cdots | u_D] {}^T ({}^T \Gamma_K | 0) + \Omega_0 \quad (23)$$

で与えられる。これを (8) に代入し K 係数族の差分方程式系

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= G(\Gamma_K, X_{n-1}) \\ &= G({}^T [u_1 | u_2 | \cdots | u_D] {}^T ({}^T \Gamma_K | 0) + \Omega_0, X_n) \end{aligned} \quad (24)$$

を得る。

図5(a)は図1に対応する領域のエノン写像族の (p_1, p_2) 分岐図⁸であり、図6(a)は(24)を反復して再構成された図3に

⁸分岐図の構成には絨毯爆撃法[14]を用いた。黒色領域はカオスもしくは発散であり、中間調領域は21周期以下の周期ウィンドに対応する。

対応する領域の (γ_1, γ_2) 分岐図である。単に、分岐パス及びローカスが位相的に一致してだけでなく、その周辺に分岐構造も刻明に再構成されている事が理解できる。図 5(b) はエノン写像族の大域的分岐図であり、図 6(b) は (24) によって再構成された大域的分岐図である。図 6(b) の範囲は分岐パスとローカスの相対スケールによって図 5(b) と対応するように定められている。時系列データを取り出した (p_1, p_2) 空間の領域が十分小さいにもかかわらず、両者は定性面のみならず定量面でも非常に良く一致している。エノン写像族を用いた一連の観察より本手法の可能性が提示できたと考える。

3. 3 パラメータ族の分岐図再構成

上述の手法の有効性を示すためロジスティック写像族及びディレイドロジスティック写像族をカップリングして構成される以下のような 3 係数 $(p'_1, p'_2$ 及び $p'_3)$ 写像族 (ロジスティック・ディレイドロジスティック写像族) を考える。

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (p'_1(1 - x_n)x_n + p'_2y_n + p'_3(1 - y_n)x_n, x_n) \quad (25)$$

$p'_1 \simeq 0$ において (25) 式はディレイドロジスティック写像族と同質のふるまいをする。係数 p'_2 は (25) が発生する準周期軌道の平均回転率を近似的に支配し、係数 p'_3 はその非線形性を制御する。即ち、 (p'_2, p'_3) 空間の分岐構造はサインサークル写像 [15] のものと同質で典型的な準周期崩壊ルートで特

徴付けられ、特に図 7(a) に見られるように摂動項 p'_1 が小さい場合にはアーノルドの舌（同期領域）が規則正しく林立する分岐構造が観察できる。一方、摂動項 p'_1 が増大するにつれてこの構造は歪んで行き、アーノルドの舌は消滅する。（図 7(b)-(d) 参照）以上が写像族 (25) の 3 係数空間における大域的分岐現象の概略である。

ここで (p'_1, p'_2, p'_3) 係数空間において以下の点を抽出する。

$$\begin{aligned}
 P'(i) &= (p'_1(i), p'_2(i), p'_3(i)) \\
 &= \begin{cases} (1.0, 0.11 \sin(\pi(i-1)/5) + 0.224, \\ \quad 0.08 \cos(\pi(i-1)/5) + 1.85) & (1 \leq i \leq 11) \\ (1.25, 0.11 \sin(\pi(i-12)/5) + 0.224, \\ \quad 0.08 \cos(\pi(i-12)/5) + 1.85) & (12 \leq i \leq 22) \end{cases} \quad (26)
 \end{aligned}$$

$\{P'(1), \dots, P'(11)\}$ は平面 $P'_1 = 1.0$ 上の円周に、 $\{P'(12), \dots, P'(22)\}$ は平面 $P'_1 = 1.25$ 上の円周に含まれている。以上を用いた分岐パス（図 8 参照）

$$P'(1) \rightarrow P'(2) \rightarrow \dots \rightarrow P'(22)(= P'(1)) \rightarrow P'(23)(= P'(2)) \rightarrow \dots \quad (27)$$

