

ヒルベルト空間の連続場とそのフォン・ノイマン環 のテンソル積への応用

東北大 教養 武元英夫

1. 序論. 本講演では, hyperstonean space 上のヒルベルト空間の連続場を考える. 特に, $\{H(\omega) : \omega \in \Omega\}$ で $H(\omega) = K$ for $\forall \omega \in \Omega$ になるものを考えていく. [14] で, AW^* -module の特殊化として表現されるヒルベルト空間の連続場を与えているが, ここで考えることは constant field について考える. [14] のものは $C(\Omega)$ に値をとる内積が考えられているが, ここでは, その様な性質が争がらないが, 同じ様な性質が言えることがわかる.

本講演では次の様な記号, 概念を通して使っていく.

Ω ; hyperstonean space, K ; Hilbert space,

$C(\Omega, K) = F$; Ω 上 K -valued continuous function 全体からなる Banach space.

そのとき, 我々は, F に関する weakly continuous constant field of K over $H = W_F(\Omega, K)$ が定義される. ここで, H は $C(\Omega)$ -moduled Banach space となる. 今, $B(H)$ を H 上の

bounded $C(\Omega)$ -module homomorphism 全体の集合とすると, $B(H)$ は type I の von Neumann algebra になることがわかる (定理 B).

応用として, $\mathcal{A} = C(\Omega)$ とおくと, $\mathcal{A}$ は von Neumann algebra である. 今, $\mathcal{R}$ を K 上に act している von Neumann algebra とすると, $\mathcal{R} \otimes \mathcal{A} = W(\Omega, K, \mathcal{R})$ となる. ここで, $\mathcal{R} \otimes \mathcal{A}$ は $\mathcal{R}$ と $\mathcal{A}$ の W^* -tensor product であり, $W(\Omega, K, \mathcal{R}) = \{A \in B(H) : A\omega \in \mathcal{R} \text{ for } \forall \omega \in \Omega\}$ を表わしている.

上の事は, 今 $\mathcal{A} = L^\infty(\Omega_0, \mu)$ として表現しておき, $\mathcal{R}$ が separable Hilbert space K 上 act しているとき, $\mathcal{R} \otimes \mathcal{A} = L^\infty(\Omega_0, \mu, \mathcal{R})$ という Sakai [10; Theorem 1.22.13] の結果を $\mathcal{R}$ の separability の条件なしで, 表現が出来ることを言っている.

本講演での主な参考文献は Kaplansky's paper [5] と講演者の結果 [14], [15] によるところが多い. ここで, 一つ一つの結果について証明をつけるには紙面が少なすぎるので, 主な結果について概略をつけるにとどめる.

2. ヒルベルト空間の Constant field.

最初に, 次の定義を導入する.

定義 1. $H(\omega) = K$ for $\forall \omega \in \Omega$, $\xi = \{\xi(\omega)\} \in \prod H(\omega)$ が F に関して weakly continuous vector field であるとは次の二つの性質を満たすときである.

(1) the function: $\omega \rightarrow \|\xi(\omega)\|$ が Ω 上で "有用" である。

(2) $\forall \eta \in F$ に對して, $\omega \rightarrow (\xi(\omega) | \eta(\omega))$ が Ω 上で連続である。

F に對して, weakly continuous vector fields 全体の集合を $W_F(\Omega, K)$ (又は単に $W(\Omega, K)$) とおき, ξ を K の weakly continuous な constant field over Ω と呼ぶことにする。

上の定義で, $\xi \in H = W(\Omega, K)$ に對して, $\|\xi\| = \sup\{\|\xi(\omega)\| : \omega \in \Omega\}$ とおくと, norm $\|\cdot\|$ で H が $C(\Omega)$ -moduled Banach space になることは, 簡単な計算でわかる。

次の概念を引入しておく, $\forall \xi, \eta \in H$ に對して,

$$(\xi, \eta) : \omega \rightarrow (\xi(\omega) | \eta(\omega)), \quad |\xi| : \omega \rightarrow \|\xi(\omega)\|.$$

