

中間次元サイクル

に伴う abelian variety

名大・理 齊藤 博

以下では、 k は断わらない限り任意標数の代数閉体を、variety は、 k 上定義された、non-singular projective variety を、各々意味する。Variety X の codimension p の cycles のつくる Chow group を $CH^p(X)$ の中で、零と代数的同値な cycles のつくる subgroup を $A^p(X)$ で表わす。Lieberman は、次のような "intermediate Jacobian の公理" を導入した:

各 variety X と各 p ($1 \leq p \leq \dim X$) に対して、

(i) $A^p(X)$ の subgroup $K^p(X)$

(ii) abelian variety $J^p(X)$

に対応し、これについて、

(iii) $J^p(X)$ は、 $p = \dim X$ の時、 X の Albanese variety であり、

$p = 1$ の時、 X の Picard variety と一致、

(iv) 群の同型 $A^p(X)/K^p(X) \cong J^p(X)$ が存在、

(v) 次の意味で functorial: 任意の varieties X, Y と、 $z \in CH^{p+1}(X \times Y)$ に対し、abelian variety homomorphism

$$[z]: J^{m-g}(X) \longrightarrow J^p(Y) \quad (m = \dim X)$$

定義より

$$\begin{array}{ccc} A^{m-g}(X) & \xrightarrow{z(?)} & A^p(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ J^{m-g}(X) & \xrightarrow{[z]} & J^p(Y) \end{array}$$

が可換となる。縦の maps は, (iv) の同型から定まるもの, 上の横の矢は, $A^{m-g}(X) \ni x \mapsto \pi_Y(x \times Y, Z) \in A^p(Y)$ ($\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ は射影)。この時 $J^p(X)$ (及び $K^p(X)$) は intermediate Jacobien の理論を定めるといふ。

彼は, 更に $k = \mathbb{C}$ のとき Weil (or Griffiths) intermediate Jacobian $T^p(X) (\cong H^{2p-1}(X; \mathbb{R}) / H^{2p-1}(X, \mathbb{Z})$ real torus として) から次の様にして intermediate Jacobian の理論をつくれることを示した。Weil homomorphism

$$w: \{\text{cycles of intimp, homologically equivalent to zero}\} \rightarrow T^p(X)$$

が "積分" により定まるが, この image は $T^p(X)$ の abelian subvariety $J^p(X)$ となる ($T^p(X)$ は Griffiths intermediate Jacobian 也)。w の制限により $v: A^p(X) \rightarrow J^p(X)$ を定義し, この kernel を $K^p(X)$ とすれば, (i) ~ (v) を充す (というより, 上の公理はこの一般化)。

Picard variety の dual は Albanese variety であり, さ

るに $(J^p(X))^\wedge \cong J^{m-p}(X)$ が、 $k=\mathbb{C}$ の時に成立する。これより $J^p(X)$ について duality $(J^p(X))^\wedge \cong J^{m-p}(X)$ が成立するか、が問題となる。Lieberman は Grothendieck の idea に基づいて $k=\mathbb{C}$ の時に、 $J^p(X)$ を使って duality が up to isogeny で成立する理論がつけられること、一般の k に対しても同様の性質をもつ abelian variety が isogeny class の意味で定まることを示した。その方法をよく見ることにより一般の k に対して、duality が up to isogeny で成立する intermediate Jacobian の理論があることがいえる。さらに、それに対して (iv) より定まる

$$B: (H^{p,q}(X \times Y)) \rightarrow \text{Hom}(J^{m-q}(X), J^p(Y))$$

について、 $B \otimes \mathbb{Q}$ は surjection である。

X, T を varieties とし $\text{map } f: T \rightarrow (H^p(X))$ は、 $z \in (H^p(T \times X))$ があり、 $f: T \ni t \mapsto z(t) \in (H^p(X))$ と書ける時 algebraic family といい。特に一点 $t_0 \in T$ で $f(t_0) = 0$ ならば $f: T \rightarrow A^p(X) \subset (H^p(X))$ と考えられる。一般の algebraic family f の代りに、 $f - f(t_0)$ を考えれば、値は $A^p(X)$ にあるとしてよい。

A を abelian variety とし、group homomorphism $h: A^p(X) \rightarrow A$ は、任意の algebraic family $f: T \rightarrow A^p(X)$ に対して、

$$\text{hof. } T \longrightarrow A^1(X) \longrightarrow A$$

か、morphism of varieties τ がある時、regular τ があると言われる。

例 $\beta=1: P \in X$ の Picard variety と $\beta \in CH^1(P \times X)$ を Poincaré divisor とする。

$$P \ni x \mapsto \beta((x) - (o)) \in A^1(X)$$

は、同型 τ との逆写像 $\theta^0: A^1(X) \xrightarrow{\sim} P$ は regular であり、任意の abelian variety A に対して、

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{abl}}(P, A) & \longrightarrow & \{\text{regular homomorphisms } A^1(X) \rightarrow A\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f & \longrightarrow & f \circ \theta^0 \end{array}$$

は bijection.

