

最適解 — 点と値 —

岩本誠一 (九州大学・名誉教授), 木村寛 (秋田県立大学)

Seiichi Iwamoto (Professor Emeritus, Kyushu University),
Yutaka Kimura (Akita Prefectural University)

概要

本報告では、定数 $c (\in R^1)$ を含む 2 次計画問題を考え、その最適解を構成する最適点と最適値の関係を観る。すなわち、最小化および最大化それぞれの 2 次計画問題に対して、最適値が最適点の第 1 成分で定まることを示す。さらにこれらの結果は、評価関数を一般化しても成り立つことを示す。

1 最小化

まず、4 変数 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ の問題

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{k=0}^3 [(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2] \\ (P_4) \quad & \text{subject to} \quad (i) \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \\ & \quad \quad \quad (ii) \quad x_0 = c \end{aligned}$$

を考える [8-11]。ここに $c \in R^1$ とする。

補題 1 (P_4) の最小点を $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4)$ とすると、最小値 m_4 は

$$m_4 = c(c - \hat{x}_1)$$

である。事実、最小解は

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = \frac{c}{34} (13, 5, 2, 1), \quad m_4 = \frac{21}{34} c^2$$

である。さらに、最小点 (x_1, x_2, x_3, x_4) は

$$\sum_{l=k}^3 [(x_l - x_{l+1})^2 + x_{l+1}^2] = x_k(x_k - x_{k+1}) \quad 1 \leq k \leq 3 \quad (1)$$

も満たしている。

Proof. $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ を最小点とすると、 x は1階条件

$$-(c - x_1) + x_1 + (x_1 - x_2) = 0 \quad (\text{i})$$

$$-(x_1 - x_2) + x_2 + (x_2 - x_3) = 0 \quad (\text{ii})$$

$$-(x_2 - x_3) + x_3 + (x_3 - x_4) = 0 \quad (\text{iii})$$

$$-(x_3 - x_4) + x_4 = 0 \quad (\text{iv})$$

を満たす [1, 5]。まず、(iv) の両辺を x_4 倍すると

$$x_4^2 = x_4(x_3 - x_4).$$

よって

$$(x_3 - x_4)^2 + x_4^2 = (x_3 - x_4)^2 + x_4(x_3 - x_4) = x_3(x_3 - x_4)$$

が成り立つ。次に、これと (iii) より

$$\begin{aligned} (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 + (x_3 - x_4)^2 + x_4^2 &= (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 + x_3(x_3 - x_4) \\ &= (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 + x_3\{(x_2 - x_3) - x_3\} \\ &= x_2(x_2 - x_3). \end{aligned}$$

さらに、これと (ii) より

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 + (x_3 - x_4)^2 + x_4^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + x_2(x_2 - x_3) \\ &= (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + x_2\{(x_1 - x_2) - x_2\} \\ &= x_1(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

最後にこれと (i) より、最小値 m_4 は

$$\begin{aligned} m_4 &= (c - x_1)^2 + x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 + (x_3 - x_4)^2 + x_4^2 \\ &= (c - x_1)^2 + x_1^2 + x_1(x_1 - x_2) \\ &= c(c - x_1) \end{aligned}$$

になる。 □

一般に、 n 変数 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ の問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \sum_{k=0}^{n-1} [(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2] \\ (\text{P}_n) \quad &\text{subject to} \quad (\text{i}) \quad x \in R^n \\ &\quad \quad \quad (\text{ii}) \quad x_0 = c \end{aligned}$$

を考えると [6-8, 10, 13, 14]、次の定理が成り立つ。

定理 1 主問題 (P_n) の最小点を $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ とすると、最小値 m_n は

$$m_n = c(c - \hat{x}_1) \quad (2)$$

である。事実、最小解は

$$\begin{aligned} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}, \hat{x}_n) &= \frac{c}{F_{2n+1}} (F_{2n-1}, F_{2n-3}, \dots, F_3, F_1) \\ m_n &= \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} c^2 \end{aligned}$$

である。さらに、最小点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ は

$$\sum_{l=k}^{n-1} [(x_l - x_{l+1})^2 + x_{l+1}^2] = x_k(x_k - x_{k+1}) \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (3)$$

も満たしている。ただし、数列 $\{F_n\}$ はフィボナッチ数列 (*Fibonacci sequence*) を表す。フィボナッチ数列は $\{F_n\}$ は 2 階線形差分方程式

