

楕円渦流上の Kelvin 波の弱非線形相互作用 によって誘導される平均流

九州大学大学院数理学研究院^I

彌榮洋一 (Yoichi Mie)

福本康秀 (Yasuhide Fukumoto)

九州工業大学工学部^{II}

服部裕司 (Yuji Hattori)

日本原子力研究開発機構^{III}

廣田真 (Makoto Hirota)

^IGraduate School of Mathematics, Kyushu University

^{II}Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology

^{III}Japan Atomic Energy Agency

1 研究背景

飛行機雲は反対回転を持つ2つの渦管で近似される。これを翼端渦というが、この不安定性が70年代以降後続機の安定性に作用する大きな因子としてクローズアップされてきた。片方の渦管に注目するとき、相手側の渦管が誘導する速度を渦糸といっしょに下降する座標系で見ると、ひずみ場が誘導される。ここではひずみ場中の単独渦管としてモデル化する。このひずみ場により渦核は楕円形に変形する。

円形の流線をもつ回転流はスペクトル的に安定である。これは、軸まわりの回転対称性と軸方向の並進・反転対称性に由来する。ひずみ場により S^1 -対称性が壊れるとき、方位波数が2離れたペア $(m, m+2)$ の Kelvin 波が共存する波数、振動数でパラメータ共鳴不安定が起こる可能性が生じる。ただしひずみ場により、不安定を起こす波数、振動数はひずみの強さ ε に比例する有限の幅をもつ[10, 12]。特に、基本流として一定の渦度である Rankine 渦に設定することで、増幅率や不安定波数バンド幅をベッセル関数で具体的に計算することができた[3]。

Malkus[9] は実験により側面が変形する楕円柱に回転流を与えることで波が崩壊することを示した。Waleffe[14] は Malkus[9] の実験に関して、Euler 的方法により弱非線形解析を与え、可解条件を用いることで攪乱振幅の弱非線形発展方程式を与えた。ここで与えられた発展方程式は $(m, m+2)$ モードの2つの Kelvin 波の攪乱振幅 A_m, A_{m+2} に加えて、非線形相互作用によって誘導される平均流 B の振幅方程式である。Sipp[11] は無限領域にある2次元ひずみ場内の回転流に関して、Waleffe[14]の方法で弱非線形方程式を与えた。

速度や圧力などの流れを特徴づける量を時刻、空間の関数として調べる方法を Euler 的方法というのに対して個々の流体粒子を追いかける方法を Lagrange 的方法という。これは流体粒子の存在する領域 D の自己微分同相写像 $\phi_t: D \rightarrow D$ によって表すことができる。Arnold[1]は、流体粒子が iso-vortical sheet 上を動くとき、定常状態のエネルギー E は極値となることを示した。この内容を数学的に表現するには Lagrange 的方法しかない。さらに Lagrange 的記述には Kelvin 波のエネルギーの計算を系統的に行うことを可能にする。

波のエネルギーが求まる副産物として、Kelvin 波の非線形相互作用による平均流を計算できる Fukumoto & Hirota[4]。

第2章は、本研究で使われているモデルと境界条件を設定する。次に第3章では、従来よく使われていた Euler 的方法 [11, 14] を概説する。この方法では攪乱として導入した $(m, m+2)$ モードの2つの Kelvin 波の非線形相互作用による平均流が一般には定まらないという難点がある。第4章では、Euler 的方法に代わり、流体粒子を追いかける Lagrange 的方法を紹介する。この方法により Euler 的方法では求めることができなかった平均流を計算できる。第5章では、振幅の弱非線形方程式を与えて解析する。

2 基本方程式と境界条件

我々が考えるのは楕円柱の容器内に閉じ込められた流体に回転流の安定性である。楕円形の断面を表す式は

$$\frac{x^2}{1+\varepsilon} + \frac{y^2}{1-\varepsilon} = 1 \quad (2.1)$$

とする。円柱の軸を z 軸とする円柱座標系 (r, θ, z) を使う、

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, \\ e_r &= \cos \theta e_x + \sin \theta e_y, \\ e_\theta &= -\sin \theta e_x + \cos \theta e_y \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで e_x, e_y は x, y 方向、 e_r, e_θ は動径方向、方位角方向の単位ベクトルである。このとき側壁境界は $r = 1 + \varepsilon \cos 2\theta/2$ である。楕円柱内の流体は Euler 方程式にしたがい、非粘性、非圧縮を仮定する。速度 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ 、圧力 p が満たすべき各成分の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

