

鉛直に加振した粒状体薄層の座屈と曲げ波

鵜川 亜希子 (Akiko Ugawa)

佐野 理 (Osamu Sano)

東京農工大学工学研究科

(Tokyo Univ. Agri. & Tech.)

1 はじめに

砂、胡麻、ガラスビーズに代表される粉粒体を鉛直方向に加振すると、対流や定在波等を引き起こす [1] ~ [7]。特に、その鉛直方向の層厚が水平方向に比べて小さい粉粒体を加振したとき現れるパターンは、流体で確認される定在波と非常に類似している。奥行き方向へ狭い容器へ粉粒体薄層を入れ鉛直方向へ $z = a \sin(2\pi ft)$ で加振すると、粉粒体薄層表面は ripple patterns と呼ばれる外部振動周期の 2 倍あるいは 4 倍の周期を持つさざ波のようなパターン (図 2 (a) (c)) や、山と山の間に鋭いピークを持つ spike patterns (Fig. 2 (d)) あるいは、層が大きい場合にはうねりのパターン undulations (Fig. 2 (e)) が出現する。ここ 2~3 年の研究では、粉粒体定在波の“粒子性”と“連続性”を特徴づける分散関係のベキについて、またそれと関連して無次元化の方法について注目が集まっている [6] [8]。ここでは、ripple patterns と undulation patterns の比較を通して分散関係と無次元化の物理的意味づけを考察し、外部から得た振動による撃力が粉粒体層中をどのように伝わり、それがどのようなパターンとして出現するのかを調べる。

2 目的

粉粒体薄層を鉛直に加振すると、さざ波のようなパターンの他に弾性板の両端から中央に向けて力をかけた時に見られる bending に似た現象が現れる。このパターンについて外部加振条件依存性、容器サイズ依存性を調べ、連続体モデルとの比較を行う。

3 実験

薄型直方体容器に粉粒体薄層を敷き、加振器 (EMIC, 513-B) へ垂直に取り付け、ファンクションシンセサイザーとアンプで加振する。容器は剛体的に上下振動し、その底面がクラドニのパターンを示すような固有振動状態にないことを予め確認した。粉粒体層の容器の側面から高速度ビデオカメラ (Photron, Fastcam-PCI2K) を用いて撮影を行い、後に画像解析を行った。用いた粉粒体は乾燥した球形のガラスビーズ (粒径 $d=0.2\sim 0.5\text{mm}$)、アルミニウムビーズ (粒径 $d=0.11\text{mm}$)、胡麻 ($2.7\text{mm} \times 1.6\text{mm} \times 1.0\text{mm}$) である。また容器としては奥行き $W=8\text{mm}$ 、高さ $H=91\text{mm}$ 、横幅 $L=146, 91, 60, 46, 30\text{mm}$ の 5 種類の薄型直方体容器を使用した。

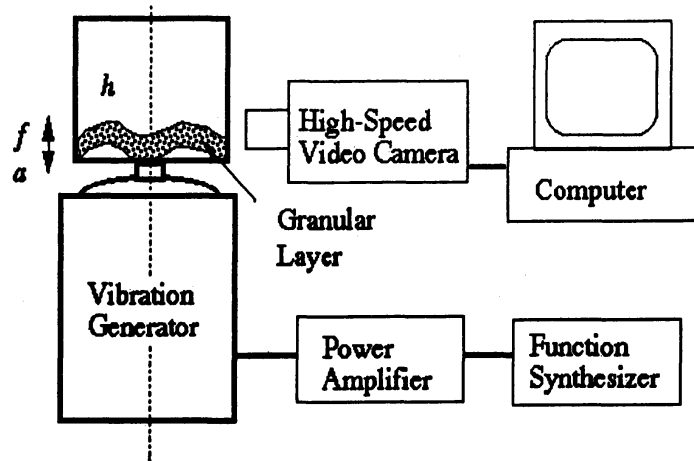


図 1: 実験装置概略図.

