

Classical Combinatorics and Elliptic Curves with large rank over $\mathbb{Q}$ — Néron's method made explicit

立教大理 塩田 敬治

標題の前半は、現今の“combinatorics” と言うと、知らない筆者の立場を明らかにして、“combinatorics” の正体はどういう点にあるかについてある。一方では、この分野の発達の地が、19 世紀前半から中葉、後半にかけての、近代数学の揺籃期における代数方程式論への群の概念の導入 (Galois, Jordan, ...) や、幾何学における幾つかの特殊な場合の研究 (Cayley, Hesse, Steiner, ...) にあることを想起することは、必ずしも無意味ではなからうと考へたことによる。

即ち “classical combinatorics” の意義によって、algebra, geometry, arithmetic と密接に関連して生ずる combinatorial objects (概念) としている。この現象は、現代においても (あるいは、計算機化促進の現代こそ) かなり有効であるように思う。そしてその一例を提示してみようという次第である。

実は坂内氏からこのレジュメを話すようお招きを受けたときは、"Mordell-Weil lattices と Sphere Packings" について話そうと考えた。しかし、これについては '90 春の学会で話したこともあろう。そこでこの話を Introduction として、より立入った話を、或は証明を、すれば意義があるが、そういふ訳にはいかない。次に "Introduction to Mordell-Weil lattices" とでもいう題で、rank の比較的小さい、例えば A_2 と MWL とともに elliptic curves (or elliptic surfaces) について話そうと考えた。

代数幾何に不慣れな combinatorists も居るから、このようは易しい ^(か重要な) model をとって、MWL の定義と基本性質を解説することも、無意味ではなからう。

しかし、'90 秋の学会においても、MWL の理解を助けるために総合講演をする機会があった。その役、以前から一度本格的に聞いてみたいと知っていた "高 rank をもつ $\mathbb{Q}$ 上の elliptic curves" の構成についての Néron の方法を再考してみた。その結果、この難解とされていた Néron の満文が、実にすばらしい idea (代数幾何と整数論 2 双方に及ぶ) によっていて、これを MWL の視点から見直すと、"構成の puzzle 2" ^(可成り) おいしくなることが分かった。

Néron の方法は、(2次元)射影平面 $\mathbb{P}^2$ の中の 3 次曲線

と、その上の9個の点の配置についての幾何学的考察から出てくる。この状況は、はじめに述べた "classical combinatorics" の考察対象であった $\mathbb{P}^3$ 内の3次曲面上の27本の lines, または、 $\mathbb{P}^2$ 内の4次曲線の28本の double tangents, やそれらを含む所謂 del Pezzo 曲面の理論 (cf. Manin) において、はじめよく理解される^{性質の}ものである。このように標題の前身は、後章によって暗示しうるのである。

要旨. このような考察から標記の講演を行い、とくに終りに "rank ≥ 11 の $\mathbb{Q}$ 上の elliptic curves の 無限族" の実例の構成を示した。これは、6本では、(世界一)初めてのものである。rank ≥ 12 のものは、^(存在性)未だである。

講演を再録する6月号の全誌がそので、(後章の)詳細は文献を参照せよ。

— o —

Manin, Ju.: Cubic Forms (North Holland).

Néron, A.: Propriétés arithmétiques de certaines familles de courbes algébriques, Proc. ICM 1954, III.

Shioda, T.: Theory of MWL, Proc. ICM 1990 (to appear)

" : An infinite family of elliptic curves over $\mathbb{Q}$ with large rank via Néron's method, Preprint (1990)

1/24/91.