これを満足する定常回転流 $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \varepsilon \mathbf{U}_1$ は

$$U_0 = 0, \quad V_0 = r, \quad W_0 = 0, \quad P_0 = r^2/2 \quad (2.4)$$

$$U_1 = -r \sin 2\theta, \quad V_1 = -r \cos 2\theta, \quad W_1 = 0, \quad P_1 = 0 \quad (2.5)$$

これは「流れは境界を貫通しない」という境界条件

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{at } r = 1 + \varepsilon \cos 2\theta/2 \quad (2.6)$$

も満足している。ただし $\mathbf{n}$ は壁に対する法線ベクトルであり、

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r + \varepsilon(-\mathbf{e}_r \cos 2\theta/2 + \mathbf{e}_\theta \sin 2\theta). \quad (2.7)$$

この $\mathbf{U}$ を基本流にとり、攪乱 $\hat{\mathbf{u}}$ を加える。攪乱 $\hat{\mathbf{u}}$ を攪乱振幅 α 、ひずみ度 ε で漸近展開する、

$$\hat{\mathbf{u}} = \alpha \mathbf{u}_{01} + \varepsilon \alpha \mathbf{u}_{11} + \alpha^2 \mathbf{u}_{02} + \alpha^3 \mathbf{u}_{03} + \varepsilon \alpha^2 \mathbf{u}_{12} + \dots \quad (2.8)$$

そして Euler 方程式から各オーダー $O(\varepsilon^i \alpha^j)$ の方程式を抜き出し、それを解いて速度と圧力を低次から逐次求める。

3 Euler 的方法

3.1 Kelvin 波

攪乱の主要項 $O(\alpha)$ として、Kelvin 波

$$u_{01} = A_m(t) u^{(m)}(r) e^{i(m\theta + kz)} \quad (3.1)$$

の重ね合わせを考える。波数 k 、周波数 ω も ε について展開する、

$$\begin{aligned} k &= k_0 + \varepsilon k_1 + \dots, \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

$O(\alpha)$ での Euler 方程式と非圧縮の条件 (2.3) は次の線形斉次の微分方程式に帰着する。

$$\mathcal{L}^{(m,k)} \begin{pmatrix} u^{(m)} \\ p^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}^{(m,k)} = \begin{pmatrix} -i(\omega_0 - m) & -2 & 0 & \partial_r \\ 2 & -i(\omega_0 - m) & 0 & i m/r \\ 0 & 0 & -i(\omega_0 - m) & i k \\ \partial_r + 1/r & i m/r & i k & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

この方程式の解は

$$\begin{aligned} p_{01}^{(m)} &= J_m(\eta_m r), \\ u_{01}^{(m)} &= \frac{i}{\omega_0 - m + 2} \left\{ -\frac{m}{r} J_m(\eta_m r) + \frac{\omega_0 - m}{\omega_0 - m - 2} \eta_m J_{m+1}(\eta_m r) \right\}, \\ v_{01}^{(m)} &= \frac{1}{\omega_0 - m + 2} \left\{ \frac{m}{r} J_m(\eta_m r) + \frac{2}{\omega_0 - m - 2} J_{m+1}(\eta_m r) \right\}, \\ w_{01}^{(m)} &= \frac{k}{\omega_0 - m} J_m(\eta_m r) \end{aligned} \quad (3.4)$$

と求められる。ただし

$$\eta_m^2 = \left[\frac{4}{(\omega_0 - m)^2} - 1 \right] k_0^2 \quad (3.5)$$

は動径波数に相当する。ここに境界条件 (2.6)

$$u_{01} = 0 \quad \text{at} \quad r = 1 \quad (3.6)$$

を課すと、 ω_0, k_0 が満たすべき分散関係に導かれる、

$$J_{m+1}(\eta_m) = \frac{\omega_0 - m - 2}{\omega_0 - m} \frac{m}{\eta_m} J_m(\eta_m). \quad (3.7)$$

らせんモード、方位波数 $m = +1, -1$ 、のときの分散関係を図示したものが図 1 である。左巻きらせんモード ($m = 1$) に対する分散曲線は青の破線、右巻きらせんモード ($m = -1$) に対する分散曲線は赤の実線で描いている。 $m = +1$ のとき $(k_0, \omega_0) = (1, 0)$ から $\omega_0 > 1$ 側、 $\omega_0 < 1$ 側に無限の分散曲線の枝が発生する。図 3.1 では無限個の中の 20 本の分散曲線、 $\omega_0 > 1$ 側に 10 本、 $\omega_0 < 1$ 側に 10 本を描いている。