すると, 一般には $(\xi, \eta), |\xi|$ は $C(\Omega)$ の元とは限らない。

しかし, $\xi \in F$ ならば $(\xi, \eta), |\xi| \in C(\Omega)$ となっている。

逆に, $\xi \in H$ であって, $|\xi| \in C(\Omega)$ ならば, $\xi \in F$ になることは簡単な計算で示すことができる。

すると, 我々は次の簡単であるが, 有用である結果を示すことができる。

補題 2. $\xi \in H = W(\Omega, K)$ に對して, $C(\Omega)$ の元からなる mutually orthogonal projections の maximal family $\{e_i\}$ が存在して, $e_i \xi \in F$ for $\forall i$ となる。

証明, $\{\bar{\eta}_\alpha\} \in K$ での一つの c.n.o.s. とする。あると、各 ω に對して $\xi(\omega) = \sum f_\alpha(\omega) \bar{\eta}_\alpha$, $\|\xi(\omega)\|^2 = \sum |f_\alpha(\omega)|^2$ となる。
 ところで、 H の定義より、 $\forall \eta \in F$ に對して、 $\omega \rightarrow (\xi(\omega) | \eta(\omega))$ が連続であることと考えると、各 f_α は $C(\Omega)$ の元となる。更に、 $\omega \rightarrow \|\xi(\omega)\|$ は下に半連続である。そのとき、hyperstonean space の性質を考えると、 $C(\Omega)$ での mutually orthogonal projections の maximal family $\{e_i\}$ が存在して、 $\omega \rightarrow \|e_i \xi(\omega)\|$ が continuous となる。すると、 $e_i \xi \in H$ であるから、 $e_i \xi \in F$ for all i が成立する。

補題2 の形を承えて次の様な性質が簡単にわかる。即ち、
 $\xi \in H$, $\{e_i\} \subset C(\Omega)$: orthogonal projections, $\sum e_i = I$
 $\Rightarrow \|\xi\| = \sup_i \|e_i \xi\|$.

補題2 の系として、我々は次の結果をもつ。

系 3. $\xi \in F = C(\Omega, K)$, $\{\bar{\eta}_\alpha\}_{\alpha \in A}$: K での一つの c.n.o.s.
 $\Rightarrow \exists \{f_n\} \subset C(\Omega)$, $\exists \{\bar{\eta}_n\} \subset \{\bar{\eta}_\alpha\}_{\alpha \in A}$: $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \bar{\eta}_n$
 ところで $\eta_n \in F$ は $\bar{\eta}_n$ による constant field である。即ち、
 $\eta_n(\omega) = \bar{\eta}_n$ for $\forall \omega \in \Omega$ ということである。

以上のことを考へると、我々は次の結果をもつ。即ち

$A, B \in B(H)$ であつて $A|_F = B|_F$ ならば $A = B$ である。

更に、ヒルベルト空間上で成立している Riesz's theorem に似た結果を示すことが出来る。この証明は [14; Theorem 3.6] と同様に示す。

補題 4. $\phi : H = W(\Omega, K) \rightarrow C(\Omega)$, bounded $C(\Omega)$ -module, homomorphism

$\Rightarrow \exists \xi_0 \in H ; \phi(\xi) = (\xi, \xi_0) \text{ for } \forall \xi \in F, \|\phi\| = \|\xi_0\|.$

上の結果で、 $\xi \in H$ で $\{e_\alpha\} \subset C(\Omega)_p$ と $\sum e_\alpha = I, e_\alpha \xi \in F$ としておく。 $\phi(\xi) = \sum e_\alpha (e_\alpha \xi, \xi_0)$ となる。更に、 $\|\phi\| = \|\phi|_F\|$ でもあると同じく、 $A \in B(H)$ に対して、 $\|A\| = \|A|_F\|$ でもある。補題 4 から、我々は、 AW^* -module に属する主要な性質であつた次の結果を示すことが出来る。

