

Geometry of sections of certain rational elliptic surfaces and its application

徳永浩雄¹

イントロダクション

ここでは、多様体はすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義されているものとする。 $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は $\mathbb{P}^1$ 上の楕円曲面とする。ここで、楕円曲面と云えば、

- φ は相対極小であり、
- 切断 O を持つものとする。

さらに、この報告では、

φ は少なくとも一つは特異ファイバーを持つ

と仮定する。 $MW(S)$ は $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ の切断の集合とする。仮定から、 $MW(S) \neq \emptyset$ である。 $MW(S)$ は $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ -有理点の集合とみなされ、よく知られているように O を単位元とするような可換群の構造が入る (Mordell-Weil 群)。この加法を $+$ で表し、 m 倍写像を $[m]s$ で表す。 m が負の整数の場合は、逆元を $-m$ 倍したものと解釈する。なお、以下では切断をその像と同一視し、 S 上の曲線と考えることにする。

さて、 k 個の切断 $s_1, \dots, s_k \in MW(S)$ を選んでその和 $\sum_i [a_i]s_i$ を考えるとこれは $MW(S)$ の新たな元であり、その像は S 上の新たな曲線を与える。本報告の目的は $MW(S)$ 上の演算の結果として得られるこうした S 上の曲線の幾何学的な応用を考察することである。ここでは、ある特別な有理楕円曲面上で、 $s, [2]s$ が与える曲線が、conic-line arrangement の Zariski 対の例を構成するのに利用できることを紹介する。

まず、Zariski 対の定義を復習しておく：

Definition 1 次数 n の被約な平面代数曲線の対 (B_1, B_2) が以下の条件を満たすとき、これを次数 n の Zariski 対という。

- (i) B_i ($i = 1, 2$) はともに次数 n の曲線であり、 B_1 の combinatorial type (以下の Definition 2 を参照) は B_2 のそれと等しい。
- (ii) ペア $(\mathbb{P}^2, B_1)$ からペア $(\mathbb{P}^2, B_2)$ への同相写像は存在しない。

Definition 2 ([6]) 曲線 B の combinatorial type とは以下の 7 つ組

$$(\text{Irr}(B), \deg, \text{Sing}(B), \Sigma_{\text{top}}(B), \sigma_{\text{top}}, \{B(P)\}_{P \in \text{Sing}(B)}, \{\beta_P\}_{P \in \text{Sing}(B)}),$$

で与えられる。

¹首都大学東京 理工学研究科, tokunaga@tmu.ac.jp

- $\text{Irr}(B)$ は B の既約成分の集合であり, $\deg : \text{Irr}(B) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は各既約成分にその次数を対応させる写像である.
- $\text{Sing}(B)$ は B の特異点の集合であり, $\Sigma_{\text{top}}(B)$ は $\text{Sing}(B)$ の各点の topological type の集合である. さらに, $\sigma_{\text{top}} : \text{Sing}(B) \rightarrow \Sigma_{\text{top}}(B)$ は各特異点に対し, その topological type を対応させる写像とする.
- $B(P)$ は B の $P \in \text{Sing}(B)$ は局所分枝の集合とし, $\beta_P : B(P) \rightarrow \text{Irr}(B)$ は各局所分枝にその分枝を含む既約成分を対応させる写像とする.

二つの被約な平面曲線 B_1 と B_2 が, *same combinatorial type* をもつ (または, 単に *same combinatorics* をもつ) とは, 上記の combinatorial types のデータ

$$(\text{Irr}(B_i), \deg_i, \text{Sing}(B_i), \Sigma_{\text{top}}(B_i), \sigma_{\text{top}_i}, \{\beta_{i,P}\}_{P \in \text{Sing}(B_i)}, \{B_i(P)\}_{P \in \text{Sing}(B_i)}), \quad i = 1, 2,$$

が等しいことをいう. すなわち, $\Sigma_{\text{top}}(B_1) = \Sigma_{\text{top}}(B_2)$, であり, 全単射写像 $\varphi_{\text{Sing}} : \text{Sing}(B_1) \rightarrow \text{Sing}(B_2)$, $\varphi_P : B_1(P) \rightarrow B_2(\varphi_{\text{Sing}}(P))$ (各 $P \in \text{Sing}(B_1)$) $\varphi_{\text{Irr}} : \text{Irr}(B_1) \rightarrow \text{Irr}(B_2)$ が存在して, 以下条件をみたす: $\deg_2 \circ \varphi_{\text{Irr}} = \deg_1$, $\sigma_{\text{top}_2} \circ \varphi_{\text{Sing}} = \sigma_{\text{top}_1}$, and $\beta_{2, \varphi_{\text{Sing}}(P)} \circ \varphi_P = \varphi_{\text{Irr}} \circ \beta_{1,P}$.