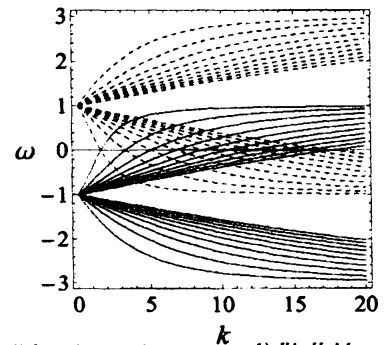


図 1: $(-1, 1)$ mode の分散曲線

3.2 パラメータ共鳴による線形不安定性

楕円ひずみにより基本流 U は円形の流れ U_0 から $U_0 + \varepsilon U_1$ に変形する。(2.5)を見ると、この楕円ひずみの効果は $\cos 2\theta, \sin 2\theta$ という項を与える。すなわち方位波数 2θ の成分をもつ。この形の摂動が方位波数 m の差が2の2個の Kelvin 波はパラメータ共鳴を可能にする。パラメータ共鳴を起こす不安定な波を探しているので、

$$u_{01} = A_m(t)u_m(r)e^{im\theta}e^{ikz} + A_{m+2}(t)u_{m+2}(r)e^{i(m+2)\theta}e^{ikz} + c.c. \quad (3.8)$$

と設定して、解析を進めよう。このとき、楕円ひずみ ε をともなう線形攪乱 $O(\varepsilon\alpha)$ では以下のモードが発生する、

$$u_{11} = A_m u_{11}^{(m-2)} e^{i(m-2)\theta} e^{ikz} + A_{m+2} u_{11}^{(m)} e^{im\theta} e^{ikz} \\ + A_m u_{11}^{(m+2)} e^{i(m+2)\theta} e^{ikz} + A_{m+2} u_{11}^{(m+4)} e^{i(m+4)\theta} e^{ikz} + c.c. \quad (3.9)$$

各モードごとの方程式は

$$\mathcal{L}^{(m,k)} \begin{pmatrix} u_{11}^{(m)} \\ p_{11}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}^{(m)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}^{(m+2,k)} \begin{pmatrix} u_{11}^{(m+2)} \\ p_{11}^{(m+2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}^{(m+2)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

この方程式は、 $\mathcal{L}^{(m,k)}, \mathcal{L}^{(m+2,k)}$ が特異なので、特定の非斉次項でしか境界条件を満足する解を持たない。したがって、非斉次項が解をとり得る値になる必要がある。(3.10)の右辺は時間微分項で非斉次項を調整する。

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} u_{11} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{N} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial t_{10}} \begin{pmatrix} u_{01} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

ただし $\mathcal{N}$ はひずみ場による $O(\varepsilon)$ の基本流の摂動 U_1 と $O(\alpha)$ の攪乱 u_{01} との相互作用項である。 $O(\varepsilon\alpha)$ での境界条件 (2.6) は

$$u_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_{01}}{\partial r} \cos 2\theta - \frac{u_{01}}{2} \cos 2\theta + v_{01} \sin 2\theta = 0 \quad \text{at } r = 1 \quad (3.12)$$

Euler 方程式 (2.3) と境界条件 (2.6) を満足するのは $\omega_0 - m - 1 \neq 0$ のとき、

$$\frac{\partial A_m}{\partial t_{10}} = ipA_{m+2}, \quad \frac{\partial A_{m+2}}{\partial t_{10}} = iqA_m \quad (3.13)$$

である。ただし係数は

$$p = \frac{J_{m+2}(\eta_{m+2})}{J_m(\eta_m)} \times \\ \frac{(\omega_0 - m + 2)(\omega_0 - m)^3(\omega_0 - m - 2) \{ (k_0^2(m+1) + m(m+1)(m+2))\omega_0^2 - 2(k_0^2 m(m+2) + m(m+1)^2(m+2))\omega_0 + k_0^2(m+1)(m^2 + 2m - 4) + m^2(m+1) \}}{32k_0^2(\omega_0 - m - 1)(m\omega_0 + m^2 + 2k_0^2)}, \\ q = \frac{J_m(\eta_m)}{J_{m+2}(\eta_{m+2})} \times \\ \frac{(\omega_0 - m)(\omega_0 - m - 2)^3(\omega_0 - m - 4) \{ (k_0^2(m+1) + m(m+1)(m+2))\omega_0^2 - 2(k_0^2 m(m+2) + m(m+1)^2(m+2))\omega_0 + k_0^2(m+1)(m^2 + 2m - 4) + m^2(m+1)(m+2)^2 \}}{32k_0^2(\omega_0 - m - 1)((m+2)\omega_0 + m^2 + 4m + 2k_0^2 + 4)} \quad (3.14)$$