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0 \quad x_0 = 0, x_1 = 1$$

の解として定義されている [3, 4, 16]。 □

次に、4 変数問題 (P_4) の目的関数形を少し一般化して、 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ の問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \sum_{k=0}^2 [(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2 + (x_3 - x_4)^2 + kx_4^2] \\ (P'_4) \quad &\text{subject to} \quad (i) \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \\ &\quad (ii) \quad x_0 = c \end{aligned}$$

を考える。ただし $k > 0$ 。

定理 2 この最小点を $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4)$ とすると、最小値 m'_4 は

$$m'_4 = c(c - \hat{x}_1)$$

である。さらに、最小点 (x_1, x_2, x_3, x_4) は

$$\sum_{l=k}^3 [(x_l - x_{l+1})^2 + kx_{l+1}^2] = x_k(x_k - x_{k+1}) \quad 1 \leq k \leq 3 \quad (4)$$

も満たしている。 □

Proof. 問題 (P'₄) の目的関数

$$f(x) = (c - x_1)^2 + x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 + (x_3 - x_4)^2 + kx_4^2$$

は R^4 上の狭義凸関数である。したがって、唯一の (最小) 点で最小値をもつ。

さて、 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ が最小点とすると、 x は 1 階条件

$$-(c - x_1) + x_1 + (x_1 - x_2) = 0 \quad (\text{i})$$

$$-(x_1 - x_2) + x_2 + (x_2 - x_3) = 0 \quad (\text{ii})$$

$$-(x_2 - x_3) + x_3 + (x_3 - x_4) = 0 \quad (\text{iii})$$

$$-(x_3 - x_4) + kx_4 = 0 \quad (\text{iv})$$

を満たす。まず、(iv) の両辺を x_4 倍すると

$$kx_4^2 = x_4(x_3 - x_4).$$

よって

$$(x_3 - x_4)^2 + kx_4^2 = (x_3 - x_4)^2 + x_4(x_3 - x_4) = x_3(x_3 - x_4)$$

が成り立つ。次に、これと (iii) より

$$(x_2 - x_3)^2 + x_3^2 + (x_3 - x_4)^2 + kx_4^2 = (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 + x_3(x_3 - x_4) = x_2(x_2 - x_3).$$

さらに、これと (ii) より

$$(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 + (x_3 - x_4)^2 + kx_4^2 = x_1(x_1 - x_2).$$

最後にこれと (i) より、最小値 m'_4 は

$$\begin{aligned} m'_4 &= (c - x_1)^2 + x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 + (x_3 - x_4)^2 + kx_4^2 \\ &= c(c - x_1) \end{aligned}$$

になる。 □

系 1 (P'₄) において $k = 1 + \phi^{-1}$ のとき、最小解は黄金数で表され具体的に求まる。すなわち最小解は

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = c(\phi^{-2}, \phi^{-4}, \phi^{-6}, \phi^{-8}), \quad m'_4 = \phi^{-1}c^2.$$

ただし、 ϕ は黄金数 (Golden number) を表し、

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$$

である [4, 10, 11, 13–17]。

さらに、係数を一般にした問題

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{k=1}^4 [a_k(x_{k-1} - x_k)^2 + b_k x_k^2] \\ (P_4'') \quad & \text{subject to} \quad (i) \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \\ & \quad \quad \quad (ii) \quad x_0 = c \end{aligned}$$

を考えよう。ただし $a_k > 0$, $b_k > 0$ $1 \leq k \leq 4$ とする。

定理 3 この最小点を $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4)$ とすると、最小値 m_4'' は

$$m_4'' = a_1 c (c - \hat{x}_1)$$

である。さらに、最小点 (x_1, x_2, x_3, x_4) は

$$\sum_{l=k}^3 [a_{l+1}(x_l - x_{l+1})^2 + b_{l+1}x_{l+1}^2] = a_{k+1}x_k(x_k - x_{k+1}) \quad 1 \leq k \leq 3 \quad (5)$$

も満たしている。

□

2 最大化

今度は (P_4) の双対問題として、4 変数 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ の問題

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad 2c\mu_1 - \left\{ \sum_{k=1}^3 [\mu_k^2 + (\mu_k - \mu_{k+1})^2] + 2\mu_4^2 \right\} \\ (D_4) \quad & \text{subject to} \quad (i) \quad (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \in R^4 \end{aligned}$$

を考える [8-11]。

補題 2 (D_4) の最大点を $(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \mu_4^*)$ とすると、最大値 M_4 は

$$M_4 = c\mu_1^*$$

である。実際、最大解は

$$(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \mu_4^*) = \frac{c}{34} (21, 8, 3, 1), \quad M_4 = \frac{21}{34} c^2$$

