

Hopf bifurcation for delayed equation of van der Pol type

徳島大総合科 村上公一 (Kouichi Murakami)

大阪府立大工 原 惟行 (Tadayuki Hara)

1 はじめに

本稿では、次の時間遅れのある微分方程式についての結果を報告する。

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) = y(t-\tau) - F(x(t-\tau)) \\ y'(t) = -x(t-\tau) \end{cases}$$

ただし、 $F(x) = ax + bx^3$ とし、 $\tau > 0$ とする。

方程式 (1) は $\tau = 0$ のとき自励振動で知られた van der Pol 方程式となり、適当な条件 (例えば $F(x) = -x + \frac{1}{3}x^3$) の下で唯一つの周期解が存在することが分かっている。ここでは、時間遅れの影響がある場合について、解の漸近挙動がどのようになるかを考える。特に、Hopf 分岐による周期解の発生に着目し、

(i) 周期解の存在条件と安定性 (定性的結果)

(ii) 周期解の振幅と周期 (定量的結果)

を得ることを目標とする。

2 準備

方程式 (1) において、

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g(z) = \begin{pmatrix} -bx^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$z'(t) = Az(t-\tau) + g(z(t-\tau))$$

となる。いま、 $C = C([- \tau, 0], R^2)$ とし、解 $z(t)$ に対して $z_t(s) = z(t+s)$, $- \tau \leq s \leq 0$ により $z_t \in C$ を定義する。そして、

$$Dz_t = z_t(0) = z(t), \quad Lz_t = Az(t-\tau), \quad f(z_t) = g(z(t-\tau))$$

により、作用素 $D: C \rightarrow R^2$, $L: C \rightarrow R^2$, 及び $f: C \rightarrow R^2$ を定義する。これにより、 C 上で定義された微分方程式

$$\frac{d}{dt} Dz_t = Lz_t + f(z_t)$$

が得られる。

ここで、線形化方程式の特性方程式

$$(2) \quad \det \Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = D(e^{\lambda \cdot}) - L(e^{\lambda \cdot})$$

の根について考える。いま、(2) が一对の simple な純虚数根 $\pm i\omega$ を持ち、その他の根はすべて実部負であると仮定する。このとき、関数空間 C は $\pm i\omega$ に属する一般化固有空間 N により、

$$C = N \oplus S$$

と分解できる。さらに、 N と原点で接する有限次元の中心多様体 $W_{loc}^c(0)$ が存在し、解はその中心多様体に近づく。中心多様体は不変集合で、その上の解は常微分方程式で記述される。

一般化固有空間 N の基底を Φ 、対応する adjoint 方程式の解の基底を Ψ とする。ただし、 Ψ は双線形形式について正規化されているとする。そして、解は $z_t = \Phi u + x_t^S$, $u \in R^2$ と表されるとする。このとき、中心多様体は、ある関数 $h(u) : R^2 \rightarrow S$ によって、

$$W_{loc}^c(0) = \{\phi \in C : \phi = \Phi u + h(u), |u| \leq \eta\}$$

と表される。また、中心多様体上の常微分方程式は、

$$(3) \quad u' = Bu + \Psi(0)f(\Phi u + h(u))$$

$$\text{ただし、} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

方程式がパラメタを含み、パラメタ変化によって特性方程式 (2) の根 $\pm i\omega$ が虚軸を横切る場合、Hopf 分岐が起きて周期解が発生することが知られている。この Hopf 分岐による周期解は、中心多様体上の常微分方程式 (3) を Poincare の標準形に変換することにより調べることができる。

3 結果

3.1 特性方程式の根について

方程式 (1) に対する特性方程式

$$(4) \quad \det(\lambda I - Ae^{-\lambda\tau}) = 0, \quad A = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

について、以下の結果を得た。

Lemma 1 特性方程式 (4) の根を考える。

- (i) $2 \sin \tau < a < \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi}$ かつ $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ ならば、(4) の根はすべて実部負である。

(ii) $a = 2 \sin \tau$ かつ $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ ならば、(4) は一対の simple な純虚数根 $\pm i\omega$ を持ち、その他の根はすべて実部負である。ただし、 $\omega = 1$ とする。