の形をとる。

特に $(-1, +1)$ モードの共鳴において、波数 $k_0 = 1.578, 3.286, \dots$ のとき $\omega_0 = 0$ で共鳴する。このとき、

$$-p = q = \frac{3(3k_0^2 + 1)}{8(2k_0^2 + 1)}. \quad (3.15)$$

この結果は Vladimirov et al.[13], Kerswell[7] と一致する。

線形増幅率を $\varepsilon\sigma$ は、 $\sigma = \sqrt{-pq}$ から求められる。らせんモード $(-1, +1)$ 同士のパラメータ共鳴での増幅率は、

$$\sigma = \begin{cases} \frac{3(3k_0^2+1)}{8(2k_0^2+1)}, & \text{if } \omega_0 = 0 \\ \sqrt{\frac{(3+\omega_0)(3-\omega_0)(1+\omega_0)^4(1-\omega_0)^4}{256(1+2k_0^2-\omega_0)(1+2k_0^2+\omega_0)}} & \text{if } \omega_0 \neq 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

であり、パラメータ共鳴し得る分散曲線の交点 (k_0, ω_0) と線形増幅率 σ を計算したものが表 2 である。とくに $\omega_0 = 0$ のとき大きな増幅率をとることがわかる。線形時間発展方程式 (3.14) が書き下されているので、一般の $(m, m+2)$ によるパラメータ共鳴に関しても増幅率を容易に計算することができる。

表 2: $(-1, 1)$ モードの線形増幅率

k_0	ω_0	σ
1.578	0	5.311×10^{-1}
2.203	0.2916	0.1460×10^{-1}
2.630	0.4319	0.08230×10^{-1}
3.286	0	5.542×10^{-1}
4.046	0.1652	0.05249×10^{-1}
4.647	0.2744	0.03613×10^{-1}
5.061	0	5.589×10^{-1}

3.3 非線形相互作用によって誘導される平均流

2 次の攪乱 $O(\alpha^2)$ を考える。このオーダーでは、 θ, z に依存しない平均流と呼ばれるモード $\mathbf{u}_{mf}(t, r)$ が発生する。Euler 的方法の枠内では、この平均流は、線形作用素の縮退により $O(\alpha^2)$ の計算では求めることができない。Sipp[11] は楕円ひずみをともなう高次のオーダー $O(\varepsilon\alpha^2)$ まで進み、そこでの可解条件から平均流の時間微分を計算した。ただし、この方法ではパラメータ共鳴が起こる $(m, m+2)$ モードの分散曲線上の交点における平均流の時間微分しか決まらない。以下でこの内容を復習する。

$O(\alpha^2)$ の攪乱では以下のモードが発生する。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{02} = & A_m^2 \mathbf{u}_{02}^{(2m, 2k)} e^{i2m\theta} e^{i2kz} + A_{m+2}^2 \mathbf{u}_{02}^{(2m+4, 2k)} e^{i(2m+4)\theta} e^{i2kz} \\ & + A_m A_{m+2} \mathbf{u}_{02}^{(2m+2, 2k)} e^{i(2m+2)\theta} e^{i2kz} + \overline{A_m A_{m+2}} \mathbf{u}_{02}^{(2, 0)} e^{i2\theta} + c.c. + \mathbf{u}_{mf}(t, r) \end{aligned} \quad (3.17)$$

2 次の平均流モードの線形非斉次の微分方程式は

$$\mathcal{L}^{(0,0)} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{mf} \\ p_{mf} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

となる。この方程式は平均流の動径方向 $\mathbf{u}_{mf} = 0$ を解にもつが、 v_{mf}, w_{mf}, p_{mf} は不定である。

Sipp(2000)[11] は $O(\varepsilon\alpha^2)$ の可解条件により、平均流 $\mathbf{u}_{mf}(t, r)$ を求めた。 $O(\varepsilon\alpha^2)$ の直流モードの線形非斉次方程式は

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & \partial_r \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_r + 1/r & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{12}^{(0,0)} \\ p_{12}^{(0,0)} \end{pmatrix} = i(\overline{A_m A_{m+2}} - A_m \overline{A_{m+2}}) \begin{pmatrix} f_r(r) \\ f_\theta(r) \\ f_z(r) \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial t_{10}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{mf} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

この方程式が解をもつためには右辺の 2, 3 行目がゼロすなわち

$$i(\overline{A_m A_{m+2}} - A_m \overline{A_{m+2}}) \begin{pmatrix} f_\theta(r) \\ f_z(r) \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial t_{10}} \begin{pmatrix} v_{mf} \\ w_{mf} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

