

$H^p(\mathbb{R}^n)$ についての一注意

茨城大学理学部 藪田公三

$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$ とすると $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ とは f が $\mathbb{C}_+$ で正則で $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+it)|^p dx < +\infty$ といふことである。同様に $\mathbb{C}_-, H^p(\mathbb{C}_-)$ を定義する。 $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ のとき $\lim_{t \rightarrow 0} f(x+it)$ は a.e. 存在して $L^p(\mathbb{R})$ に属する ($p \geq 1$)。そこで $H^p(\mathbb{R}) = \{f = u + iv; u, v \text{ はそれぞれ } H^p(\mathbb{C}_+) \text{ 函数の実数部分}\}$ とおくと

$$(1) \quad H^p(\mathbb{R}) \cong \{f(x+iy) = f_1(x+iy) + f_2(x-iy); f_1 \in H^p(\mathbb{C}_+), f_2 \in H^p(\mathbb{C}_-)\}$$

($\cong$ は 左辺に ノルム $\|\cdot\|_{H^p}$, 右辺に $\|f_1\|_{H^p(\mathbb{C}_+)} + \|f_2\|_{H^p(\mathbb{C}_-)}$ を入れたとき, ノルム同型になるといふ意味である。)

この小論では, 近年活発に解析された Stein-Wein 流の $H^p(\mathbb{R}^n)$ ($H^p(\mathbb{R})$ の高次元への一般化) が (1) のように $\mathbb{C}^n$ のある tube domain 上の函数空間として特徴付けられることも見ると同時に, その tube domain の Poisson 核による $L^p(\mathbb{R}^n)$ 函数, あるいは $\mathbb{R}^n$ 上の有界測度の像の特徴付けを与える。

1. $H^p(\mathbb{R}^n)$ の定義

以下, 簡単のため $1 \leq p < \infty$ とする. $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ とは, 次の
 ような $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n); x_0 \in (0, \infty), (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ 上の
 $n+1$ 個の函数 $u_j(x_0, x)$ が存在することである.

$$(2) \quad \sum_{j=0}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (j, k=1, \dots, n)$$

$$(3) \quad \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x_0 > 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=0}^n |u_j(x_0, x)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{かつ}$$

$$f(x) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} u_0(x_0, x) \quad \text{a.e.}$$

$H^p(\mathbb{R}^n)$ は (3) の左辺をノルムとする Banach 空間になる. よく
 知られているように,

$$1 < p < \infty \text{ のとき } H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n) \quad (\text{ノルム同値}) \quad \text{であり}$$

$R_j f = \left(\frac{\hat{f}}{\hat{f}} \right)^\vee \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (\wedge, \vee \text{ は Fourier 変換 及び 逆変換})$ とすると

$$H^1(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^1(\mathbb{R}^n); R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n), j=1, \dots, n \} \quad \text{で}$$

右辺に $\|f\| = \|f\|_1 + \sum \|R_j f\|_1$, τ ノルムを与えれば, $H^1(\mathbb{R}^n)$ とノルム同値になる.

2. Tube domain 上の H^p .

$\Gamma(\mathbb{C}^n)$ が open cone であるとは (i) $\Gamma \neq \emptyset$ (ii) $\alpha, \beta > 0$,
 $x, y \in \Gamma$; $\alpha x + \beta y \in \Gamma$ であること.

(2)

$\Gamma^* = \{x \in \mathbb{R}^n; x \cdot t = \sum_{j=1}^n x_j t_j \geq 0, t \in \Gamma\}$ とおく。 Γ の dual cone と呼ばれる。 Γ^* がある open cone の closure に等しいとき、 Γ は regular open cone と呼ばれる。 以下、常に Γ は regular open cone と仮定し、 Γ^* はその dual cone と仮定する。

Γ 上の tube domain $\{x + iy = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n; x \in \mathbb{R}^n, y \in \Gamma\}$ を T_Γ で表わす。

$$h^p(T_\Gamma) = \{f: \text{harmonic in } T_\Gamma, \|f\|_{h^p(T_\Gamma)} = \sup_{y \in \Gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x + iy)|^p dx \right)^{1/p} < \infty\}$$

$$H^p(T_\Gamma) = \{f \in h^p(T_\Gamma); f \text{ holomorphic in } T_\Gamma\}$$

と定義すると、 H^p は Banach 空間になる。

17.

$$K_\Gamma(z) = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i z \cdot t} dt \quad \text{is Cauchy kernel}$$

$$P_\Gamma(x, y) = \frac{|K(x + iy)|^2}{K(2iy)} \quad \text{is Poisson kernel}$$

と仮定する。

$$(i) P_\Gamma(x, y) \geq 0,$$

$$(ii) \int P_\Gamma(x, y) dx = 1 \quad y \in \Gamma,$$

$$(iii) \delta > 0 \text{ for } \int_{|x| > \delta} P_\Gamma(x, y) dx \rightarrow 0 \text{ as } y \in \Gamma \rightarrow 0,$$

$$(iv) y \in \Gamma \text{ fixed, } P_\Gamma(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ and } \lim_{x \rightarrow \infty} P_\Gamma(x, y) = 0.$$

と仮定し, $\rho(x, y)$ は $L^1(\mathbb{R}^n)$ の approximate identity である.