4 結果

4.1 出現するパターンのモード分類

観測結果は以下の通りである。(i) 無次元加速度 $\Gamma_0 = a(2\pi f)^2/g \approx 2$ 以下では容器に対する粉粒層の相対的な動きは観測されない。(ii) $\Gamma = \Gamma_0 \sim \Gamma_1 \approx 4$ で粉粒層は浮遊状態を取り始め、粉粒層全体に対流を引き起こす。なお、この Γ_1 は層厚 h とともに増加する。(iii) $\Gamma \approx \Gamma_1$ では、粉粒層表面にうねりが生じ始めるが、層全体としては対流の動きも認められる。(iv) $\Gamma > \Gamma_1$ になると、粉粒層は ripple patterns 図 2-(a) を引き起こす。(v) Γ をさらに増加させると、粉粒層全体がうねり、図 2-(e) や図 3 のような undulation patterns を引き起こす。これらの undulation に対して A_n, S_n とパターンを分類した。ここで、 A および S は層の中心に対して変形が反対称型および対称型であることを示し、添字の n はうねりの個数を表す。

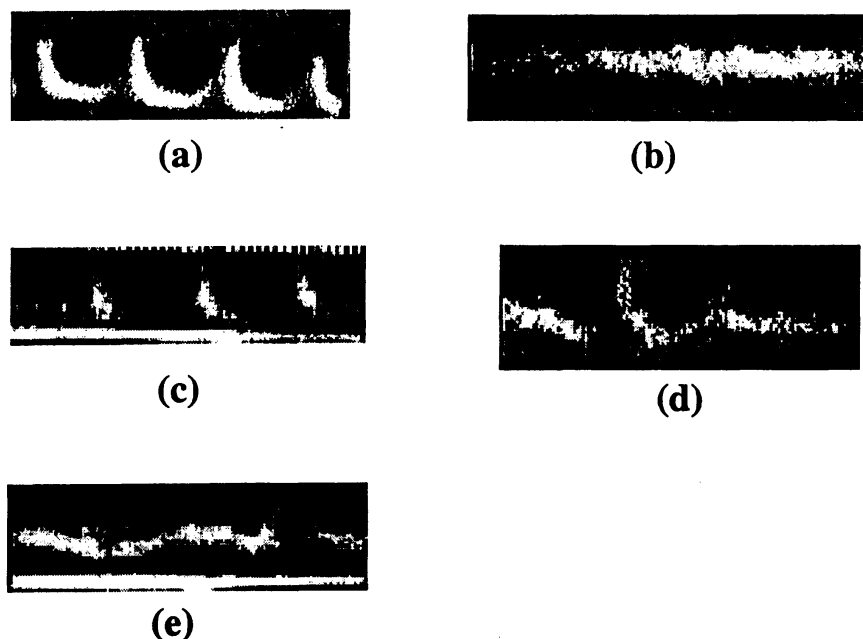


図 2: 粉粒体薄層上に出現するパターン：
 (a) $f/2$ -ripple, (b) no pattern, (c) $f/4$ -ripple
 (d) spike patterns, (e) undulation.

4.2 undulation の時間変化

図 4 は、層厚 $h=6.8\text{mm}$ の胡麻の粉粒層を横幅 $L=91\text{mm}$ の容器へ入れ、 $f=30\text{Hz}$, $a=2.2\text{mm}$ で加振したときの undulation のスナップショットである。(a)-(c) までは外部振動周期の 2 周期分 ($2T$) で、その間の $t = T$ で undulation の腹の部分と節の部分を入れ替えている。つまり、undulation は外部振動周期の 2 倍の周期を持つ。

次に、undulation が出現するときの粉粒層底面と容器底面の位置を図 5 に示す。undulation の腹の部分が自由落下している間、節の部分は容器と一体になって押し上げられ、その間 ($\phi < t < \phi + T/2$) に容器から運動量を得る。次に、運動量を得た節の部分は自由飛行し undulation の腹となり、他方、自由落下した腹の部分は容器と非弾性衝突をして節となる。図 5 の (c) から (f) が外部振動周期の一周期分で、(f) から (i) の間に、節と腹の位置が半波長ずれた状態で同様のプロセスが続く。また、谷と山の間で水平方向の粒子移動がある ripple に対して、undulation では水平方向の移動がほとんど観測されない。

なお、ripple pattern が生じている場合は、層が容器に押し上げられる時間 t_r は $T/2 < t_r$ である。

5 議論

5.1 粉粒体薄層上に生じる曲げ波と弾性板の曲げ波

ある程度の厚みを持った粉粒体振動層の挙動と、弾性板の挙動にはアナロジーが認められる。そこで、粉粒体振動層に対してヤング率 E に相当する量を導入する。粉粒体のような離散系