に対して上述の手法を適用する。図 9 は $(I, J) = (947, 44)$ の有限部分列 $\{\Omega(947), \dots, \Omega(990)\}$ によって得られた分岐ローカスである。 $\{P'(1), \dots, P'(11)\}$ 及び $\{P'(12), \dots, P'(22)\}$ に対応する平行なループ対が分岐ローカスにおいて観察できる。

（図 9(a) 参照） (γ'_1, γ'_2) 射影においてループ対とそれを結ぶ枝は各々 γ'_2 軸と γ'_1 軸に平行であるが（図 9(b) 参照） (γ'_1, γ'_3) 射影においては若干回転変換を受けていることが理解される。

(図 9(c) 参照) 即ち、近似的には $p'_1 \leftrightarrow \gamma'_1$ 及び $(p'_2, p'_3) \leftrightarrow (\gamma'_2, -\gamma'_3)$ の対応が見い出せるが、 γ'_1 は p'_3 の成分を少なからず含むと考えられる。

図 10(a)-(d) はパスとローカスの相対スケールから逆算された範囲における (γ'_2, γ'_3) 空間の分岐図であり図 7(a)-(d) と各々対応している。エノン写像族の場合ほどの定量的一致は見られないものの、定性面ではほぼ完全に分岐図を再構成している。定量面での不一致は、上述した座標系の回転から発生しており、対応する分岐現象は (γ'_1, γ'_3) 射影で傾く平面上に存在していると考えられる。しかしながら、定性面における一致から未知の力学系の分岐現象の調査には十分有効な手法と考えられる。

図 11 は、固有値の寄与率及び累積寄与率のグラフである。真の力学系の係数次元の推定に関しては $k = 2 \sim 4$ で不明確である。これらの成分中には、最急降下法の収束過程を反映する成分等、写像族の係数以外の要因も含まれるため、寄与率（分散）以外のより定性的、解析的な判定法が必要となる。

4. 結論

本論文はカオス的力学系のための新しい逆問題「時系列データからの分岐図再構成」を設定し、大域的に構成される非線形予測子に対して KL 変換を適用した一つの解法を提案した。

参考文献

- [1] J.D.Farmer and J.J.Sidorowich : "Predicting Chotic Times Series", Physical Review Letters, vol.59, no.8, pp.845-848 (1987).
- [2] G.Sugihara and R.M.May : "Nonliner forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series" Nature, vol.344, no.19, pp.734-741 (1990).
- [3] J.Jimenez, J.A.Moreno, and G.J.Ruggeri : "Forecasting on chaotic time series : A local optimal linear-reconstruction method", Physical Review A, vol.45, no.6, pp.3553-3557 (1992).
- [4] A.Mees, K.Aihara, M.Adachi, K.Judd and G.Matsumoto : "Deterministic prediction and chaos in squid axon response", Physical Rwview A, vol.169, pp.41-45 (1992).
- [5] A.Lapedes and R.Farber : LA-UR-87-2662, Los Alamos National Laboratory (1987).
- [6] M.Casdagli : "Nonlinear Prediction of Chaotic Time Series", Physica D 35, pp.335-356 (1989).
- [7] 上坂吉則, 尾関和彦 : "パターン認識と学習のアルゴリズム", 文一総合出版 (1990).
- [8] M.Hénon : "A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor", Communications in Mathematical Physics, 50, pp.69-77 (1976)
- [9] R.M.May : "Simple mathematical models with very complicated dynamics", Nature, 261, 459 (1976).
- [10] D.G.Aronson : "Bifurcations from an Invariant Circle for Two-Parameter Families of Maps of the Plane : A computer-Assisted Study", Communications in Mathematical Physics 83, pp.303-354 (1982).
- [11] F.Takens : "Detecting Strange Attractors in Turbulence", In Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics, 898, 366, Springer (1981).
- [12] D.E.Rumelhart : In Parallel Distributed Processing, MIT Press (1986).
- [13] J.Moody and C.Darken : "Learning with Localized Receptive Fields", preprint (1988).
- [14] T.Matsumoto, M.Komuro, H.Kokubu and R.Tokunaga : In Bifurcations / Sights, Sounds and Mathematics, Springer-Verlag (1993).
- [15] M.H.Jensen : "Complete Devil's Staircase, Fractal Dimensio n, and Universality of Mode-Locking Structure in the Circle Map", Physical Review Letter, vol.50, no.21, pp.713-747, (1983).