命題 5. $\{\xi_\alpha\} \subset H = W(\Omega, K) : \text{bounded set}, \{e_\alpha\} \subset C(\Omega) :$

mutually orthogonal projections a family, $\sum e_\alpha = I$

$\Rightarrow \exists \xi \in H : e_\alpha \xi = e_\alpha \xi_\alpha \text{ for all } \alpha.$

上の ξ を $\xi = \sum e_\alpha \xi_\alpha$ とかくことにある。すると、補題 4 と命題 5 を考へて、 $A \in B(H)$ に対して、Adjoint operator が

定義できることがわかる。まず、補題4から、 $A \in B(H)$ に対して、 $\exists A^* : F \rightarrow H$, bounded $C(\Omega)$ -module homomorphism.

$$(A\xi, \eta) = (\xi, A^*\eta) \quad \text{for } \forall \xi, \eta \in F.$$

更に、命題5を养之ると、 A^* は $B(H)$ の元として、一意に拡張される。これを A^* とかいて、 A の adjoint operator と呼ぶことにする。すると、我々は、簡単な計算で、 $\|A\| = \|A^*\|$, $\|A\|^2 = \|A^*A\|$ を示すことが出来る。これから、まず、 $B(H)$ が C^* -algebra になるということがわかった。後で、 $B(H)$ は type I の von Neumann algebra になることを示す。

上の事を养之るために、我々は次のような事柄を考之る。

$M \subseteq H = W(\Omega, K)$ の closed submodule とする。そのとき、

[15; Proposition 1.3] と同じ方法で、各 $\omega \in \Omega$ に対して $(m \cap F)(\omega)$ が K の closed subspace になることが示される。これから、我々は次の概念を導入する。

定義6. $M : H$ の closed submodule. $m_\omega = M \cap F_\omega$.

M が H の continuous submodule であるとは、次の性質(*)が満足されることである。

(*) $\xi \in \Pi m_\omega(\omega) \Rightarrow \omega \rightarrow \|\xi(\omega)\| : \text{有界}, \forall \eta \in m_\omega \Rightarrow \omega \rightarrow (\xi(\omega) | \eta(\omega)) \text{ が連続} \Rightarrow \xi \in M$

定義 6 によって定まる continuous submodule と projection との間
の関係について述べておこう。

補題 7. $A \in B(H)$ に対して, K 上の有界作用素からなる場
 $\{A(\omega)\}$ が存在して, 次の性質が満たされる. $\{A\xi(\omega)\} = \{A(\omega)\xi(\omega)\} \in H$
for $\forall \xi \in F$ and $\omega \in \Omega$. 逆に, $\{A(\omega)\}$ と上の性質を満たす場とする
(これを weakly continuous field と呼ぶ) と, $A \in B(H)$ が存在して
 $(A\xi)(\omega) = A(\omega)\xi(\omega)$ for $\forall \xi \in F, \omega \in \Omega$ が成立する。

上の事から, 次の事柄が簡単な計算で示される。

$A, B \in B(H)$, $\xi \in F$ に対して, 次の性質を満たすように, nowhere
dense set が存在する. $(AB)(\omega)\xi(\omega) = A(\omega)B(\omega)\xi(\omega)$ for $\forall \omega \in \Omega \setminus N$.

更に, $A(\omega)^* = A^*(\omega)$ for $\forall \omega \in \Omega$ が示される。

以上より, 次が示される。

補題 8. M : continuous submodule, $M_0 = M \cap F$,

$P(\omega): K \rightarrow M_0(\omega)$, projection.

$\Rightarrow P = \{P(\omega)\}$: weakly continuous, $PH = M$.