(iii) $a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi}$ かつ $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ ならば、(4) は一対の simple な純虚数根 $\pm i\omega$ を持ち、その他の根はすべて実部負である。ただし、 $\omega = \frac{\pi}{2\tau}$ とする。

証明には、文献 [4] の結果を利用する。

3.2 $a = 2 \sin \tau$ の場合

$a = 2 \sin \tau$ の場合を考える。中心多様体上の常微分方程式は、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \frac{b \sec \tau}{1 + \tau^2} \begin{pmatrix} \tau u_2^3 \\ u_2^3 \end{pmatrix} + O(|u|^4)$$

となる。ただし、 $\omega = 1$ とする。さらに、パラメタ μ を導入して $a = 2 \sin \tau + \mu$ とし、Poincare の標準形に変換すると、

$$\begin{cases} r' = \alpha \mu r + \beta r^3 + O(\mu^2 r, \mu r^3, r^5) \\ \theta' = \omega + O(\mu, r^2) \end{cases}$$

$$\text{ただし、} \quad \alpha = \frac{-\sec \tau}{2(1 + \tau^2)} < 0, \quad \beta = \frac{-3b \sec \tau}{8(1 + \tau^2)} \begin{cases} < 0 & (b > 0) \\ > 0 & (b < 0) \end{cases}$$

となる。ここで、 r の方程式について以下が成立する。

- $\alpha < 0$ より、原点は $\mu > 0$ で安定、 $\mu < 0$ で不安定となる。
- $b > 0$ ならば $\beta < 0$ となり、分岐の方向は $\mu < 0$ で周期解は安定となる。
- $b < 0$ ならば $\beta > 0$ となり、分岐の方向は $\mu > 0$ で周期解は不安定となる。

以上より、次の結果が得られた。

Theorem 1 μ は十分小さいとし、 $a = 2 \sin \tau + \mu$ かつ $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ とする。

- (i) $b > 0$ ならば、 $\mu < 0$ のとき安定周期解が存在する。
- (ii) $b < 0$ ならば、 $\mu > 0$ のとき不安定周期解が存在する。

このとき、周期解は $p(t) \approx \sqrt{-\frac{4\mu}{3b}} \begin{pmatrix} \sin(t + \tau) \\ \cos t \end{pmatrix}$ と近似できる。

Example 1 (1) のパラメタを、Theorem 1 (i) の条件を満たすように、以下のように設定する。

$$a = 2 \sin \tau + \mu, \quad \tau = 0.5, \quad b = 0.2, \quad \mu = -0.1$$

このとき、初期関数 $\phi(t) = (t, \cos 4\pi t)^T$ に対する近似解は図 1 のようになる。また、Theorem 1 により近似周期解を求めると図 2 のようになる。図 1・2 より、解が Theorem 1 の周期解に近づいていることが分かる。