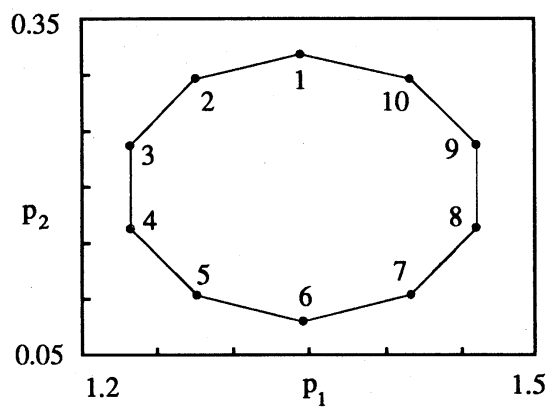


図1 (p_1, p_2) 係数空間における分岐パス

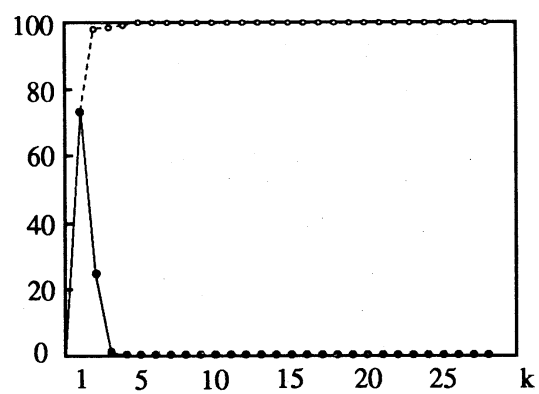


図2 k 成分に対する寄与率(実線)及び累積寄与率(破線)