補題 9. M : continuous submodule, $M_0 = M \cap F$

$\Rightarrow$ 次の性質が成る。

(1) $\{\xi_\alpha\}$: bounded set in M , $\{e_\alpha\}$: maximal family of orthogonal projections in $C(\Omega)$, この時, $\xi = \sum e_\alpha \xi_\alpha$ は M の元である。

(2) $M_0 = M \cap F$ とすると, すべての $\omega \in \Omega$ に対して, $M(\omega) = M_0(\omega)$ が成立する。

補題 8.9 から, M が continuous submodule ならば $H \rightarrow M$ の projection と, 次の性質(**) をもつことがわかった。

(**) M が H の closed submodule である, 次の性質を満す。
 $\{\xi_\alpha\} \in M$ の bounded subset とし, $\{e_\alpha\} \in C(\Omega)$ の maximal family of orthogonal projections とした時, $\xi = \sum e_\alpha \xi_\alpha$ は M の元となる。

M が continuous submodule の時, (**) を満たしていることは補題 9 でわかっていゝ。更に, $P \in B(H)$ が projection ならば, $M = PH$ も (**) を満すことが簡単な計算でわかる。逆に, closed submodule M が (**) を満すならば, projection P が存在して, $PH = M$ になることが次の補題で示される。この証明には教面を多く必要とするので証明は除く。

補題 10. M : closed submodule of H , この時, 次は同値。

(1) M が (**) を満す。

(2) projection P が存在して, $PH = M$ となる。

次に、補題9の逆を示そう。

補題11. M : closed submodule, $M_0 = M \cap F$.

M は $(*)$ を満たし, $M(\omega) = M_0(\omega)$ for $\forall \omega \in \Omega$

$\Rightarrow M$ は continuous submodule である。

証明.

$\xi = \{\xi(\omega)\} \in \prod M_0(\omega)$ を次の性質を満たすものとする。

• $\omega \rightarrow \|\xi(\omega)\|$: bounded, • $\forall \eta \in M_0$ に對して, $\omega \rightarrow (\xi(\omega)/\eta(\omega))$

が continuous である。

その時, $\xi \in M$ になることを示せばよい。

$\xi(\omega) \in M_0(\omega)$ for $\forall \omega \in \Omega$ である。また, $\forall \eta \in M_0$ に對して, $\omega \rightarrow (\xi(\omega)/\eta(\omega))$

が continuous であるから, $\omega \rightarrow \|\xi(\omega)\|$ は下に半連続となる。

従って, $C(\Omega)$ の projections からなる $\sum e_\alpha = I$ の family $\{e_\alpha\}$ が存在

して次の性質を満たす、即ち, $\omega \rightarrow \|(e_\alpha \xi)(\omega)\|$ は連続である。

すると, $e_\alpha \xi \in M_0$ となり, M が $(*)$ を満たすことより, $\xi' = \sum e_\alpha \xi_\alpha$

は M の元となる。そこで, 仮定から, $M(\omega) = M_0(\omega)$ for $\forall \omega \in \Omega$

であることと, $\xi(\omega) = \xi'(\omega)$ for $\forall \omega \in U G_\alpha$ である。ここで, G_α は

e_α に對する Ω の clopen set である。そこで, $U G_\alpha$ が dense

であることと, $\forall \eta \in M_0$ に對して, $\omega \rightarrow (\xi(\omega) - \xi'(\omega)/\eta(\omega))$ が連続

であることより, $\xi(\omega) = \xi'(\omega)$ for $\forall \omega \in \Omega$ となる。従って, $\xi = \xi'$

となる。従って, $\xi \in M$ となる。従って, M は continuous submodule となる。

以上をまとめると、次の定理を得る。

定理 A. M : closed submodule, $M_0 = M \cap F$.

(1) 次は同値

(a) M が $(**)$ を満たす。 (b) $\exists p$: projection of H onto M .