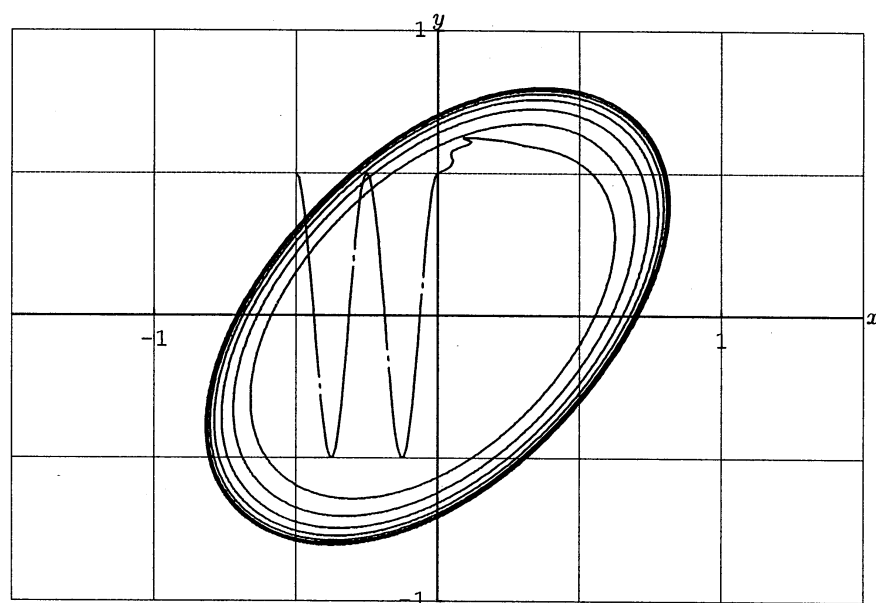


図 1: 例 1 の解軌道

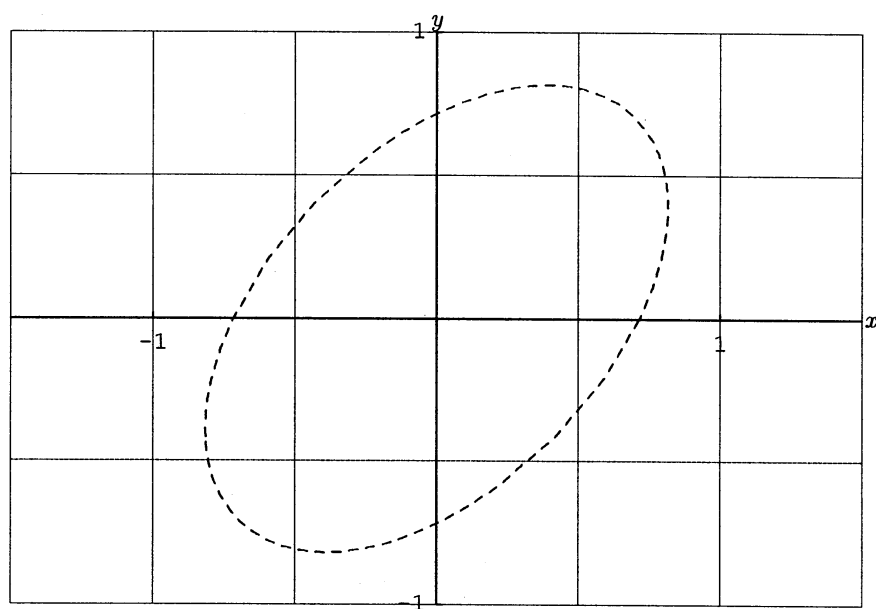


図 2: Theorem 1 による例 1 の近似周期解

3.3 $a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi}$ の場合

$a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi}$ の場合を考える。中心多様体上の常微分方程式は、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \frac{4\pi^2 b}{(4 + \pi^2)(\pi^2 - 4\tau^2)} \begin{pmatrix} -2u_2^3 \\ \pi u_2^3 \end{pmatrix} + O(|u|^4)$$

となる。ただし、 $\omega = \frac{\pi}{2\tau}$ とする。さらに、パラメタ μ を導入して $a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi} + \mu$ とし、Poincare の標準形に変換すると、

$$\begin{cases} r' = \alpha \mu r + \beta r^3 + O(\mu^2 r, \mu r^3, r^5) \\ \theta' = \omega + O(\mu, r^2) \end{cases}$$

$$\text{ただし、} \quad \alpha = \frac{2\pi^3}{(4 + \pi^2)(\pi^2 - 4\tau^2)} > 0, \quad \beta = \frac{3\pi^3 b}{2(4 + \pi^2)(\pi^2 - 4\tau^2)} \begin{cases} > 0 & (b > 0) \\ < 0 & (b < 0) \end{cases}$$

となる。ここで、 r の方程式について以下が成立する。

- $\alpha > 0$ より、原点は $\mu < 0$ で安定、 $\mu > 0$ で不安定となる。
- $b > 0$ ならば $\beta > 0$ となり、分岐の方向は $\mu < 0$ で周期解は不安定となる。
- $b < 0$ ならば $\beta < 0$ となり、分岐の方向は $\mu > 0$ で周期解は安定となる。

以上より、次の結果が得られた。

Theorem 2 μ は十分小さいとし、 $a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi} + \mu$ かつ $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ とする。