$k = \dim X = m: \theta^{(m)}: A^m(X) \longrightarrow \text{Alb}(X)$ を自然な homomorphism とする。これは regular homomorphism である。任意の abelian variety A に対して、

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\text{Alb}(X), A) & \longrightarrow & \{\text{regular homomorphisms } A^m(X) \rightarrow A\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f & \longrightarrow & f \circ \theta^{(m)} \end{array}$$

は bijective. $m=2$ の時、 $k=\mathbb{C}$, $b_2 > 0$ ならば、 $\theta^{(2)}$ は同型ではなく、kernel が大きいことから、又 $b_2=0$ の X の general type ではないならば、 $\theta^{(2)}$ は同型であることが知られている。

regular homomorphisms 全体 $\mathcal{H}$ の class の homomorphisms
を考へる。Homomorphism $h: A^p(X) \rightarrow A$ は, 適当な var-
iety Y と $z \in CH^{m-p+1}(X \times Y)$ ($m = \dim X$) があつて, $A \subset \text{Pic } Y$
(Y の Picard variety) となつてゐる (i.e. A は $\text{Pic } Y$ の abelian
subvariety), $A^p(X) \xrightarrow{z^{(p)}} \text{Pic } Y (\cong A'(Y))$
 $\searrow h \quad \nearrow$
 A

が可換となるとき, Picard homomorphism といふ。

Picard homomorphism は, regular homomorphism である。

例. $p=1, X=Y, z=\Delta_X \in CH^m(X \times X)$: diagonal とし, $A=P \in X$ の
Picard variety とし, この例の $\theta^{(1)}: A^1(X) \rightarrow P$ は,
Picard homomorphism. $p=m=\dim X$ について, P は上の
とあつて, $\beta \in CH^1(P \times X)$ を Poincaré divisor とする時,
 β は, $\theta^{(m)}: A^m(X) \rightarrow \text{Pic}(P) \cong \text{Alb } X$ を導く。従つて
 $\theta^{(m)}$ は Picard homomorphism となる。

Variety X と, 整数 p を固定し,

$$K^p(X) = \bigcap \text{Ker}(A^p(X) \xrightarrow{h} A)$$

(Abelian variety A と Picard homomorphism h を動かす) と置
き, $K^1(X) = \frac{1}{p} K^p(X)$ を考へる。 $K^1(X)$ は X 上の cycles
全体に adequate equivalence relation を定義する。

$K^1(X) = 0$ とあつて, $A^m(X)/K^m(X) \cong \text{Alb}(X)$ が導かれる。

れた同型, $m = \dim X$) が成立する。Picard homomorphisms

$h: A^p(X) \rightarrow A$, $k: A^p(X) \rightarrow B$ に対して,

$$(h, k): A^p(X) \ni \tau \longmapsto (h(\tau), k(\tau)) \in A \times B$$

は Picard homomorphism である。 $h: A^p(X) \rightarrow A$ は Picard homomorphism であり $B \subset A$ は abelian subvariety, 更に map $k: A^p(X) \rightarrow B$ があり, $h: A^p(X) \xrightarrow{k} B \subset A$ と分解された時, k も $\times$ Picard homomorphism である。

Prop X と p を固定した時 abelian variety P と Picard homomorphism $\theta^{(p)}: A^p(X) \rightarrow P$ であり, 任意の abelian variety A に対して

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}(P, A) & \longrightarrow & \{\text{Picard homomorphisms } A^p(X) \rightarrow A \text{ 全体}\} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \theta^{(p)} \circ \varphi \\ \varphi & \longrightarrow & \theta^{(p)} \circ \varphi \end{array}$$