が必要条件である。平均流が変数分離して書き表されたとする、すなわち $\mathbf{u}_{mf}(t, r) = B(t)\mathbf{u}_B(r)$ のとき

$$\frac{dB}{dt} = i(A_{m+2}\overline{A_m} - \overline{A_{m+2}}A_m), \quad \mathbf{u}_B(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_\theta(r) \\ f_z(r) \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

この方法は楕円ひずみ ε を前提としているので、パラメータ共鳴が起こる分散曲線の交点 (k, ω) でのみしか平均流の時間微分を計算できない。また時間微分しか決まらず、初期条件は存在しないので2つの Kelvin 波の摂動 (3.8) による平均流が決定しない。

4 Lagrange 的方法

Lagrange 的方法とは流体粒子の軌道を追いかける方法である。最近、Hirota & Fukumoto[6], Fukumoto & Hirota[4] はこの手法により、2次の平均流を求めた。本章でこの方法を紹介し、今考えている楕円柱容器内回転流に起こる2次の平均流を求める。

Lagrange 変位 ξ を

$$\xi = \alpha\delta x + \frac{\alpha^2}{2}\delta^2 x \quad (4.1)$$

とする。

Euler 方程式を満足して、非粘性非圧縮を仮定しているので、渦度方程式

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \Omega) \quad (4.2)$$

が成り立つ。ただし Ω は渦度 $\Omega = \nabla \times \mathbf{u}$ である。これを満足する渦度 Ω の摂動を考えると、

$$\Omega = \Omega_0 + \alpha\delta\Omega + \frac{\alpha^2}{2}\delta^2\Omega \quad (4.3)$$

$$\delta\Omega = \nabla \times [\delta\mathbf{x} \times \Omega_0], \quad \delta^2\Omega = \nabla \times [\delta\mathbf{x} \times \delta\Omega + (\delta^2\mathbf{x} - (\delta\mathbf{x} \cdot \nabla)\delta\mathbf{x})\Omega_0] \quad (4.4)$$

$\nabla \times$ の逆演算を考えることで、一致する速度場 $\mathbf{u}$ が与えられる、

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_0 + \alpha\delta\mathbf{u} + \frac{\alpha^2}{2}\delta^2\mathbf{u} \quad (4.5)$$

$$\delta\mathbf{u} = \mathcal{P}[\delta\mathbf{x} \times \Omega_0], \quad \delta^2\mathbf{u} = \mathcal{P}[\delta\mathbf{x} \times \delta\Omega + (\delta^2\mathbf{x} - (\delta\mathbf{x} \cdot \nabla)\delta\mathbf{x})\Omega_0] \quad (4.6)$$

ただし写像 $\mathcal{P}$ は divergence がゼロになる成分を取り出す射影演算子である。

Lagrange 変位は体積保存より、

$$\nabla \cdot \delta\mathbf{x} = 0, \quad \nabla \cdot \delta^2\mathbf{x} = 0 \quad (4.7)$$

Euler 方程式の解 (4.4), (4.6) は iso-vortical sheet 上に制限され、渦度のトポロジーを保つ。運動エネルギー $K(\mathbf{u})$ を

$$K(\mathbf{u}) = \int |\mathbf{u}|^2 dV, \quad K = K_0 + \alpha\delta K + \frac{\alpha^2}{2}\delta^2 K \quad (4.8)$$

とする、ただし

$$\delta K = \int \mathbf{U}_0 \cdot \delta\mathbf{u} dV, \quad \delta^2 K = \int (\mathbf{U}_0 \cdot \delta^2\mathbf{u} + |\delta\mathbf{u}|^2) dV \quad (4.9)$$

Arnold(1966)[1] は iso-vortical sheet 上に制限された流体の運動エネルギーに注目して、定常解はエネルギー汎関数の極値をとることを以下の計算により示した。

$$\begin{aligned}
 \delta K &= \int U_0 \cdot (\delta \mathbf{x} \times \boldsymbol{\Omega}_0 + \nabla \phi_1) dV \\
 &= \int (\delta \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\Omega}_0 \times U_0 + U_0 \cdot \nabla \phi_1) dV \\
 &= \int (\delta \mathbf{x} \cdot \nabla \psi_1 + U_0 \cdot \nabla \phi_1) dV \\
 &= \int \nabla \cdot (\psi_1 \delta \mathbf{x} + \phi_1 U_0) dV = 0
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

このとき $O(\alpha^2)$ の運動エネルギー $\delta^2 K$ は

$$\delta^2 K = \int [|\delta \mathbf{u}|^2 + U_0 \cdot \delta^2 \mathbf{u}] dV = \int [|\delta \mathbf{u}|^2 + U_0 \cdot (\delta \mathbf{x} \times \delta \boldsymbol{\Omega})] dV \tag{4.11}$$