- $b > 0$ ならば、 $\mu < 0$ のとき不安定周期解が存在する。
- $b < 0$ ならば、 $\mu > 0$ のとき安定周期解が存在する。

このとき、周期解は $p(t) \approx \sqrt{-\frac{4\mu}{3b}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2\tau} t \\ \frac{2\tau}{\pi} \cos \frac{\pi}{2\tau} t \end{pmatrix}$ と近似できる。

Example 2 (1) のパラメタを、Theorem 2 (ii) の条件を満たすように、以下のように設定する。

$$a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi} + \mu, \quad \tau = 1, \quad b = -0.2, \quad \mu = 0.1$$

このとき、初期関数 $\phi(t) = (t, \cos 4\pi t)^T$ に対する近似解は図 3 のようになる。また、Theorem 2 により近似周期解を求めると図 4 のようになる。図 3・4 より、解が Theorem 2 の周期解に近づいていることが分かる。

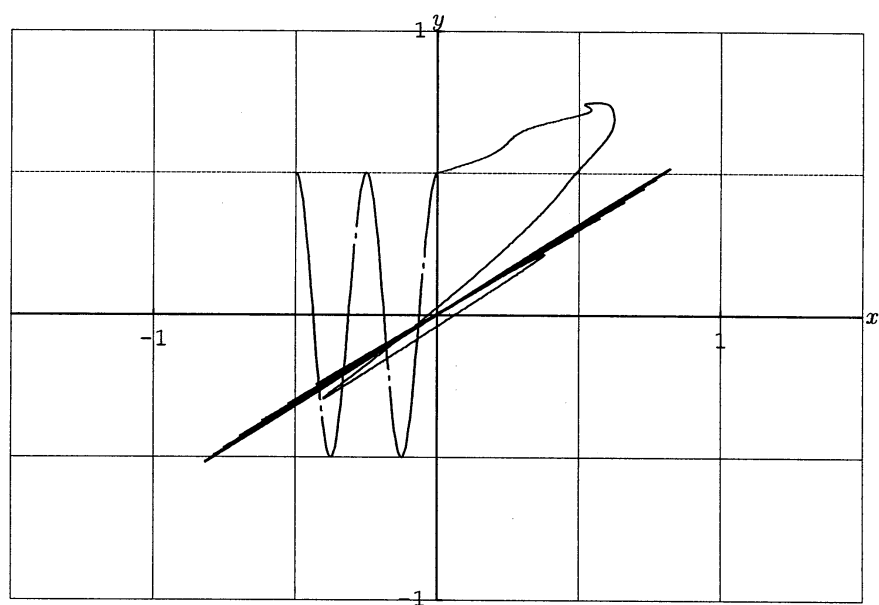


図 3: 例 2 の解軌道

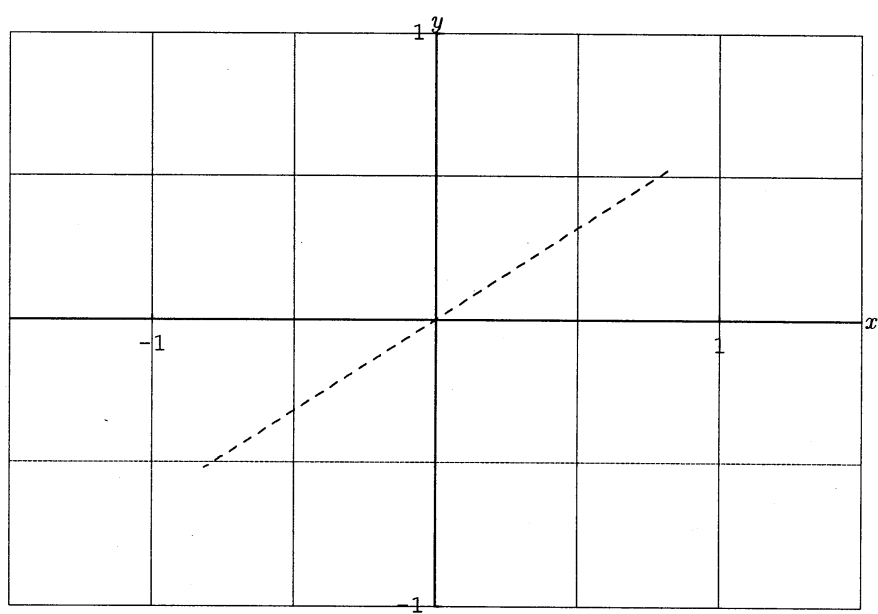


図 4: Theorem 2 による例 2 の近似周期解

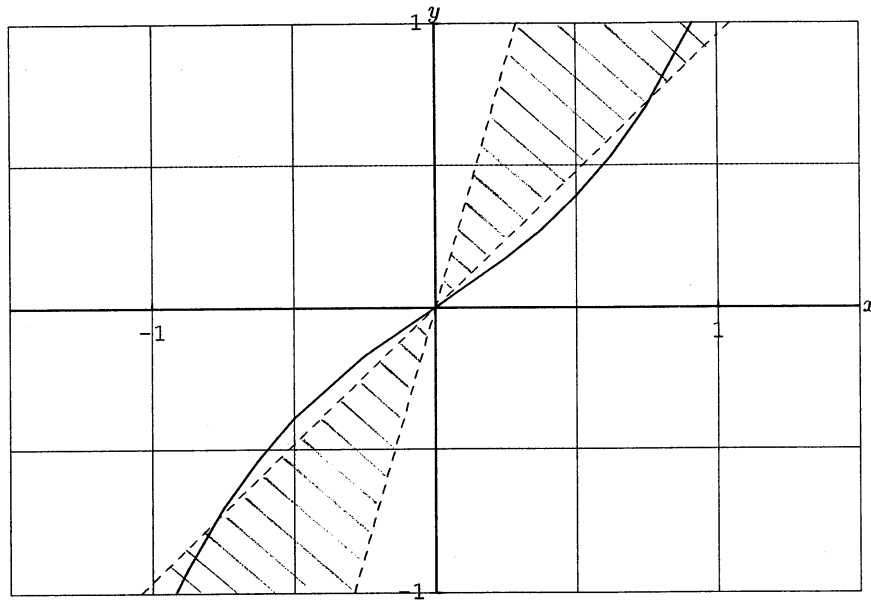


図 5: $F(x) = ax + bx^3$ ($a > 0$ かつ $b > 0$) のグラフ