が全単射となるものが存在する。この $\mathbb{P}(\text{all } \theta^{(p)})$ は, 同型を除いて一意的である。

自然数 k と, algebraic family $f: P \rightarrow A^p(X)$ があって

$$k_P: P \xrightarrow{f} A^p(X) \xrightarrow{\theta^{(p)}} P$$

は, “ k 倍” となる。 $\theta^{(p)}$ は 同型 $A^p(X)/K^p(X) \cong P$ を導く。

$K^p(X)$ は $CH^p(X)$ の中で incidence-equivalent to zero である codimension p の cycles 全体に等しい。

Cor $\perp$ の P を $J^P(X)$ と書くと, $J^P(X)$ と $K^P(X)$ は

intermediate Jacobian の公理を満たす。

$h: A^P(Y) \rightarrow A$ が Picard homomorphism で $z \in (H^{P+1}(X \times Y))$
 $(m = \dim X)$ の時, $A^{m-1}(X) \xrightarrow{z(?)} A^P(Y) \xrightarrow{h} A$ は Picard homomorphism であることに注意する。 $A = J^P(Y)$, $h = \theta^{(P)}$
 として Prop. より $[z] \cdot J^{m-1}(X) \rightarrow J^P(Y)$ で $[z] \circ \theta^{(m-1)} = \theta^{(P)} \circ z(?)$
 となるものが一意的に存在することから分る;
 よって "公理" の (V) がいえる。他は明白。従って
 Cor は Prop. より導かれる。

任意の regular homomorphism $h: A^P(X) \rightarrow A$ に対して,

(i) $\text{Im}(h)$ は A の abelian subvariety B であり

(ii) $u \in CH^P(B \times X)$ と自然数 k があり

$$B \xrightarrow{u(?)} A^P(X) \xrightarrow{h} A$$

は k 倍の写像 $B \xrightarrow{k} B \subset A$ であることに注意する。

Lemma 任意の Picard homomorphism $h: A^P(X) \rightarrow A$ に

対して, $\dim \text{Im}(h) \leq \dim H^{2m-2P+1}(X)$, $m = \dim X$, $H^*(X)$

は L-adic étale cohomology. (check)

T, X が varieties の時, $z \in (H^1(T \times X))$ で $z(?) \cdot T \rightarrow (H^1(X))$

が zero の時 z が induce する $H^*(X) \rightarrow H^*(T)$ が zero になる

ことに注意する。 h は surjection としてよく variety Y

$u \in H^{m-1}(X \times Y)$ があリ, $i: A \hookrightarrow \text{Pic } Y$ とする。こ
 て, $\text{Pic } Y = A^1(Y)$ とする時, $\tau \circ h = u(?)$. Lemma の前の注意
 から自然数 r と $z \in H^p(A \times X)$ があリ, $u \circ z = \beta \circ i \circ r_A$.
 但し $r_A: A \xrightarrow{r} A$, i は morphism の graph を cycle と考えた
 ので 等号は, $\text{map } A \rightarrow A^1(Y)$ の意味である。更
 に $\beta \in H^1(\text{Pic } Y \times Y)$ は Poincaré divisor 上の注意より
 $H^*(Y) \rightarrow H^*(A)$ として $\tau \circ z \circ u = r_A^* \circ i^* \circ \beta$. $n = \dim Y$ とし
 $H^{2n-1}(Y) \rightarrow H^1(A)$ と考えると $r_A^* \circ \beta$ は同型, i^* は surjection
 故 $\tau \circ z$ も surjection: $\tau \circ z: H^{2n-2p+1}(X) \rightarrow H^1(A)$ と $\dim H^1(A) = 2 \dim A$.

Surjective Picard homomorphism $h: A^p(X) \rightarrow A$ の中で $\dim A (\leq$
 $\frac{1}{2} \dim H^{2n-2p+1}(X))$ が最大のものを一つ選べ, $h: A^p(X) \rightarrow A$
 とする。自然数 N があリ, 任意の surjective Picard
 homomorphism $k: A^p(X) \rightarrow B$ と $\pi: B \rightarrow A$ で, $\pi \circ k = h$ とあ
 るものに対して,

$$\deg \pi \leq N.$$

$u \in H^p(A \times X)$ で $r_A: A \xrightarrow{u(?) } A^p(X) \xrightarrow{h} A$ なるものが存在す
 る, 但し r は自然数。すると,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{k \circ u(?)} & B \\ & \searrow r_A & \downarrow \pi \\ & & A \end{array}$$