B_i ($i = 1, 2$) が既約のとき, B_1 と B_2 は次数が等しく, 特異点の数, 対応する各特異点の topological type が等しいとき, *same combinatoric* を持つ. また, line arrangement の場合は, それぞれの incidence relations が等しいとき, B_1 と B_2 は *same combinatorial type* を持つ.

Zarsiki 対の最初の例はその名が示す通り Zariski ([17, 18]) により与えられた以下の例である:

Example 3 (B_1, B_2) は以下の条件を満たす既約な 6 次曲線の対とする: (i) B_1 と B_2 はともに既約 6 次曲線でその特異点は 6 個のカスプのみである. (ii) B_1 の 6 個のカスプはある 2 次曲線上にあるが, B_2 の 6 個のカスプを通る 2 次曲線は存在しない. このとき, (B_1, B_2) は Zariski 対である.

Zariski の例以降, Zariski 対の研究はしばらく進展がほとんどなかったが, 90 年代に入って多くの研究がなされた (例えば, [6] の参考文献を参照). そのなかでも, 次のような例がある:

- Example 4** 1. (Artal Bartolo, 徳永 [7]) B_1, B_2 はそれぞれ 2 つの nodal cubic を既約成分にもつ 6 次曲線とする. $B_i = C_{i,1} + C_{i,2}$ とおく. B_1, B_2 ともに $C_{i,1}$ と $C_{i,2}$ は 1 点で 9 重に交わっているものとする. さらに, $C_{1,1} \cap C_{1,2}$ は各 nodal cubic の変曲点, $C_{2,1} \cap C_{2,2}$ は各 cubic の変曲点ではない, とする. このとき, (B_1, B_2) は Zariski 対である.
2. (土橋, 難波 ([12])) B_1, B_2 はともに 4 つの既約な 2 次曲線を既約成分にもつ 8 次曲線とする. $B_i = \sum_{j=1}^4 C_{i,j}$ とおく. さらに,
- (i) $i = 1, 2$ に対して, $C_{i,j}$ ($j = 1, 2$) は $C_{i,j}$ ($j = 3, 4$) に相異なる 2 点で接する.
 - (ii) $C_{i,1} \cap C_{i,2}, C_{i,3} \cap C_{i,4}$
 - (iii) B_i ($i = 1, 2$) の特異点は node と tacnode のみである.

(iv) B_1 に関しては, 8 つの接点を通る 2 次曲線が存在するが, B_2 にはそのような 2 次曲線は存在しない.

このとき, (B_1, B_2) は Zariski 対である.

3. (Artal-Bartolo, Carmona-Ruber, Cogolludo-Agustin, Marco-Buzunariz ([4], [5])) 9 本の直線, 11 本の直線からなる line arrangement の Zariski 対

ここでは, ある有理楕円曲面の切断 $s, [2]s$ を利用して, conic-arrangement の Zariski 対が構成できることを紹介したい.

Remark 5 Conic-line arrangements については, M. Amram, M. Friedman, D. Garber, M. Teicher and A. M. Uludag による研究がある ([1, 2, 3, 9]). 彼らの結果は conic-line arrangement の補空間の基本群の性質に関するものだが, Zariski 対の例は与えて無いようである.

[6] において述べているように (乱暴かもしれないが) Zariski 対の研究は以下の 2 つのステップからなると云える:

(I) same combinatorics を持つけれども, “何か違った性質,” 例えば— Example 3 にあるように特異点の location に関する違い—を持つように B_1 と B_2 を構成すること.

(II) 対 $(\mathbb{P}^2, B_1)$ が $(\mathbb{P}^2, B_2)$ 同相にならないことを示す.

ここでは, 上記の (I) について, 新たな手法を紹介したい. すなわち, 楕円曲面の Mordell-Weil 群の演算および切断から構成できる曲線の幾何学を用いる手法である. 以下, どのようにして平面曲線を構成するかを簡単に説明する.

まず, この節のはじめに述べた楕円曲面 $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は常に以下のような形で得られていることに注目する (詳しくは, [11] 等を参照されたい).