これは平均流 $\overline{\delta^2 \mathbf{u}}$ が

$$\overline{\delta^2 \mathbf{u}} = \overline{\mathcal{P}[\delta \mathbf{x} \times \delta \boldsymbol{\Omega}]} = \overline{\mathcal{P}[\delta \mathbf{x} \times (\nabla \times (\delta \mathbf{x} \times \boldsymbol{\Omega}_0))]} \tag{4.12}$$

であることを表している。そして線形の Lagrange 変位 $\delta \mathbf{x}$ から 2 次の平均流 $\overline{\delta^2 \mathbf{u}}$ が求められることを意味する。

Lagrange 変位 $\delta \mathbf{x}$ を求める方程式として、Frieman-Rosenbluth 方程式 [5] が知られている。この方程式は Lagrange 変位の時間発展方程式

$$\delta \mathbf{u} = \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial t} + (U_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{x} - (\delta \mathbf{x} \cdot \nabla) U_0 \tag{4.13}$$

を線形攪乱 Euler 方程式

$$\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} + (U_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) U_0 = \nabla \phi \tag{4.14}$$

に代入することによって得られる次の方程式

$$\frac{\partial^2 \delta \mathbf{x}}{\partial t^2} + 2(U_0 \cdot \nabla) \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial t} - \nabla \cdot (\delta \mathbf{x} U_0 \cdot U_0 - U_0 U_0 \cdot \nabla \delta \mathbf{x}) = \nabla \phi \tag{4.15}$$

これは F-R 方程式と矛盾しない。この方程式と体積保存の式 (4.7) から Lagrange 変位 $\delta \mathbf{x}$ は求まる。そして (4.12) に代入することで、Euler 的手法では求めることができなかった非線形相互作用による平均流が与えられる。

$$\begin{aligned}
 \left(\overline{\delta^2 \mathbf{u}} \right)_r &= 0 \\
 \left(\overline{\delta^2 \mathbf{u}} \right)_\theta &= \frac{8k_0^2 J_m(\eta_m r)}{(\omega_0 - m + 2)(\omega_0 - m)^2} \left[\frac{m}{r(\omega_0 - m)} J_m(\eta_m r) - \frac{\eta_m}{\omega_0 - m - 2} J_{m+1}(\eta_m r) \right] |\alpha_m|^2 \\
 &\quad + \frac{8k_0^2 J_{m+2}(\eta_{m+2} r)}{(\omega_0 - m)(\omega_0 - m - 2)^2} \left[\frac{(m+2)J_{m+2}(\eta_{m+2} r)}{r(\omega_0 - m)} - \frac{\eta_{m+2} J_{m+3}(\eta_{m+2} r)}{\omega_0 - m - 4} \right] |\alpha_{m+2}|^2 \\
 \left(\overline{\delta^2 \mathbf{u}} \right)_z &= \frac{-8k_0}{(\omega_0 - m)(\omega_0 - m + 2)^2} \left[\frac{m J_m(\eta_m r)}{r(\omega_0 - m)} - \frac{\eta_m J_{m+1}(\eta_m r)}{\omega_0 - m - 2} \right] \left[\frac{m J_m(\eta_m r)}{r} + \frac{2\eta_m J_{m+1}(\eta_m r)}{\omega_0 - m - 2} \right] |\alpha_m|^2 \\
 &\quad - \frac{8k_0}{(\omega_0 - m - 2)(\omega_0 - m)^2} \left[\frac{(m+2)J_{m+2}(\eta_{m+2} r)}{r(\omega_0 - m - 2)} - \frac{\eta_{m+2} J_{m+3}(\eta_{m+2} r)}{\omega_0 - m - 4} \right] \left[\frac{(m+2)J_{m+2}(\eta_{m+2} r)}{r} + \frac{2\eta_{m+2} J_{m+3}(\eta_{m+2} r)}{\omega_0 - m - 4} \right] |\alpha_{m+2}|^2
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

4.1 Euler 的方法と Lagrange 的方法との比較

Euler 方程式の解が iso-vortical sheet 上に制限されるという特徴は定常解がエネルギー汎関数の極値として表れる。これは攪乱による 2 次のエネルギーを 1 次の Lagrange 変位から計算可能にして、単一モードの

自己相互作用によって生み出される平均流を1次のLagrange変位から求めることができた。これは任意の分散曲線上のKelvin波により誘導される平均流が計算できることを意味する。初期に摂動(3.8)を与えることにより誘導される平均流(4.16)はEuler的方法の時のように新しい変数の振幅 B を必要とせず、初期の摂動の振幅 A_m, A_{m+2} だけで与えられる。