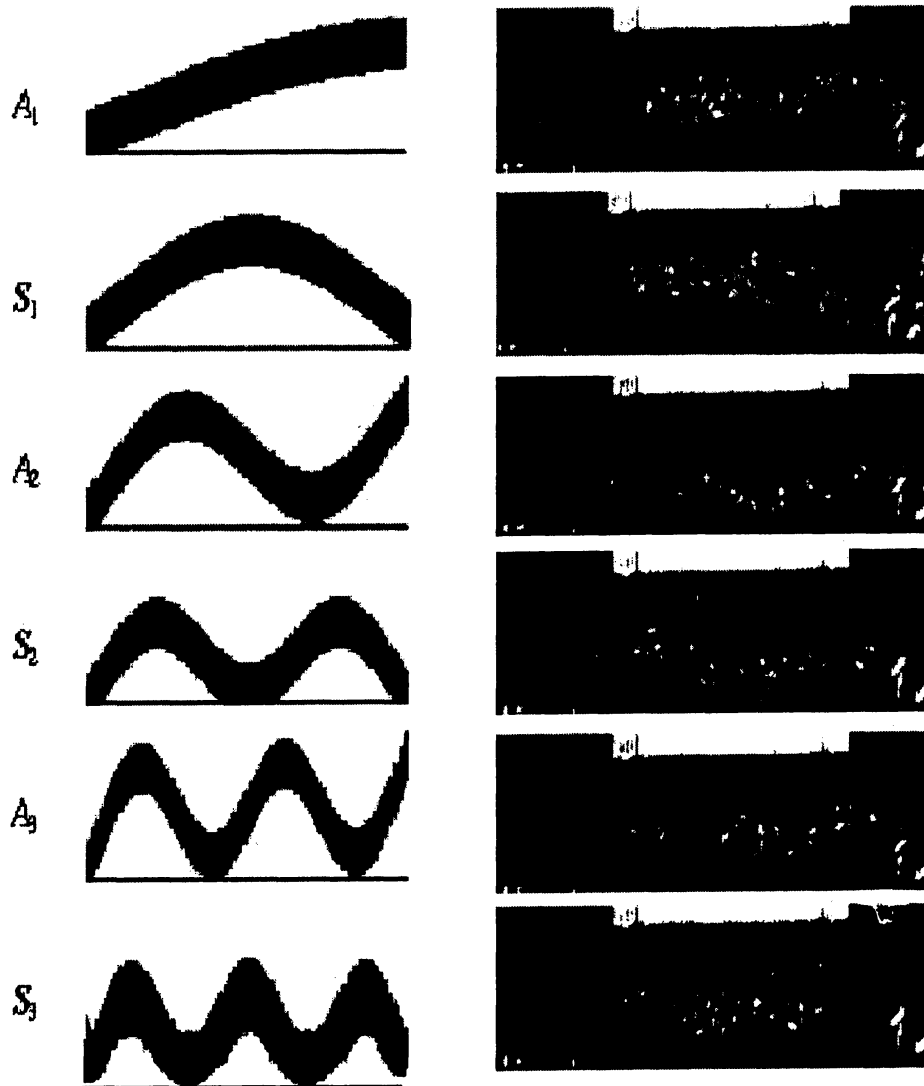


図 3: 曲げ波のモード分類.

右欄は胡麻の粉粒層（層厚 $h=6.8$ mm）を加振した時の観測結果: $(A_1)f = 20\text{Hz}, a = 2.60\text{mm}, \Gamma = 4.18$; $(S_1)f = 27\text{Hz}, a = 2.52\text{mm}, \Gamma = 7.41$; $(A_2)f = 30\text{Hz}, a = 1.40\text{mm}, \Gamma = 5.07$; $(S_2)f = 30\text{Hz}, a = 2.02\text{mm}, \Gamma = 7.32$; $(A_3)f = 30\text{Hz}, a = 2.33\text{mm}, \Gamma = 8.44$; $(S_3)f = 30\text{Hz}, a = 2.64\text{mm}, \Gamma = 9.56$. Mode S_0 は曲げが生じないで層全体がただ上下運動しているものに対応する。