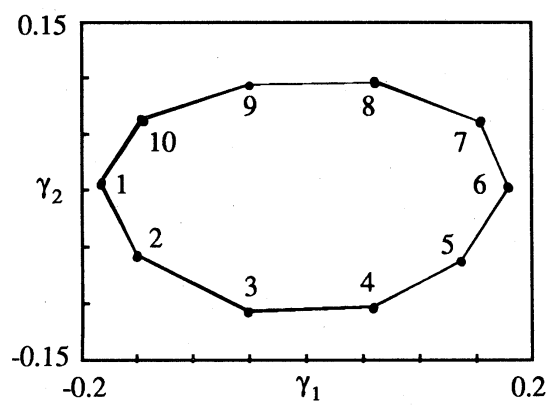


図3 (γ_1, γ_2) 係数空間における分岐ローカス

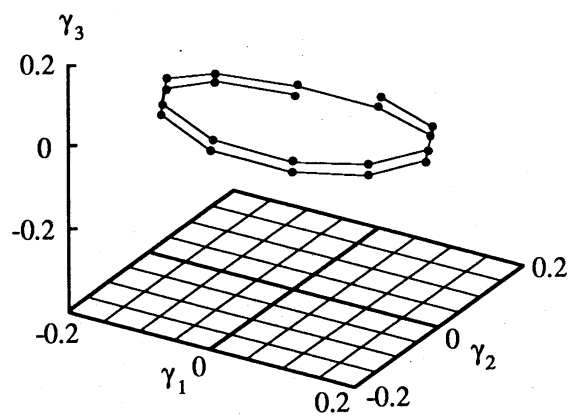


図4 ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) 係数空間における分岐ローカス

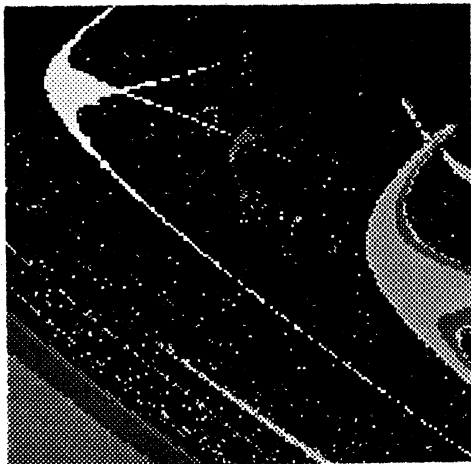


図 5(a) 2 係数エノン写像族分岐図
横軸: $1.2 \leq p_1 \leq 1.5$ 縦軸: $0.05 \leq p_2 \leq 0.35$

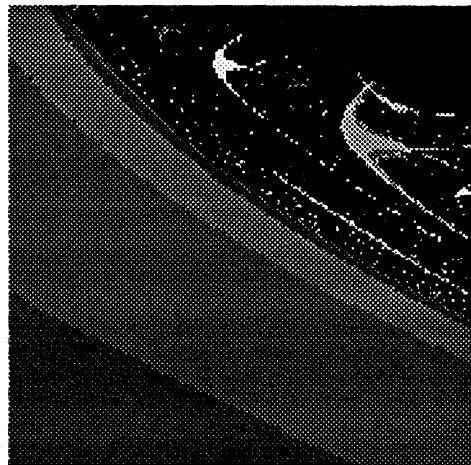


図 5(b) 2 係数エノン写像族分岐図
横軸: $0.9 \leq p_1 \leq 1.65$ 縦軸: $-0.4 \leq p_2 \leq 0.4$

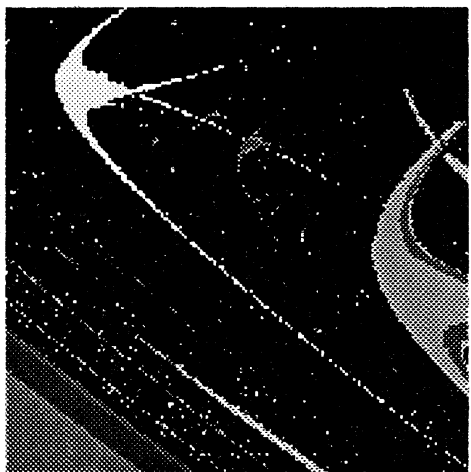


図 6(a) 再構成された分岐図
横軸: $-0.13 \leq \gamma_2 \leq 0.13$ 縦軸: $-0.225 \leq \gamma_1 \leq 0.225$

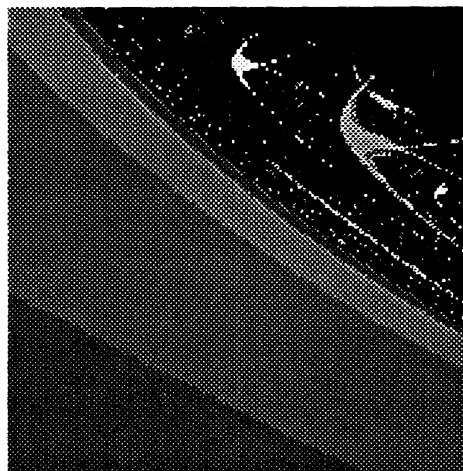


図 6(b) 再構成された分岐図
横軸: $-0.47 \leq \gamma_2 \leq 0.29$ 縦軸: $-0.3 \leq \gamma_1 \leq 0.95$