すなわち, $f \in H^p(T_P)$ ならば $\lim_{y \in P \rightarrow 0} f(x + iy) = f(x)$ (in $L^p(\mathbb{R}^n)$) が成り立つ.

$$(4) \quad f(x + iy) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_P(x + z, y) f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} K_P(x - z + iy) f(z) dz$$

と仮定する (より詳しくは, Stein-Weiss [3] を参照).

ここで, $A \in SO(n)$ (すなわち n 次元正交変換) とし, $A\Gamma = \{Ax : x \in \Gamma\}$ とする. 容易に計算で示すように,

$$(5) \quad (A\Gamma)^* = A\Gamma^*$$

$$(6) \quad \rho_{A\Gamma}(x, Ay) = \rho_P(x, y) \quad y \in \Gamma$$

を得る. 最後に $f \in A^{-1}H^p(T_{A\Gamma})$ とは, ある $g \in H^p(T_{A\Gamma})$ に対して $f(x, y) = g(x + iAy)$ と仮定してよい.

3. 結果

定理. Γ : regular open cone とする. $A_k \in SO(n)$ と $\bigcup_{k=1}^j \text{interior}(A_k\Gamma^*) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ とする. すると

$$\begin{aligned} & \left\{ f(x, y) = \int \rho_P(x - z, y) f(z) dz ; f \in H^p(\mathbb{R}^n) \right\} \\ &= \left\{ f = f_{A_1} + \cdots + f_{A_j} ; f_{A_k} \in A_k^{-1}H^p(T_{A_k\Gamma}) , k=1, \dots, j \right\} \end{aligned}$$

で、左辺に極限函数 f の $H^p(\mathbb{R}^n)$ ノルム、右辺に $p > 1$ のときは

$\|f\|_{h^p(T_F)}$ ノルム、 $p=1$ のときは $\|f\| = \inf \left\{ \sum \|f_{A_k}\|_{h^1(T_F)} ; \right.$

$f = \sum f_{A_k}$ の表現 $\left. \right\}$ とすると、左右 (すなわち) ノルム同型になる。
すなわち $H^p(\mathbb{R}^n)$ に

注. 上の注意 $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$) を用いると、 L^p 函数の Poisson 積分の特徴付けが得られる (これはよく知られたことである)。

同様に

$$\begin{aligned} \text{系 (i)} \quad & \left\{ f(x, y) = \int \mathcal{P}_F(x-x, y) d\mu(t) ; \mu \in M(\mathbb{R}^n) : \mathbb{R}^n \text{ 上の有界測度} \right\} \\ & = \left\{ f = f_{A_1} + \dots + f_{A_j} ; f_k \in A_k^{-1} H^1(T_{A_k F}) \right\} \text{ の } h^1(T_F) \text{ 既約包} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & \left\{ f(x, y) = \int \mathcal{P}_F(x-x, y) f(t) dx ; f \in L^1(\mathbb{R}^n) \right\} \\ & = \left\{ f(x, y) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} g_\ell(x, y) \text{ (in } h^1(T_F)) ; g_\ell \in \sum_{k=1}^j f_{A_k}^\ell (f_{A_k}^\ell \in A_k^{-1} H^1(T_{A_k F})) \right. \\ & \quad \left. \text{かつ } \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} g_\ell(x, y) \right\} \text{ は } L^1(\mathbb{R}^n) \text{ の uniformly integrable family をなす} \right\} \end{aligned}$$

定理の証明は、Carleson の結果 [1] のほくのかす (のひまを) §2 で述べた Poisson kernel の性質の組み合わせに過ぎないが、少し小気になると、まず、[1] あるいは [2] と同じようにして、次のような有界作用素が存在する。

$$T_k : H^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^p(T_{A_k F}) \quad (k=1, 2, \dots, j)$$

$$(7) \quad f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \sum_{k=1}^j T_k f(x + \lambda y) \quad (\text{limit in } L^1) \quad \text{かつ}$$

$$\|f\|_{H^p} \approx \sum_{k=1}^j \|T_k f\|_{H^p(T_{A_k P})}.$$

又, $f(x, y) \in A_k^{-1} H^p(T_{A_k P})$ ならば ある $g \in H^p(T_{A_k P})$ に対して $f(x, y) = g(x + \lambda A y)$ であり, $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} g(x + \lambda A y) \in H^p(\mathbb{R}^n)$ となるので,

$$(8) \quad \int \mathcal{P}(x-s, y) f(t) dt \stackrel{(6)}{=} \int \mathcal{P}_{A P}(x-s, A y) g(t) dt$$

$$\stackrel{(4)}{=} g(x + \lambda A y) = f(x, y).$$

これより (7), (8) より定理でいふ 2つの集合は同じものであることがわかる。又, ノルム同値も $\mathbb{R}^n$ での計算と組み合わせれば明らかである。

系1の定理と $\mathcal{P}(x, y)$ の性質 (i) → (iv) より, 著述の議論で出る。

4. $0 < p < 1$ のときも同様の $H^p(\mathbb{R}^n)$ の特徴付けが成り立つが, ここでは触れないことにする。

参考文献

1. L. Carleson, Two remarks on H^1 and BMO, Advances in Math. 22(1976), 269-277.
2. R.R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 83(1977), 569-645.
3. E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces, Princeton Univ. Press, 1971.