(2) 次は同値

(a') M が continuous submodule である。

(b') M は $(**)$ を満たし、 $M(\omega) = M_0(\omega)$ for $\forall \omega \in \Omega$ が成立する。

次に、 $B(H)$ が center を $C(\Omega)$ とする type I von Neumann algebra となることを示した。これには、 $\mathbb{R}$ の abelian projection を決定する補題を必要とする。

補題 12. $\eta \in H$ が次の性質を満たす元とする。

$\exists \{e_\alpha\} \subset C(\Omega)$: orthogonal projections, $\sum e_\alpha = e$, $e_\alpha \eta = e_\alpha$, $(I - e) \eta = 0$

すると、 $P\xi = (\xi, \eta)\eta$ for $\forall \xi \in F$ によって定まる operator P は abelian projection となる。逆に、すべての abelian projection は上の形で決定される。

定理 B. $B(H)$ は center を $C(\Omega)$ とする type I von Neumann algebra となる。

証明. $B(H)$ の center が $C(\Omega)$ になることは明らかである。更に、補題 12 を用いると、 $B(H)$ が abelian projection を充分含むことを示すことが出来る。そこで、 $B(H)$ が AW^* -algebra になることが示され、 $B(H)$ は center が von Neumann algebra である type I AW^* -algebra であるから、Kaplansky [4; Theorem 2] によって、 $B(H)$ が type I von Neumann algebra であることがわかる。そこで、 $B(H)$ が AW^* -algebra になることを示そう。さらに、[5], [7] からわかるように、 $\mathcal{R}$ のことを示せばよい。

$\mathcal{F} \subset B(H)$: any subset, $\mathcal{L}(\mathcal{F})$: $\mathcal{F}$ の left annihilator

$\Rightarrow \exists P \in B(H)$: projection, $\mathcal{L}(\mathcal{F}) = B(H)P$.

上のことを示せばよい。 $B \in B(H)$ に對して、 $\mathcal{R}(B)$ は B の range であるとして、 $\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \{A \in B(H) : A\mathcal{R} = \{0\}\}$ である。そこで、 $\mathcal{R} = \bigcup \{\mathcal{R}(B) : B \in \mathcal{F}\}$ である。今、closed submodule $\mathcal{M}$ を $\mathcal{R}$ 同様にする。

$\mathcal{M}$ = the norm closure of $\{\sum e_i \xi_i : \{\xi_i\} \subset \mathcal{R} : \text{bounded}, \{e_i\} \subset C(\Omega) : \text{orth.}\}$

すなわち、[15] で示されていることより、 $\mathcal{M}$ は定理 A で述べられていた性質 (**) を満足している。従って、定理 A より、 $\mathcal{M}$ 上の projection Q が存在する。 $\mathcal{R}$ と $\mathcal{M}$ の性質より、明らかに $\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \{A \in B(H) : A\mathcal{M} = \{0\}\}$ であるから、 $P = I - Q$ とおくと $\mathcal{L}(\mathcal{F}) = B(H)P$ となる。故に、 $B(H)$ は type I von Neumann algebra である。よって center は $C(\Omega)$ となる。

3. The weakly continuous constant field of von Neumann algebra. $\Sigma = \Sigma'$ は、序論で述べた $\Sigma = \Sigma'$ の問題について考える。前の section で $A \in B(H)$ に對して、 K 上の bounded operators からなる field $\{A(\omega)\}$ が存在して、 $\forall \xi \in F, \omega \in \Omega$ に對して、 $(A\xi)(\omega) = A(\omega)\xi(\omega)$ になることを示した。ここで、 $\pi_\omega \in B(H)$ から $B(K)$ の map. Σ' $\pi_\omega(A) = A(\omega)$ とすると、 π_ω は positive linear mapping となる。したがって、[12], [13] からわかるように π_ω は $*$ -homomorphism にはならない。

定義 13. $H = W(\Omega, K)$: weakly continuous constant field of K .