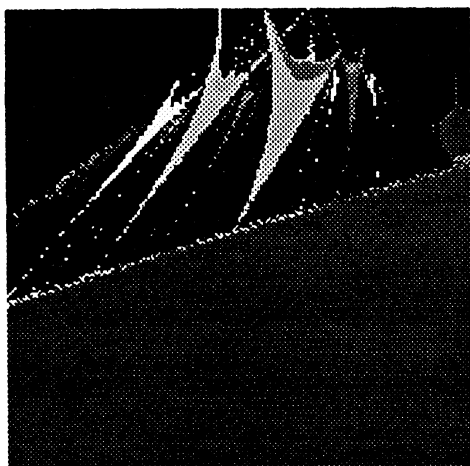


图 7 (a) 3 系数写像族分歧图 ($p_1=0.5$)
横轴: $-0.4 \leq p_2 \leq 0.6$ 纵轴: $1.4 \leq p_3 \leq 2.2$

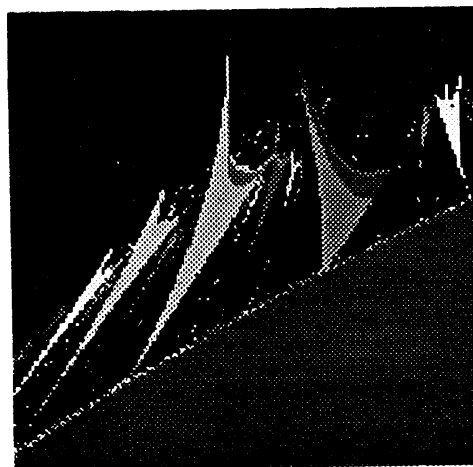


图 7 (b) 3 系数写像族分歧图 ($p_1=1.0$)
横轴: $-0.4 \leq p_2 \leq 0.6$ 纵轴: $1.4 \leq p_3 \leq 2.2$

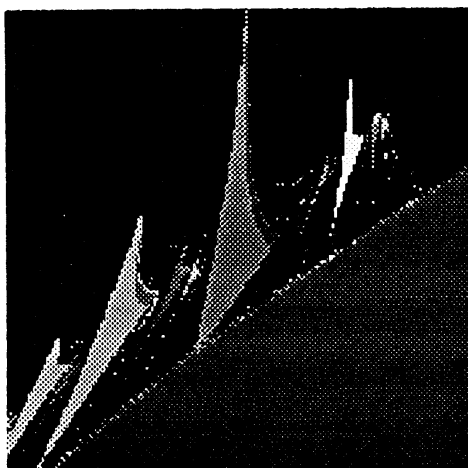


图 7 (c) 3 系数写像族分歧图 ($p_1=1.5$)
横轴: $-0.4 \leq p_2 \leq 0.6$ 纵轴: $1.3 \leq p_3 \leq 2.1$

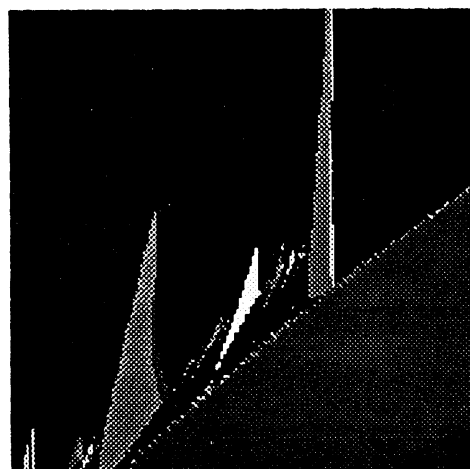


图 7 (d) 3 系数写像族分歧图 ($p_1=2.0$)
横轴: $-0.4 \leq p_2 \leq 0.6$ 纵轴: $1.3 \leq p_3 \leq 2.1$