Euler的方法では平均流の時間微分を求めることができた。ただし、この平均流の時間微分は方位波数 $(m, m+2)$ の組み合わせで生成されたものである。そのため、パラメータ共鳴が起こる分散曲線上の交点 (k_0, ω_0) でしか平均流の時間微分を計算できない。パラメータ共鳴を考慮しなければならないため、楕円ひずみ ε が必要となった。

5 振幅方程式

2次の平均流を計算できることで、3次の非線形モードまで求めることが可能である。この結果、自動的に弱非線形振幅方程式は以下のハミルトン標準形に到達できた[8]。今は、 $O(\alpha^3)$ のオーダーの非線形作用による時間変化と $O(\varepsilon\alpha)$ のオーダーの楕円ひずみによる時間変化を同じスケールで考えるために

$$\alpha^2 = \varepsilon \quad (5.1)$$

とすることで摂動の大きさが決定する。

以下では、振動数 $\omega = 0$ の定常Kelvin波でパラメータ共鳴が起こり得る特別な場合、

$$u_{01} = A_-(t)u_-(r)e^{-i\theta}e^{ikz} + A_+(t)u_+(r)e^{-i\theta}e^{ikz} + c.c. \quad (5.2)$$

のときを考える。このとき振幅方程式は以下の形で与えられる、

$$\frac{dA_{\pm}}{dt} = \pm [i\varepsilon a A_{\mp} + i\varepsilon A_{\pm}(b|A_{\pm}|^2 + c|A_{\mp}|^2)], \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{3(3k_0^2 + 1)}{8(2k_0^2 + 1)}, \\ b &= \frac{2k_0^4}{3(2k_0^2 + 1)} \left[\frac{4}{J_0(\eta)^2} \int_0^1 r J_0(\eta r)^2 J_1(\eta r)^2 dr - (11k_0^4 + 13k_0^2 + 5)J_0(\eta)^2 \right], \\ c &= \frac{-k_0^2}{12(2k_0^2 + 1)} \left[\frac{64k_0^2}{J_0(\eta)^2} \int_0^1 r J_0(\eta r)^2 J_1(\eta r)^2 dr + (20k_0^6 + 97k_0^4 + 14k_0^2 - 27)J_0(\eta)^2 \right], \\ \eta &= \sqrt{3}k_0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

この定常Kelvin波は軸方向波数 k_0 を離散的な値でとり、 k_0 が小さいときに係数 a, b, c がどのような値をとるかを表に記す。

複素振幅 A_+, A_- の関係を $A_+ = \bar{A}_-$ に制限した振幅方程式(5.3)のふるまいを考える。

$\tau = \varepsilon t, A = A_+, b + c = -D_{NL}$ と変数変換すると、振幅方程式(5.3)は

$$\frac{dA}{d\tau} = ia\bar{A} - iD_{NL}|A|^2 A \quad (5.5)$$

この方程式を満足するとき複素振幅 A がどのように変化するか調べるために、 A の相図を描く。平衡点は $A = 0, \pm\sqrt{a/D_{NL}}$ の

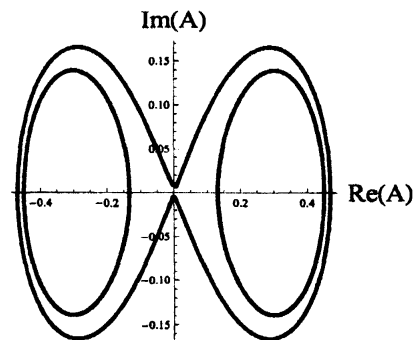


図 4: A の軌道、 $k = 1.5788$

表 3: The coefficients of amplitude equation (5.4)

k	1.5788	3.2859	5.0614	6.8562	8.6587	10.465	12.274	14.084	15.894
a	0.53117	0.55420	0.55891	0.56053	0.56126	0.56165	0.56188	0.56203	0.56213
b	0.39757	8.2860	40.448	118.36	266.09	509.51	875.92	1393.8	2092.5
$-c$	5.2217	53.388	212.75	562.10	1185.4	2170.3	3607.1	5588.6	8209.5

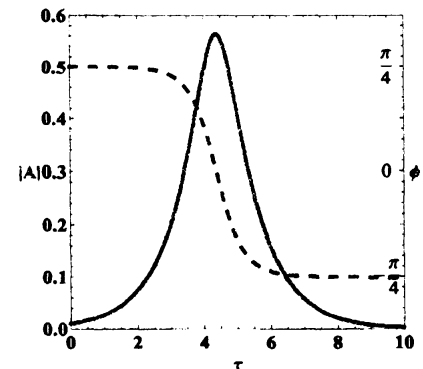
3点である。 $A=0$ は線形不安定を示す平衡点で、増幅率は $\sqrt{a}$ である。 $A = \sqrt{a/D_{NL}}$ は安定平衡点である。