$\sigma : K$ 上に act してゐる von Neumann algebra. Σ のとき、 $W(\Omega, K, \sigma) = \{A \in B(H) : A(\omega) \in \sigma \text{ for } \forall \omega \in \Omega\}$ とおき、 Σ は von Neumann algebra σ の constant field である。

また、 $W(\Omega, K, \sigma)$ が von Neumann algebra になることを示さなければならぬ。さらに、また、 $W(\Omega, K, \sigma)$ が $B(H)$ の C^* -subalgebra になることを、 $B(H)$ での double commutant $W(\Omega, K, \sigma)''$ が $W(\Omega, K, \sigma)$ と一致することを示せばよい。したがって、今、 π_ω が multiplicative であるから、 $W(\Omega, K, \sigma) \ni A, B$ に對して、 AB が $W(\Omega, K, \sigma)$ の元になることを示さなければならぬ。さらに、補題 7 の後で注意したことを用いることによって、示

すことができてゐる。これから示すから、 π_ω は positive linear mapping であるから、 $W(\Omega, K, \sigma)$ は C^* -subalgebra of $B(H)$ になることが簡単にわかる。更に、 $W(\Omega, K, \sigma)'' = W(\Omega, K, \sigma)$ になることは、 σ の元からなる constant field が $W(\Omega, K, \sigma)$ の元になることと、 $W(\Omega, K, \sigma)$ の定義より示すことができる。以上より、我々は次の定理を得る。

定理 C. $W(\Omega, K, \sigma)$ は von Neumann algebra である。

σ を K 上に act してゐる von Neumann algebra, $\mathcal{A} = C(\Omega)$ とし、 K と $\mathcal{A}$ の W^* -tensor product $\sigma \otimes \mathcal{A}$ が $W(\Omega, K, \sigma)$ と $*$ -isomorphism になることを示そう。その前に、 W^* -tensor product の解説をしておく。(see [6], [10], [11], [16] and [18])

σ, β は von Neumann algebra とし、 σ_*, β_* を示す。 σ, β の predual space とする。 d_0 は $\sigma \otimes \beta$ (σ, β の algebraic tensor product) 上の least C^* -cross norm とし、 d_0^* は d_0 の dual norm とする。そのとき、 σ と β の W^* -tensor product は $(\sigma_* \otimes_{d_0^*} \beta_*)^*$ で与えて定義する。今、 β が commutative von Neumann algebra $\mathcal{A}$ であるとき、 $d_0 = \lambda$, $\lambda^* = \gamma$ とする。そこで、 λ -norm, γ -norm は次の様に定義される。

定理 D. $\sigma \otimes \mathcal{A} \subset W(\Omega, K, \sigma)$ は $*$ -同型 $\mathcal{Z}$ がある。

証明 (略証). $W(\Omega, K, \sigma) \ni A = \{A(\omega)\}$ に対して $\mathcal{Z}, \sigma_* \otimes \mathcal{A}_*$ 上の linear functional $\hat{A}$ を定義しよう。 $\Xi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \psi_i \in \sigma_* \otimes \mathcal{A}_*$ に対して、

$$\hat{A}\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \psi_i\right) = \sum_{i=1}^n \psi_i(\langle A, \varphi_i \rangle)$$

ここで、 $\langle A, \varphi \rangle$ は連続関数 $\omega \rightarrow \langle A(\omega), \varphi \rangle$ を意味している。また

ここで、 $\hat{A}$ が well-defined になることは、 $(\sigma_*)^* = \sigma$ であることと、

[11; Lemma 1.2] からわかる。その時、

$$|\hat{A}(\Xi)| = \left| \sum_{i=1}^n \psi_i(\langle A, \varphi_i \rangle) \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|\varphi_i\| \cdot \|\psi_i\| \right) \|A\|$$

となる。従って、 $|\hat{A}(\Xi)| \leq Y(\Xi) \|A\|$ である。今、 $\lambda^* = Y$ である

から、 $\hat{A} \in (\sigma_* \otimes \mathcal{A}_*)^* = \sigma \otimes \mathcal{A}$ と考えらる。

逆に、 $\hat{A} \in \sigma \otimes \mathcal{A}$ の任意の元とすると、 $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in K$ に対して、

$$\exists R_{\bar{\xi}, \bar{\eta}} : \sigma \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \quad \alpha\text{-weakly continuous linear mapping.}$$

ここで、 $R_{\bar{\xi}, \bar{\eta}}(\hat{A})$ は $C(\Omega)$ の元であるから、for $\omega \in \Omega$ に対して