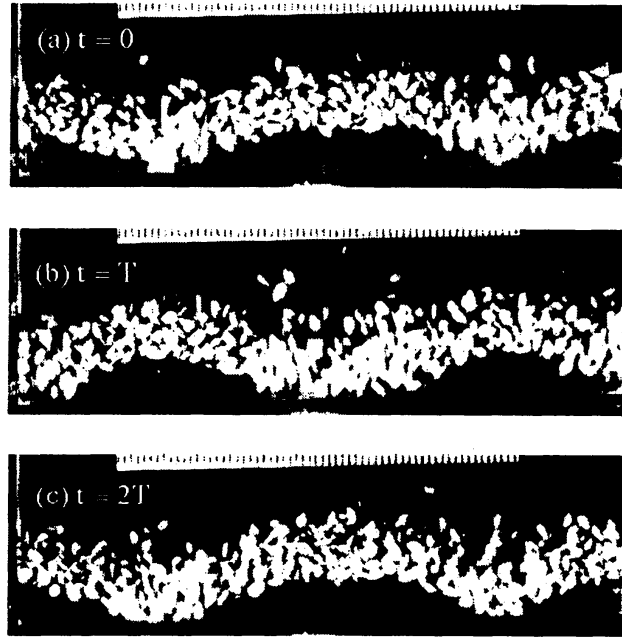


図 4: undulation のスナップショット.

はゴムや金属に見られるようなミクロなバネによる弾性とは異なるので、ヤング率の解釈に注意が必要であるが、加振を受けた粉粒層は、構成粒子の相対的な動きや、球形でない粒子からなる粉粒層の場合は粒子の配向変化が、粉粒層内部で圧縮/膨張となって現れ、密度波という弾性体特有の性質を示す。その密度波が粉粒層を伝わり弾性的な挙動を示すと思われるので、ここでも形式的に弾性定数としてヤング率を導入する。

粉粒振動層を、横幅 L 、奥行き長さ W 、厚さ h 、密度 ρ 、ヤング率 E の弾性板と考える。なお、 h 、 ρ 、 E は一定とする。このとき、粉粒層に生じる波は以下のように記述できる。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{EI}{S} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (1)$$

なお、 u は板の変位 (小さいとする)、 I は慣性モーメント、 S は断面積 hW である。undulation の観測結果によると、容器の両端 $x = \pm L/2$ において粉粒層は容器壁に対して垂直で、モーメントが働かないので境界条件は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

となる。

以上を解くと、反対称型の解

$$u_n^A = a_n \cos(\omega_n t + \phi) \left\{ \sinh \left(\frac{\alpha_n L}{2} \right) \sin(\alpha_n Lx) + \sin \left(\frac{\alpha_n L}{2} \right) \sinh(\alpha_n Lx) \right\}, \quad (4)$$

と対称型の解

$$u_n^S = b_n \cos(\omega_n t + \phi) \left\{ \cosh \left(\frac{\beta_n L}{2} \right) \cos(\beta_n Lx) + \cos \left(\frac{\beta_n L}{2} \right) \cosh(\beta_n Lx) \right\}, \quad (5)$$

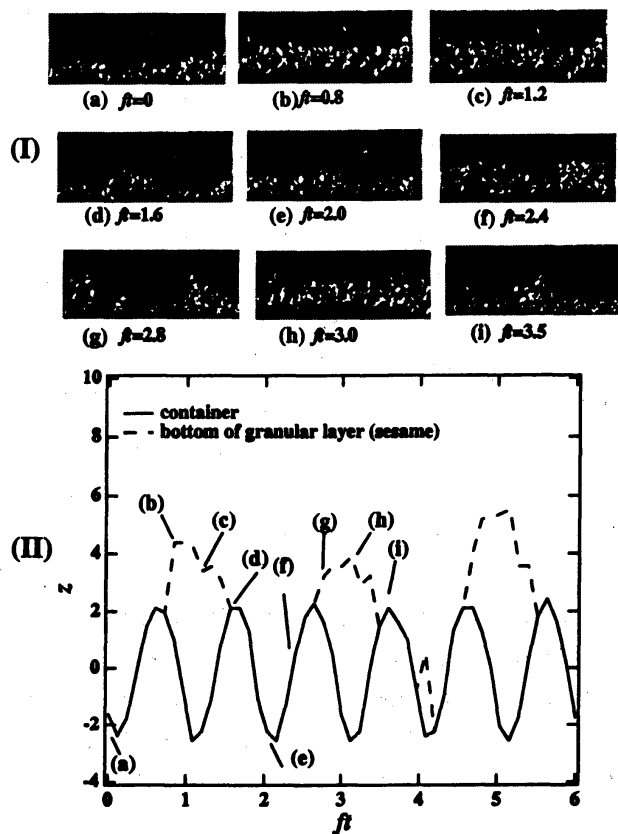


図 5: undulation の腹と容器の関係.