は可換である。 A と h のとり方より π は iso-

geng τ 有 γ . ν_A , 從 τ $\text{kon}(\tau) \neq \gamma \cup \tau$,

$$N := \deg(v_A) = \deg(\pi \circ (k \circ u(?))) = \deg \pi \cdot \deg(k \circ u(?)) \geq \deg \pi$$

$\deg \pi$ が最大となる B と k をとり, $\forall k \in P$ と B^k とすると, (E, B^k) は Prop. の条件を満たす, i.e. (★) は全単射。Prop. の他は容易に解る。

注意 このような P の存在は $k = \mathbb{C}$ の時 Lieberman が $J^P(X)$ を使って示した。

Prop. の中の長 ≥ 0 を最小にする $f \in (H^p(P \times X))$ となる $f \in (H^p(X \times P))$ を、順序の入れ替え $X \times P \Rightarrow P \times X$ による f の像とすると、 tf は

$$\lambda = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot J^{n-r+1}(X) \longrightarrow J'(J^r(X)) = (J^r(X))^\wedge$$

を定義する。 β は一意的に決まるないが、 λ は一意的に決まる。 更に λ は isogeny (Lieberman; $k = \mathbb{C}$ の時に示しているが一般の時も同じ)。

(V) $1 \leq j \leq r$, $X, Y \in \text{varities}$, $m = \dim X$ & $n \geq m$.

$$B: (H^{p+q}(X \times Y)) \longrightarrow \text{Hom}(J^{m-p}(X), J^p(Y))$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$Z_1 \longrightarrow Z$$

$$\text{In} \rightarrow \text{[Z]}$$

が定義されて, group homomorphism となる。

Prop $B \otimes \mathbb{Q}$ は surjection で"あり, 従って,

B の cokernel は有限群。

一般には X, Y, p, q に関係した自然数 N と

$$\Gamma: \text{Hom}(J^{m-q}(X), J^p(Y)) \longrightarrow CH^{p+q}(X \times Y)$$

があり $B \circ \Gamma = N(N倍)$ とすることを示せばよい。

$X=Y$ が abelian variety で $p=m, q=m-1$ の場合に帰着させる。この時には, $c \in H^{m-1}(X)$ で

$$\tilde{X} \simeq A^1(X) \ni x \longmapsto c \cdot x \in A^m(X) \xrightarrow{\text{標準的}} J^m X = X$$

が isogeny となるものが存在することより, Γ 及び N の存在が分る。

注意 B は X, Y について functorial である。

$k=\mathbb{C}$ の時を考える。 $J^p_2(X)$ から $J^p(X)$ (Prop 1 のようにして定めた) への homomorphism π^p_X が自然に定まる。

$$\pi^p_X: J^p_2(X) \longrightarrow J^p(X)$$

は, $p=1, \dim X$ の時, 同型であるが, X が abelian variety ならば任意の p について π^p_X が isogeny であることが知られている。さらに,

Prop. (i) X が dimension d の abelian variety を complete intersection として含む variety ならば, $2p-1 \leq d$ なる p に対して, π^p_X は isogeny.

(ii) 固定した p について, π^p_X が $\dim X = 2p-1$ なる任意の variety について isogeny ならば,

π_X は任意の $q \leq p$, 任意の variety X について isogeny となる。

注意 (ii) によって, π_X が isogeny かどうかは $\dim X = 2p-1$ なる X について (p は固定して), 言われるべき。Griffiths はこれが肯定的であるという announce をしている。

例. 余り多くのことは知られていない。任意の k について, X が $\mathbb{P}^n$ の complete intersection で $\dim = m$ の時 m が偶数であるか, m が奇数で $m \neq 2p-1$ であるかは $J^p(X) = 0$.

$\text{char } k \neq 2$ の時 X が cubic 3-fold ならば $A^2(X) \cong J^2(X)$ (Murre) さらに, 一般に X が fibre が $\mathbb{P}^{2n}$ の中 n quadric と同型の morphism $X \rightarrow \mathbb{P}^2$ を持つ時 $A^{n+1}(X) \cong J^{n+1}(X)$ (Beauville) であり, これらは Prym variety になる。

$k = \mathbb{C}$ のとき general abelian variety X に対して $J^p X$ と X は isogeny である。

Lieberman, D. I; Intermediate Jacobian, Algebraic Geometry Oslo 1970

———; Higher Prym varieties, Am. J. Math 90, p. 1066.