次の様に K 上の bounded bilinear form を考えよう。

$$\langle \bar{\xi} | \bar{\eta} \rangle = R_{\bar{\xi}, \bar{\eta}}(\hat{A})(\omega)$$

すると、 $\exists \{A(\omega)\} : (A(\omega) \bar{\xi} | \bar{\eta}) = R_{\bar{\xi}, \bar{\eta}}(\hat{A})(\omega)$ for $\forall \bar{\xi}, \bar{\eta} \in K, \omega \in \Omega$

そのとき、補題 2 の系より、 $A = \{A(\omega)\} \in B(H)$ であることがわかる。

更に、 $\sigma = (\sigma')'$ という性質から、 $A(\omega) \in \sigma$ for $\forall \omega \in \Omega$ 。

従って、 $A \in W(\Omega, K, \sigma)$ になることがわかる。更に、上の対応

で証明から簡単にわかることは、 $\|A\| = \|\hat{A}\|$ となっている。

$$\pi : W(\Omega, K, \sigma) \ni A \rightarrow \tilde{A} \in \sigma \otimes \mathcal{A}$$

such that, for $\forall \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \psi_i \in \sigma_* \otimes \mathcal{A}_*$

$$\tilde{A}(\sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \psi_i) = \sum_{i=1}^n \psi_i(\langle A, \tilde{\varphi}_i \rangle)$$

とあると、 π が上の isometric $*$ -preserving linear mapping であることは簡単な計算でわかる。また、 π が multiplicative になることを示そう。それには、 $A, B \in W(\Omega, K, \sigma)$, $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in K$ に対して、 $R_{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}}(\tilde{A}\tilde{B}) = R_{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}}(\tilde{A}\tilde{B})$ になることを示せばよい。

まず、 $\tilde{A} \in \sigma \otimes \mathcal{A}$, $\tilde{B} \in \sigma \otimes \mathcal{A}$ に対して、次の事実が示される。

$$(B(\omega)A(\omega)\tilde{\xi}|\tilde{\eta}) = ((BA)(\omega)\tilde{\xi}|\tilde{\eta}) \quad \text{for } \forall \omega \in \Omega, \tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in K$$

$$(A(\omega)B(\omega)\tilde{\xi}|\tilde{\eta}) = ((AB)(\omega)\tilde{\xi}|\tilde{\eta})$$

特に、 $R_{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}}(\tilde{A}\tilde{B}) = R_{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}}(\tilde{A}\tilde{B})$, $R_{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}}(\tilde{B}\tilde{A}) = R_{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}}(\tilde{B}\tilde{A})$ for $\forall \tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in K$ である。更に、 $B(\omega)A(\omega) = (BA)(\omega)$, $A(\omega)B(\omega) = (AB)(\omega)$ for $\forall \omega \in \Omega$ と示すことができることになる。

$\tilde{A}, \tilde{B} \in \sigma \otimes \mathcal{A}$, $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in K$ に対して、Sakai [10] であるように s^* -topology と表わすと、

$$\exists \{\tilde{A}_\alpha\} \subset \sigma \otimes \mathcal{A} : \tilde{A}_\alpha \rightarrow \tilde{A} \quad (s^*\text{-topology})$$

がある。 $(A_\alpha \tilde{\xi}, \eta) \rightarrow (A \tilde{\xi}, \eta)$, $R_{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}}(\tilde{B} \tilde{A}_\alpha) \rightarrow R_{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}}(\tilde{B} \tilde{A})$ (α -weak topology) である。 $\therefore$ $\tilde{\xi}(\omega) = \tilde{\xi}$, $\eta(\omega) = \tilde{\eta}$ である。前)に述べたことを用いると、

$$R_{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}}(\tilde{B} \tilde{A}_\alpha)(\omega) = (A_\alpha \tilde{\xi}, B^* \eta)(\omega) \quad \text{for } \forall \omega \in \Omega, \text{ である。}$$