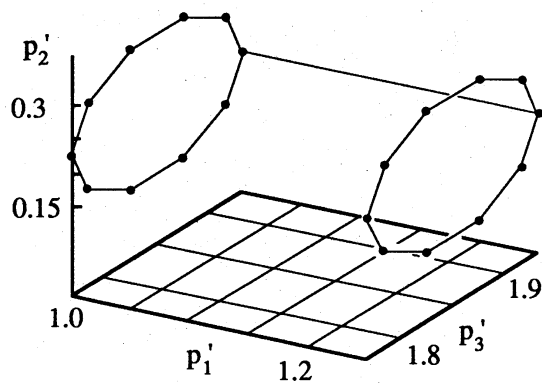


図8 (p'_1, p'_2, p'_3) 係数空間における分岐パス

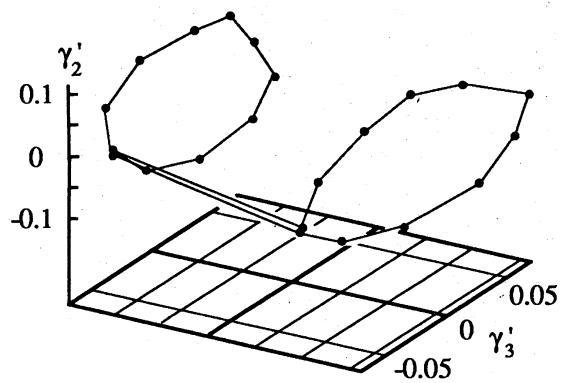


図9 分岐ローカス (a) $(\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3)$ 係数空間

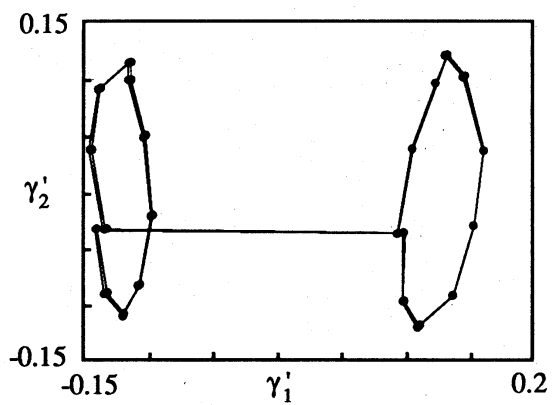


図9 分岐ローカス (b) (γ'_1, γ'_2) 係数空間

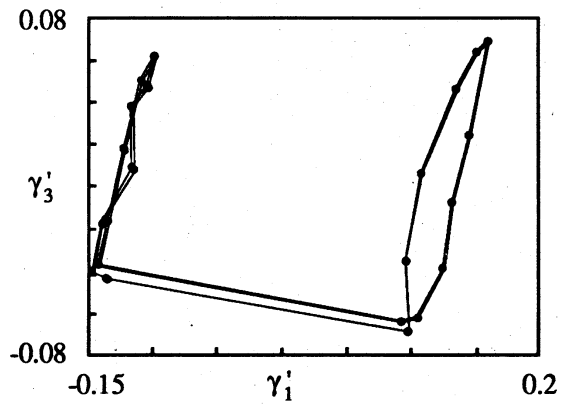


図9 分岐ローカス (c) (γ'_1, γ'_3) 係数空間

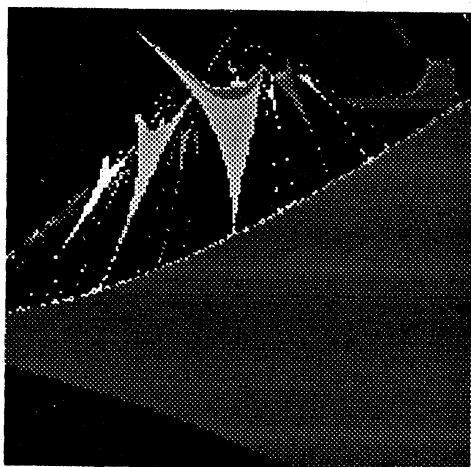


図 10(a) 再構成された分岐図 ($\gamma'_1 = -0.625$)
横軸: $-0.45 \leq \gamma'_2 \leq 0.325$ 縦軸: $-0.425 \leq \gamma'_3 \leq 0.25$