この方程式の楕円ひずみによる作用、非線形による作用をより詳しく調べるために、極座標表示 $A = |A|e^{i\phi}$ を用いる。振幅 $|A|$, 位相 ϕ の時間発展方程式は

$$\frac{d|A|}{d\tau} = |A| \sin 2\phi, \quad \frac{d\phi}{d\tau} = \cos 2\phi - D_{NL}|A|^2 \quad (5.6)$$

となる。この方程式からわかることは、楕円ひずみにより線形不安定が起こる、そして非線形作用は位相を負の方向に回転させる作用があり、これによって不安定成長が回避される、すなわち振幅は飽和してしまう。

振幅 $|A|$ と位相 ϕ の時間発展のグラフを描いたのが図である。この図は初期の複素振幅として $A = e^{i\pi/4}/100$ として、最初に線形不安定を起こすように設定している。最初は線形不安定の影響で、振幅 $|A|$ が指数的に増大している。一方、位相 ϕ は楕円ひずみによる影響がないため、ほぼ一定のままである。徐々に振幅 $|A|$ が大きくなると、非線形項の影響で位相が負の方向に回転し、安定化する方向の位相 $\phi = -\pi/4$ あたりになると振幅 $|A|$ が指数的に小さくなる。この繰り返しが行われることが分かる。

図 5: $|A|, \phi$ の時間発展グラフ

6 考察

初期の攪乱として2つのモード $(m, m+2)$ を考えた。結果は2つのモードだけでは波が不安定化するとは言えなかった。しかし実際には楕円柱内の回転流は崩壊することが Eloy et al.[2] による実験で示されている。波の崩壊を示すには3波以上の相互作用を考えたい。

3波以上考えるとき、Euler 的方法では解析できない。なぜなら Euler 的方法では $(m, m+2)$ モードのパラメータ共鳴点しか平均流を求めることができないからである。Lagrange 的方法は平均流を一般的に導くことができる。これが3波以上の非線形解析を可能にする。

参考文献

- [1] V. I. Arnold 1966 Sur un principe variationnel pour les écoulements stationnaires des liquides parfaits et ses applications aux problèmes de stabilité non linéaires. *J. Méc.* 5, 29-43
- [2] C. Eloy et al. 2000 Experimental Study of the Multipolar Vortex Instability. *Phys. Rev. Lett.* 85, 3400-3403

- [3] Y. Fukumoto 2003 The three-dimensional instability of a strained vortex tube revisited. *J. Fluid Mech.* 493, 287-318
- [4] Y. Fukumoto & M. Hirota 2008 Elliptical instability of a vortex tube and drift current induced by it. *Phys. Scr.* T132, 014041
- [5] E. Frieman & M. Rotenberg 1960 On Hydromagnetic Stability of Stationary Equilibria. *Rev. Mod. Phys.* 32, 898-902
- [6] M. Hirota & Y. Fukumoto 2008 Energy of hydrodynamic and magnetohydrodynamic waves with point and continuous spectra. *J. Math. Phys.* 49, 083101
- [7] R. R. Kerswell 2002 Elliptical Instability. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 34, 83-113
- [8] E. Knobloch et al. 1994 Normal forms for three-dimensional parametric instabilities in ideal hydrodynamics. *Phys. D* 73, 49-81
- [9] W. V. R. Malkus 1989 An experimental study of the global instabilities due to the tidal (elliptical) distortion of a rotating elastic cylinder. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 48, 123-134
- [10] D. W. Moore & P. G. Saffman 1975 The instability of a straight vortex filament in a strain field. *Proc. R. Soc. Lond. A* 346, 2515-2522
- [11] D. Sipp 2000 Weakly nonlinear saturation of short-wave instabilities in a strained Lamb-Oseen vortex. *Phys. Fluids* 12, 1715-1729
- [12] C. Y. Tsai & S. E. Widnall 1976 The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field. *J. Fluid Mech.* 66, 35-47
- [13] V. A. Vladimirov et al. 1983 On the stability of elliptically deformed rotation of ideal incompressible fluid in a field of Coriolis forces. *Isv. Atmos. Ocean. Phys.* 19, 586-594
- [14] F. Waleffe 1989 The 3D instability of a strained vortex and its relation to turbulence. *PhD thesis. MIT*