である。さらに、最大点 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ は

$$(\mu_3 - \mu_4)^2 + 2\mu_4^2 = \mu_3(\mu_3 - \mu_4) \quad (6)$$

$$\sum_{l=k}^2 [(\mu_l - \mu_{l+1})^2 + \mu_{l+1}^2] + (\mu_3 - \mu_4)^2 + 2\mu_4^2 = \mu_k(\mu_k - \mu_{k+1}) \quad 1 \leq k \leq 2 \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^3 [\mu_k^2 + (\mu_k - \mu_{k+1})^2] + 2\mu_4^2 = c\mu_1 \quad (8)$$

も満たしている。

Proof. (D_4) の最大点を $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ とすると、 μ は 1 階条件

$$(c - \mu_1) - (\mu_1 - \mu_2) = 0 \quad (\text{i})$$

$$(\mu_1 - \mu_2) - \mu_2 - (\mu_2 - \mu_3) = 0 \quad (\text{ii})$$

$$(\mu_2 - \mu_3) - \mu_3 - (\mu_3 - \mu_4) = 0 \quad (\text{iii})$$

$$(\mu_3 - \mu_4) - 2\mu_4 = 0 \quad (\text{iv})$$

を満たす。まず、(iv) の両辺を μ_4 倍すると

$$2\mu_4^2 = \mu_4(\mu_3 - \mu_4).$$

よって

$$(\mu_3 - \mu_4)^2 + 2\mu_4^2 = (\mu_3 - \mu_4)^2 + \mu_4(\mu_3 - \mu_4) = \mu_3(\mu_3 - \mu_4)$$

が成り立つ。次に、これと (iii) より

$$\begin{aligned} (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + (\mu_3 - \mu_4)^2 + 2\mu_4^2 &= (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + \mu_3(\mu_3 - \mu_4) \\ &= (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + \mu_3\{(\mu_2 - \mu_3) - \mu_3\} \\ &= (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3(\mu_2 - \mu_3) \\ &= \mu_2(\mu_2 - \mu_3). \end{aligned}$$

さらに、これと (ii) より

$$\begin{aligned} &(\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + (\mu_3 - \mu_4)^2 + 2\mu_4^2 \\ &= (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + \mu_2(\mu_2 - \mu_3) \\ &= (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + \mu_2\{(\mu_1 - \mu_2) - \mu_2\} \\ &= \mu_1(\mu_1 - \mu_2). \end{aligned}$$

最後に、これと (i) より

$$\begin{aligned} &\mu_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + (\mu_3 - \mu_4)^2 + 2\mu_4^2 \\ &= \mu_1^2 + \mu_1(\mu_1 - \mu_2) \\ &= c\mu_1 \end{aligned}$$

が成り立つ。ゆえに、最大値 M_4 は

$$\begin{aligned} M_4 &= 2c\mu_1 - [\mu_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + (\mu_3 - \mu_4)^2 + 2\mu_4^2] \\ &= 2c\mu_1 - c\mu_1 \\ &= c\mu_1 \end{aligned}$$

になる。

□

次に、一般の n 変数 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ の問題

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } 2c\mu_1 - \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} [\mu_k^2 + (\mu_k - \mu_{k+1})^2] + 2\mu_n^2 \right\} \\ (D_n) \quad & \text{subject to (i) } \mu \in R^n \end{aligned}$$

を考える [6, 7, 11–15]。

定理 4 双対問題 (D_n) の最大点を $(\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_n^*)$ とすると、最大値 M_n は

$$M_n = c\mu_1^* \quad (9)$$

である。実際、最大解は

$$(\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_{n-1}^*, \mu_n^*) = \frac{c}{F_{2n+1}} (F_{2n}, F_{2n-2}, \dots, F_4, F_2)$$

$$M_n = \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} c^2$$

である。さらに、最大点 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ は

$$(\mu_{n-1} - \mu_n)^2 + 2\mu_n^2 = \mu_{n-1}(\mu_{n-1} - \mu_n) \quad (10)$$

$$\sum_{l=k}^{n-2} [(\mu_l - \mu_{l+1})^2 + \mu_{l+1}^2] + (\mu_{n-1} - \mu_n)^2 + 2\mu_n^2 = \mu_k(\mu_k - \mu_{k+1}) \quad 1 \leq k \leq n-2 \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} [\mu_k^2 + (\mu_k - \mu_{k+1})^2] + 2\mu_n^2 = c\mu_1 \quad (12)$$