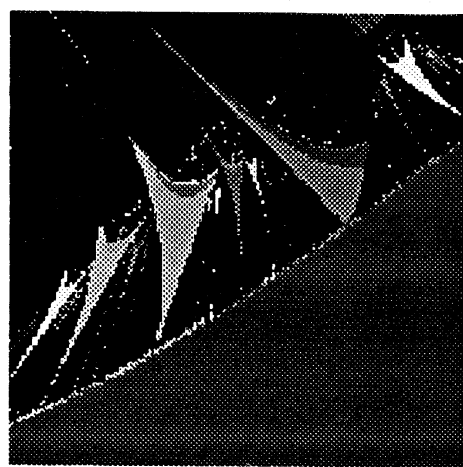


図 10(b) 再構成された分岐図 ($\gamma'_1 = -0.125$)
横軸: $-0.45 \leq \gamma'_2 \leq 0.325$ 縦軸: $-0.425 \leq \gamma'_3 \leq 0.25$

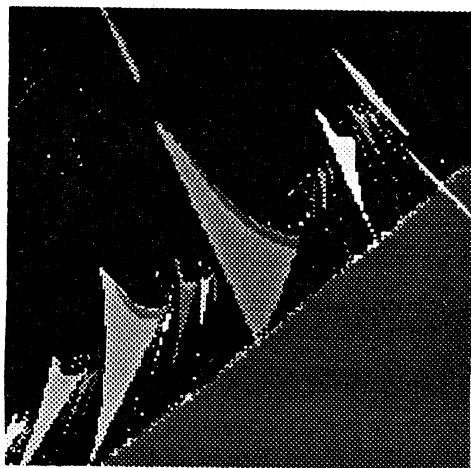


図 10(c) 再構成された分岐図 ($\gamma'_1 = 0.375$)
横軸: $-0.45 \leq \gamma'_2 \leq 0.325$ 縦軸: $-0.425 \leq \gamma'_3 \leq 0.25$

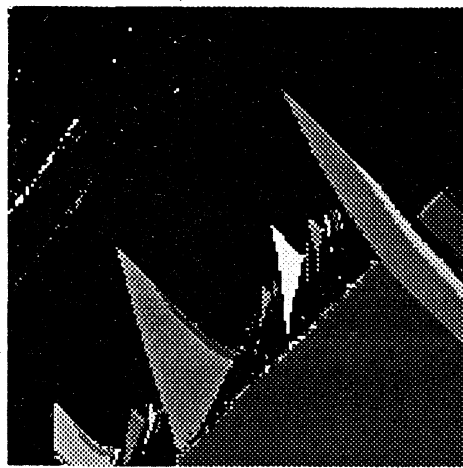


図 10(d) 再構成された分岐図 ($\gamma'_1 = 0.875$)
横軸: $-0.45 \leq \gamma'_2 \leq 0.325$ 縦軸: $-0.425 \leq \gamma'_3 \leq 0.25$

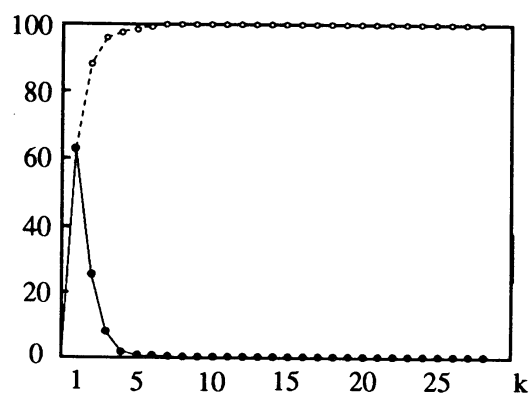


図1 1 k 成分に対する寄与率(実線)及び累積寄与率(破線)