(I) 胡麻の粉粒層を $h=4.0\text{mm}$, $f=30\text{Hz}$, $a=2.3\text{mm}$ で加振した時に現れる undulation のスナップショット。

(II) 容器底面と粉粒層の位置関係。

図中の (a) から (i) はスナップショット (I) に対応した時間である。

を得る。ここで、 $\alpha_n, \beta_n = (12\rho\omega_n^2/Eh^2)^{1/4}$ であり、 a_n と b_n は任意定数である。また振動の固有値は $\alpha_n L = 4.7300407, 10.9956079, 17.2787597, \dots$ 、 $\beta_n L = 7.8532049, 14.1371655, 20.4203522, \dots$ である。弾性体の曲げ波の例を図3の左欄に示す。

5種類の容器 ($L=30\text{mm}, 46\text{mm}, 60\text{mm}, 91\text{mm}, 146\text{mm}$) に3種類の粉粒体 (ガラスビーズ、アルミニウムビーズ、胡麻) をそれぞれ入れて加振し、undulation を観測した。それら全てのデータを、縦軸に undulation の波数 $k = L/\lambda$ 、横軸に弾性板中に生じる圧縮波 $v_c \equiv \sqrt{E/\rho}$ と容器から受ける速度 $v_i \equiv 2\pi fa$ の比 v_c/v_i をとったものが図6である。これによると、容器サイズ L や層を構成している粒子が異なるにも関わらず、全てのデータがほぼ $L/\lambda \propto (v_c/v_i)^{-1/2}$ の関係式に従っていることがわかる。つまり、出現する undulation のタイプは容器サイズ L と v_c/v_i で決定されている。

以上の結果に対して、定性的な説明を試みる。容器から速度 v_i を得た粉粒層は、鉛直方向 (u 方向) および水平方向 (x 方向) へ膨張する。しかし、粉粒層の自由表面は上層部であり、横方向への広がりには容器の境界壁によって遮られ、圧縮されることになる。もし、圧縮波の速度 v_c が外部から得る速度 v_i よりも非常に大きく、容器サイズ L が小さければ、圧縮波 v_c はすぐに粉粒層全体に広がり、 A_1 や S_1 タイプの undulation を形成する。なお、臨界圧縮波速度は $v_{cj} = 2\sqrt{3}fL^2/hC_j^2$ ($C_j (= \alpha_j L$ あるいは $\beta_j L)$ は前述した固有値) である。それぞれのタイプの bending pattern およびそれによって励起される undulation patterns が出現するために必要な速度 v_c は固有値 C_j の二乗に反比例し、容器サイズ L の二乗に比例している。 S_1 や A_1 タイプに対応する固有値は S_n, A_n ($n > 2$) タイプのそれよりも小さいので、大きな容器では A_1 や S_1 タイプの undulation の形成に必要な臨界速度は非常に大きくなる。これが、水平方向に大きな長さを持つ容器で A_1 や S_1 タイプの undulation が観測できない理由と思われる。

次に先に述べた弾性板の座屈現象を参照しながら、図6のベキについて考察を行う。弾性板の両端に板に平行で互いに逆向きの力が加り、その大きさがある臨界値を超えた時板はたわみ座屈を生じる。板の変形が小さい場合、この変形を決める方程式は

$$-EI \frac{d^2 u}{dx^2} = Fu \quad (6)$$

で与えられる。境界条件 $u'(\pm L/2) = 0$ を課してこの方程式を解くと、

$$u = u_0 \sin \sqrt{\frac{F_n}{EI}} x \quad (7)$$

となる。なお、 $F_n = EI((n + \frac{1}{2})\pi/L)^2$ で、 n は弾性板に生じる曲げ波の個数、 u_0 は任意定数である。それゆえ、臨界応力 τ_n は

$$\tau_n = \frac{F_n}{S} = \frac{E}{12} \left(\frac{(n + 1/2)\pi h}{L} \right)^2 \quad (8)$$