今, $B^*\eta = \sum e_n \eta_n$ (補題 2) と表わし, G_n と e_n に対応する Ω の open set とする。このとき,

$$e_n(A_n \xi, B^*\eta) = (A_n \xi, \eta_n) \rightarrow e_n(A \xi, \eta_n) \quad (\alpha\text{-weak})$$

$$e_n R_{\xi, \eta}(\tilde{B} \tilde{A}_n) \Rightarrow e_n R_{\xi, \eta}(\tilde{B} \tilde{A}) \quad (\alpha\text{-weak})$$

$\therefore e_n R_{\xi, \eta}(\tilde{B} \tilde{A}) = e_n(A \xi, B^*\eta)$ である。そして, $\omega \in U G_n$ により,

$$R_{\xi, \eta}(\tilde{B} \tilde{A})(\omega) = (A \xi, \eta_n)(\omega) = (A \xi, B^*\eta)(\omega)$$

今, $\xi, \eta \in F$ であるから, $(A \xi, B^*\eta)(\omega) = ((A \xi)(\omega) | (B^*\eta)(\omega)) =$

$(A(\omega) \xi | B(\omega)^* \eta) = (B(\omega) A(\omega) \xi | \eta)$ for $\forall \omega \in \Omega$ である。更に,

$\exists N$: nowhere dense set, $((B A)(\omega) \xi | \eta) = (B(\omega) A(\omega) \xi | \eta)$ for $\forall \omega \notin N$.

そこで $(U G_n) \cap (\Omega \setminus N)$ が Ω で dense であることは, $R_{\xi, \eta}(\tilde{B} \tilde{A})$

が $C(\Omega)$ の元, $\omega \rightarrow ((B A)(\omega) \xi | \eta)$ が continuous function である

ことより, $R_{\xi, \eta}(\tilde{B} \tilde{A})(\omega) = ((B A)(\omega) \xi | \eta)$ for $\forall \omega \in \Omega$.

従って, $R_{\xi, \eta}(\tilde{B} \tilde{A}) = R_{\xi, \eta}(\tilde{B} \tilde{A})$ である。

以上から, π が multiplicative であることがわかり,

故に, π は $*$ -isomorphism である。

定理 D では nowhere dense set というものを成功的に扱っている。測度論 (ie. 積分表現) 的に考えれば, nowhere dense set は null-set に近似的に考えらるべきものである。そこで, そのような連続関数という考えの下で解消をしてみよう。

講演内容に必要なる文献

1. J. Dixmier; Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
2. _____; Summa Brasil Math., 2(1951), 151 - 182.
3. N. Dunford and B. Pettis; Trans. Amer. Math. Soc., 47(1940), 323 - 392.
4. I. Kaplansky; Ann. of the Math., 56(1952), 460 - 472.
5. _____; Amer. Journ. Math., 75(1953), 839 - 859.
6. Y. Misonou; Tohoku Math. Journ., 6(1954), 189 - 204.
7. C. Rickart; Ann. of the Math., 47(1946), 528 - 550.
8. K. Saito; Tohoku Math. Journ., 19(1967), 332 - 340.
9. S. Sakai; Bull. Amer. Math. Soc., 70(1964), 393 - 398.
10. S. Sakai; C*-algebras and W*-algebras, Springer-Verlag, 1971.
11. R. Schatten; Theory of cross-space, Princeton, 1950.
12. H. Takemoto; Tohoku Math. Journ., 21(1969), 152 - 157.
13. _____; Tohoku Math. Journ., 22(1970), 210 - 211.
14. _____; Michigan Math. Journ., 20(1973), 115 - 127.
15. _____; Decomposable operators in continuous fields of Hilbert spaces, to appear in Tohoku Math. Journ., 27 (1975),
16. M. Takesaki; Tohoku Math. Journ., 16(1964), 111 - 122.
17. J. Tomiyama; Pacific Journ. of Math., 30(1969), 263 - 270.
18. T. Turumaru; Tohoku Math. Journ., 6(1954), 208 - 211.