4 考察

ここでは、時間遅れの影響をみるため、(1) の解の漸近挙動を $\tau = 0$ と $\tau > 0$ で比較してみる。

まず、(1) の $F(x) = ax + bx^3$ が図 5 のように $a > 0$ かつ $b > 0$ の場合を考える。 $\tau = 0$ のときは周期解は存在しない。しかし、 $\tau > 0$ ならば周期解が存在する場合があるということを Theorem 1・2 は示している。図 5 の斜線部の境界は $y = (2 \sin \tau)x$ と $y = (\frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi})x$ で、 $F(x)$ は原点近傍で斜線部からはみ出し、 $|x|$ が大きいところで斜線部内に入っている。ここで、もし $F(x)$ がすべて斜線部に含まれているならば、Lemma 1 より原点は漸近安定となる。しかし、図 5 のような $F(x)$ では原点が局所不安定となるので、周期解が存在すると考えられる。 $\tau = 0$ の場合は斜線部の境界が x 軸と y 軸にまで広がり、 $a > 0$ かつ $b > 0$ では原点は大域的に漸近安定となるので、周期解は存在しない。尚、 $\tau > 0$ で存在する周期解は、一般に一意性は成立しないと考えられる。

次に、(1) の $F(x) = ax + bx^3$ が図 6 のように $a < 0$ かつ $b > 0$ の場合を考える。 $\tau = 0$ のときは、唯一つの周期解が存在する。 $\tau > 0$ のときにも周期解が存在すると予想していたが、数値シミュレーションでは図 7 のような chaos 的な解軌道になった。この理由は、今のところ分らない。