と表される。気体分子運動論とのアナロジーより、鉛直方向に振動する容器からのエネルギー供給によって粉粒体全体が、 $\delta L = \alpha T^* L$ 膨張すると考える。また、‘粉体温度 T^* ’ は $1/2\rho v_i^2 = 3/2kT^*$ と表され、 α は膨張係数、 k はある定数である。これより、応力 τ は

$$\tau = E \frac{\delta L}{L} = E\alpha T^* \quad (9)$$

で与えられる。

他方、弾性板の曲げの曲率半径を R 、中心角を θ とした時、波長 $\lambda \approx R\theta$ である。両端から板の中央に向かって τS の力で押された弾性板には、モーメント $M = EI/R = (\frac{R\theta^2}{8})\tau S$ が

働く。それゆえ

$$\frac{2}{3}Eh^2 = \tau\lambda^2 \quad (10)$$

となる。以上の式 (6)～式 (10) をまとめると

$$\frac{L}{\lambda} = \sqrt{\frac{\alpha E}{24k}} \pi \left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{v_i}{v_c}} \propto \left(\frac{\sqrt{E/\rho}}{2\pi f a}\right)^{-1/2} \quad (11)$$

となる。これが、図 6 のベキを表していると思われる。なお、 v_i が非常に大きくなると応力が高まり、粉粒層のうねりの数も増加する。それに伴って粉粒層の長さが増加し、凸部では粒子間隔が広がって連続体近似が成り立たなくなってくる。この状態では着目するモードの波数に対応する v_c/v_i が小さくなると考えられる。これが図 6 の S_4 , S_5 , A_5 などのデータが関係式 (11) からはずれてくる理由と思われる。