も満たしている。 $\square$

今度は、 (D_4) を少し一般化した問題

$$\begin{aligned} (D'_4) \quad & \text{Maximize } 2c\mu_1 - [\mu_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + (\mu_3 - \mu_4)^2 + k\mu_4^2] \\ & \text{subject to (i) } (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \in R^4 \end{aligned}$$

を考えよう。ただし $k > 0$ 。

定理 5 この最大点を $(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \mu_4^*)$ とすると、最大値 M'_4 は

$$M'_4 = c\mu_1^*$$

である。さらに、最大点 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ は

$$(\mu_3 - \mu_4)^2 + k\mu_4^2 = \mu_3(\mu_3 - \mu_4) \quad (13)$$

$$\sum_{l=k}^2 [(\mu_l - \mu_{l+1})^2 + \mu_{l+1}^2] + (\mu_3 - \mu_4)^2 + k\mu_4^2 = \mu_k(\mu_k - \mu_{k+1}) \quad 1 \leq k \leq 2 \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^3 [\mu_k^2 + (\mu_k - \mu_{k+1})^2] + k\mu_4^2 = c\mu_1 \quad (15)$$

も満たしている。 $\square$

Proof. 問題 (D'₄) の目的関数

$$g(\mu) = 2c\mu_1 - [\mu_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + (\mu_3 - \mu_4)^2 + k\mu_4^2]$$

は R^4 上で狭義凹である。したがって、唯一の (最大) 点で最大値をもつ。

さて、(D'₄) の最大点を $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ とすると、 μ は 1 階条件

$$(c - \mu_1) - (\mu_1 - \mu_2) = 0 \quad (\text{i})$$

$$(\mu_1 - \mu_2) - \mu_2 - (\mu_2 - \mu_3) = 0 \quad (\text{ii})$$

$$(\mu_2 - \mu_3) - \mu_3 - (\mu_3 - \mu_4) = 0 \quad (\text{iii})$$

$$(\mu_3 - \mu_4) - k\mu_4 = 0 \quad (\text{iv})$$

を満たす。まず、(iv) を μ_4 倍すると

$$k\mu_4^2 = \mu_4(\mu_3 - \mu_4).$$

よって

$$(\mu_3 - \mu_4)^2 + k\mu_4^2 = (\mu_3 - \mu_4)^2 + \mu_4(\mu_3 - \mu_4) = \mu_3(\mu_3 - \mu_4)$$

が成り立つ。次に、これと (iii) より

$$(\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + (\mu_3 - \mu_4)^2 + k\mu_4^2 = (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3(\mu_2 - \mu_3) = \mu_2(\mu_2 - \mu_3).$$

さらに、これと (ii) より

$$(\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + (\mu_3 - \mu_4)^2 + k\mu_4^2 = (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2(\mu_1 - \mu_2) = \mu_1(\mu_1 - \mu_2).$$

最後に、これと (i) より

$$\begin{aligned} & \mu_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + (\mu_3 - \mu_4)^2 + k\mu_4^2 \\ &= \mu_1^2 + \mu_1(\mu_1 - \mu_2) \\ &= \mu_1^2 + \mu_1(c - \mu_1) \\ &= c\mu_1 \end{aligned}$$

が成り立つ。ゆえに、最大値 M'_4 は

$$\begin{aligned} M'_4 &= 2c\mu_1 - [\mu_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + (\mu_3 - \mu_4)^2 + k\mu_4^2] \\ &= 2c\mu_1 - c\mu_1 \\ &= c\mu_1 \end{aligned}$$

になる。 □

系 2 (D'₄) において $k = 1 + \phi^{-1}$ のとき、最大解は黄金数で表され具体的に求まる。すなわち最大解は

$$(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \mu_4^*) = c(\phi^{-1}, \phi^{-3}, \phi^{-5}, \phi^{-7}), \quad M'_4 = \phi^{-1}c^2$$

となる [11, 13]。

さらに、係数を一般にした問題

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } 2a_0\mu_1 - \left\{ \sum_{k=1}^3 [a_k\mu_k^2 + b_k(\mu_k - \mu_{k+1})^2] + a_4\mu_4^2 \right\} \\ (D_4'') \quad & \text{subject to (i) } (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \in R^4 \end{aligned}$$

を考えよう。ただし $a_k > 0 \ 0 \leq k \leq 4$, $b_k > 0 \ 1 \leq k \leq 3$.