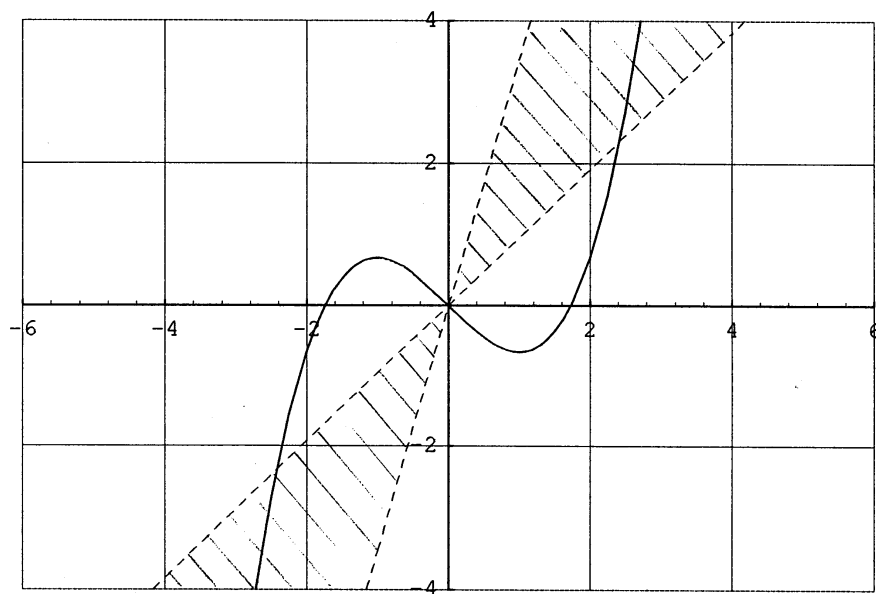


図 6: $F(x) = ax + bx^3$ ($a < 0$ かつ $b > 0$) のグラフ

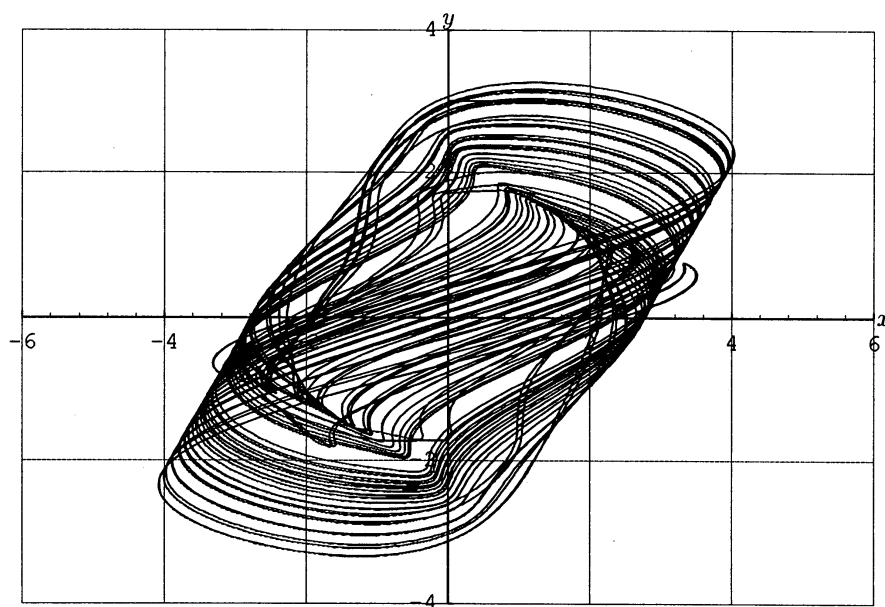


図 7: $F(x) = ax + bx^3$ ($a < 0$ かつ $b > 0$), $\tau > 0$ の場合の解軌道

参考文献

- [1] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag (1983).
- [2] J. Hale and S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag (1993).
- [3] B.D. Hassard, N.D. Kazarinoff and Y.H. Wan, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, Cambridge University Press (1981).
- [4] K. Murakami, Stable Periodic Solutions for Two-dimensional Linear Delay Differential Equations, *J. Math. Anal. Appl.* (in press).
- [5] G. Stépán, *Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions*, Pitman (1989).
- [6] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag (1990).