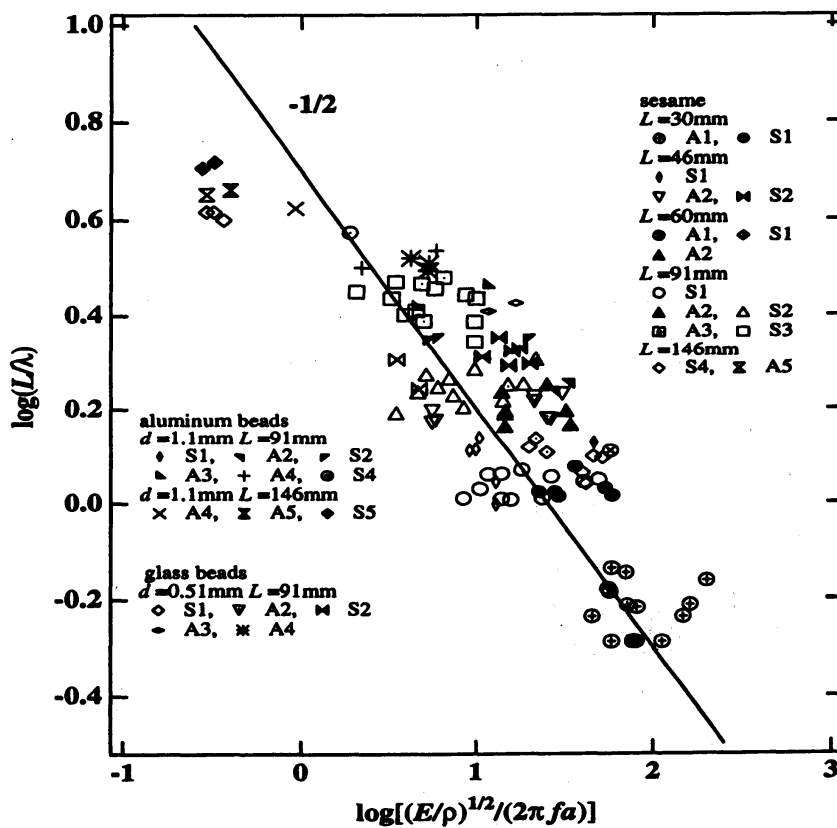


図 6: undulation のモードマップ。

5.2 undulation モードの外部振動条件依存性：底面からの力積と鉛直方向の散逸

undulation pattern が発生するメカニズムはまだ不明であるが、パターン分岐ダイアグラムについては定性的に解釈することが可能である。そのために、横軸を $f^2(h/g)$ 、縦軸を Γ としてプロットしたもの (図 7) を考える。この図は、パターン分岐ダイアグラムの $h-a$ 平面を見たものに相当する。ここで考える単位体積の粉粒層が容器から得る力積を見積もる。§§4.2 より、undulation の節の部分は容器から $\phi < t < \phi + T/2$ の間押し上げられ自由飛行し腹の部分となるので、粉粒層が容器から得る力積は $\rho \int_{\phi}^{\phi+T/2} (2\pi f a) \sin(2\pi f t) dt \propto a$ である。つまり、図 7 は容器から得る力積 p の層厚 h 依存性を見ていることになる。他方、力積を得た粉粒層は非弾性衝突をしながら、運動量を上層部へ伝えるので、粉粒層の層厚は鉛直方向の散逸の程度を示すパラメタとなる。図 7 は、ripple pattern と undulation の出現領域の境界が $f^{*2} \approx 0.3$, $\Gamma \approx 5.5$ であることを示している。

以上に基づくと、図 7 は次のように解釈できる。まず、層厚 h がある臨界値よりも小さく力積 p も適当な値であれば、粉粒層上層は変形することが可能となり、粉粒層に局所的な変形をもたらす ripple patterns を形成する。他方、層厚が大きければ、力積が大きくても上層は変形できず、粉粒層全体に変形が生じ undulation patterns を形成する。

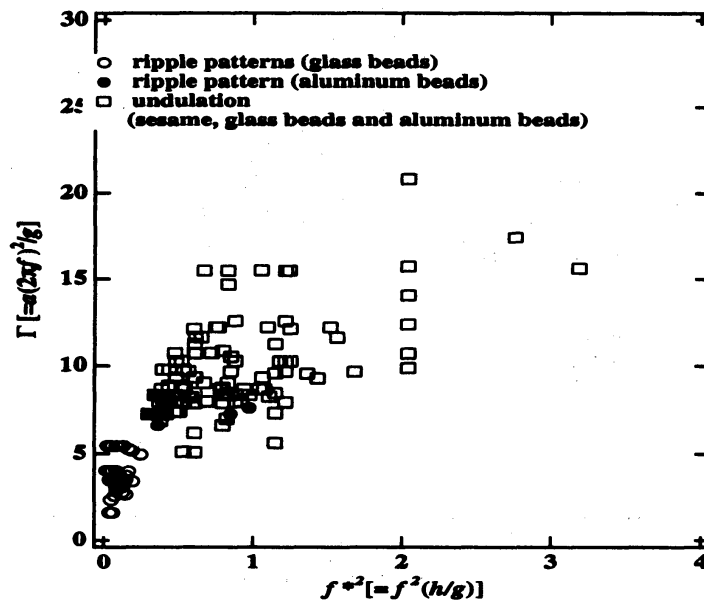


図 7: パターン分岐ダイアグラム：振幅 a - 層厚 h 平面。

5.3 undulation モードの外部振動条件依存性：アスペクト比と伝播速度

§4.1 において ripple pattern の発生は、層数 h/d で決まることを述べてきた。この節ではもう一つの長さスケール L あるいは、 $\gamma \equiv L/h$ について論じる。

鉛直方向の加振を受けた粉粒層は、鉛直方向だけでなく水平方向へも衝撃を伝える。図 8 はパターン分岐ダイアグラムの $\gamma - f^*$ 平面を見たものである。縦軸は層の水平方向の長さ L と鉛直方向の長さ h のアスペクト比、横軸 f^* は外部振動の一周期の間に、水平方向へ衝撃が横波として伝わる距離 $\sqrt{gh}T = \sqrt{gh}/f$ を層厚 h で無次元化した値である。なお、水平方向へ伝わる横波の速さは $\sqrt{gh}$ とした。また、図中の曲線は $\gamma = 4.059/f^* + 26.8589$ であり、係数はフィッティングパラメタである。図 8 によると、 $f^* > 0.5$, $\gamma < 37$ で undulation、 $f^* < 0.5$, $\gamma > 37$ で ripple pattern が出現している。

undulation の出現領域に対して以下のような解釈ができる。容器が一回振動する間に容器から得た衝撃力が層内を水平方向に容器幅 L を何往復かし、かつ、鉛直方向には粒子同士の非弾性衝突による散逸のため、上層が変形出来ない時、容器幅に関係した全体的なパターンである undulation が出現する。つまり、 $\sqrt{gh}/f > \text{constant} \times L$ 、すなわち $\gamma < \text{constant}/f^*$ の時 undulation が形成されると考えられる。他方、粉粒層内を非弾性衝突して伝播する衝撃力が上層を動かす程大きくても、水平方向全体へ衝撃力が伝わらなければ、層内の局所的な変化が生じ ripple patterns が形成される。このような状態は $\gamma > \gamma_c$ かつ $\gamma > 1/f^*$ に対応する。もし、粒子の反発係数 e が大きければ、鉛直方向の散逸が小さく伝播速度が大きいと考えられる。これが、反発係数の大きいアルミニウムビーズの粉粒層では h_c が大きくなり、 γ が低い領域で ripple pattern が観測される理由と考えられる。