定理 6 この最大点を $(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \mu_4^*)$ とすると、最大値 M_4'' は

$$M_4'' = a_0\mu_1^*$$

である。さらに、最大点 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ は

$$b_3(\mu_3 - \mu_4)^2 + a_4\mu_4^2 = b_3\mu_3(\mu_3 - \mu_4) \quad (16)$$

$$\sum_{l=k}^2 [b_l(\mu_l - \mu_{l+1})^2 + a_{l+1}\mu_{l+1}^2] + b_3(\mu_3 - \mu_4)^2 + a_4\mu_4^2 = b_k\mu_k(\mu_k - \mu_{k+1}) \quad 1 \leq k \leq 2 \quad (17)$$

$$\sum_{k=1}^3 [a_k\mu_k^2 + b_k(\mu_k - \mu_{k+1})^2] + a_4\mu_4^2 = a_0\mu_1 \quad (18)$$

も満たしている。 □

参考文献

- [1] R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).
- [2] A. Beutelspacher and B. Petri, 黄金分割－自然と数理と芸術と－ (柳井浩訳), 共立出版, 2005; (Original) *Der Goldene Schnitt 2, überarbeitete und erweiterte Auflage*, Elsevier GmbH, Spectrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996.
- [3] D. Brown, ダ・ヴィンチ・コード (上・下) (越前敏弥訳), 角川書店, 2004; (Original) *The Da Vinci Code*, Doubleday(USA) & Bantam(UK), 2003.
- [4] R.A. Dunlap, 黄金比とフィボナッチ数 (岩永恭雄・松井講介訳), 日本評論社, 2003; (Original) *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 1977.
- [5] I.M. Gelfand and S.V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, New Jersey, 1963.
- [6] 岩本誠一、動的計画論、九大出版会、1987.

- [7] S. Iwamoto, The Golden optimum solution in quadratic programming, Ed. W. Takahashi and T. Tanaka, *Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA05)*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2007, pp. 199–205.
- [8] 岩本 誠一、最適化「ダ・ヴィンチ・コード」 — 経済数学へのプレリュード (VI) — , 経済学研究・別冊 第 13 号 (九大経済学会). 平成 19(2007) 年 4 月, pp.45–52.
- [9] 岩本 誠一、ダ・ヴィンチ・コードは最適か?、数理経済学研究センター会報、第 37 号、平成 21(2009) 年 9 月、pp.1–9.
- [10] 岩本誠一、最適経路 — フィボナッチから黄金へ —、「不確実性下における意思決定問題」、京大数理研究録 1734、2011 年 3 月、pp. 196–204.
- [11] 岩本 誠一、最適化の数理 II — ベルマン方程式 — (Mathematics for Optimization II – Bellman Equation –)、数理経済学研究センター「数理経済学叢書 5」、知泉書館、2013 年 10 月、pp.449.
- [12] 岩本 誠一、吉良 知文、植野 貴之、ダ・ヴィンチ・コード、経済学研究 (九大経済学会)、第 76 巻 (2009 年 10 月) 23 号, pp.1–22.
- [13] S. Iwamoto, Y. Kimura and T. Fujita, “Primal-dual inequalities through conjugate function,” *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2013 in Hirosaki)*, accepted.
- [14] S. Iwamoto and M. Yasuda, Golden optimal path in discrete-time dynamic optimization processes, Ed. S. Elaydi, K. Nishimura, M. Shishikura and N. Tose, *Advanced Studies in Pure Mathematics 53*, June 2009, *Advances in Discrete Dynamic Systems*, pp.77–86. *Proceedings of The International Conference on Differential Equations and Applications (ICDEA2006)*, Kyoto University, Kyoto, Japan, July, 2006.
- [15] A. Kira and S. Iwamoto, Golden complementary dual in quadratic optimization, *Modeling Decisions for Artificial Intelligence*, *Proceedings of the Fifth International Confernece (MDAI 2008)*, Sabadell (Barcelona), Catalonia, Spain, October 30–31, 2008, Eds. V. Torra and Y. Narukawa, Springer-Verlag *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, Vol.5285, 2008, pp.191–202.
- [16] 中村 滋、フィボナッチ数の小宇宙——フィボナッチ数、リュカ数、黄金分割——(第 2 版)、日本評論社、2008.
- [17] H. Walser, 黄金分割 (蟹江幸博訳) , 日本評論社, 2002; (Original) *DER GOLDENE SCHNITT*, B.G. Teubner, Leibzig, 1996.