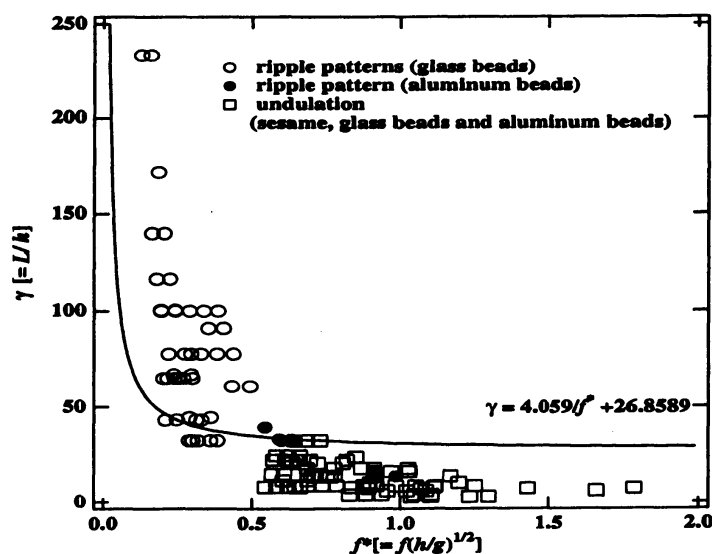


図 8: パターン分岐ダイアグラム： $\gamma - f^*$ 平面。

6 まとめ

容器から与えられた力積によって、粉粒層内に鉛直方向だけでなく水平方向にも、波 ($\sqrt{gh}$) が発生する。また、粉粒層内の粒子同士は非弾性衝突をするため、鉛直方向の散逸は層厚に依存する。以上を考慮すると、次のことが言える。

- 鉛直方向の散逸が小さく、横波が層内全体に伝わる前に、粉粒層自由表面に変形が起こると ripple pattern が形成される。

すなわち、 $\sqrt{gh}T/h < L/h$, あるいは $1/f^* < \gamma$ のとき ripple pattern

- 鉛直方向の散逸が大きく、層内全体に横波が伝わると undulation が形成される。

すなわち $\sqrt{gh}T/h > L/h$, あるいは、 $1/f^* > \gamma$ のとき undulation

- 層内の水平方向全体に縦波が伝わると、粉粒層は容器壁から応力 (圧縮力) を受け弾性板の曲げ波のような undulation を生じる。
- 生じる圧縮波の速度 $\sqrt{E/\rho}$ の大きさによって undulation のモードが分類される。
 - ・ $\sqrt{E/\rho} \gg 2\pi fa$ の時 S_1, A_1 型の undulation
 - ・ $\sqrt{E/\rho} > 2\pi fa$ の時 S_n, A_n 型の undulation ($n > 2$)

参考文献

- [1] S. Douady, S.Fauve & C.Laroche : Europhys.Lett. **8** (1989) 621.
- [2] E. Clément, L.Vanel, J.Rajchenbach & J.Duran : Phys.Rev. E **53** (1996) 2972.
- [3] C. Bizon, M.D.Shattuck, J.B.Swift, W.D.Mc Cormick & H.L.Swinney : Phys.Rev.Lett. **80** (1998) 57.
- [4] E. Clément & L. Labous : Phys.Rev.E **62** (2000) 8314.
- [5] K. M. Aoki, & T.Akiyama : Phys.Rev.Lett. **77** (1996) 4166.
- [6] P.B.Umbanhowar & H.L.Swinney: *Physica A* **288** (2000) 344.
- [7] Sung Joon Moon, M.D.Shattuck, C. Bizon, Daniel I. Goldman, J.B.Swift, & H. L. Swinney : Phys.Rev.E **65** (2001) 011301.
- [8] A.Ugawa & O.Sano, J. Phys. Soc. Jpn., **71** (2002) 2815.