- Σ_d は次数 d (d は偶数) の Hirzebruch 曲面とする.
- Δ_0 は $\Delta_0^2 = -d$ を満たす切断, T は (i) 高々単純特異点しか持たず (単純特異点については, [8] 参照), (ii) $\Delta_0 \cap T = \emptyset$ を満たす Σ_d 上の tri-section とする (この条件のもと, $\Delta_0 + T$ は $\text{Pic}(\Sigma_d)$ で 2-divisible である).
- $f': S' \rightarrow \Sigma_d$ は $\Delta_0 + T$ で分岐する 2 次被覆とする.
- $\mu: S \rightarrow S'$ は標準特異点解消とする (標準特異点解消については [10] 参照). 仮定から μ は最小特異点解消であり, 以下の ‘double cover diagram’ を満たす:

$$\begin{array}{ccc} S' & \xleftarrow{\mu} & S \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \Sigma_d & \xleftarrow{q} & \hat{\Sigma}_d. \end{array}$$

ここで, q は blow-up の合成であり, f は誘導された 2 次被覆である (f の分岐因子は非特異である).

上記の設定のもと、 S は以下の二つの条件を満たす $\mathbb{P}^1$ 上の楕円曲面となる：

- 楕円ファイバー空間 $\varphi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は $\Sigma_d \rightarrow \mathbb{P}^1$ から引き起こされたものである。
- φ は Δ_0 の preimage として切断 O を持つ。

Δ_1 及び Δ_2 はともに Σ_d の切断で条件： $\Delta_i^2 = d$ 及び $\Delta_i \cap \Delta_0 = \emptyset$ ($i = 1, 2$) を満たすものとする。 $\overline{\Delta}_i$ ($i = 1, 2$) はそれぞれ q より Δ_i ($i = 1, 2$) の狭義引き戻しとする。ここで、以下の条件が満たされているとしよう：

1. 各 i に対し、 $f^*(\overline{\Delta}_i)$ は二つの切断 $s_{\Delta_i}^\pm$ である。
2. $\widehat{\Sigma}_d$ は有限回の blow-down ののち、 $\mathbb{P}^2$ になる。この blow-down の写像を $\bar{q} : \widehat{\Sigma}_d \rightarrow \mathbb{P}^2$ で表す。

上記の設定で、 $[2]s_{\Delta_i}^+$ ($i = 1, 2$) を $\text{MW}(S)$ において $s_{\Delta_i}^+$ を 2 倍して定まる切断とし、same combinatorics をもつ平面代数曲線 B_1 及び B_2 を構成する手法として $\bar{q} \circ f(s_{\Delta_i}^+)$, $\bar{q} \circ f([2]s_{\Delta_i}^+)$ ($i = 1, 2$)、及び $\bar{q}(\Delta(S/\widehat{\Sigma}_d))$ を利用することを考える。ただし、 $\Delta(S/\widehat{\Sigma}_d)$ は f の分岐因子である。本稿では、このアイデアを $d = 2$ に利用して、次数 7 の conic-line arrangement に関する Zariski 対を構成する。

Zariski 対研究の Step (II) については、これまでの論文 [13, 14, 15] 同様、Galois 群が位数 $2n$ の二面体群 D_{2n} に同型となるような $\mathbb{P}^2$ の Galois 分岐被覆 (D_{2n} -被覆) を利用する。さて、この報告で扱う次数 7 の conic-line arrangement は以下の通りである：

Conic-line arrangement 1

C_i ($i = 1, 2$) はともに非特異な 2 次曲線、 L_j ($j = 1, 2, 3, 4$) は直線で以下の条件を満たすものとする：

- (i) L_1 と L_2 は共に C_1 と横断的に交わる。 $C_1 \cap L_1 = \{P_1, P_2\}$, $C_1 \cap L_2 = \{P_3, P_4\}$ とおく。
- (ii) C_2 は C_1 に相異なる 2 点 $\{Q_1, Q_2\}$ で接するかまたは 1 点 $\{Q\}$ で接する。ここで、前者を type (a)、後者を type (b) と呼ぶ。
- (iii) $C_1 \cap C_2$ の点における接線は $L_1 \cap L_2$ を通らない。
- (iv) C_2 は L_1 と L_2 に接する。
- (v) L_3 は P_1 と P_3 を通る。
- (vi) L_4 は P_1 と P_4 を通る。
- (vii) L_3 と L_4 は共に C_2 と横断的に交わる。

$B_1 := C_1 + C_2 + L_1 + L_2 + L_3$, $B_2 := C_1 + C_2 + L_1 + L_2 + L_4$ とおく。すると、 B_1 と B_2 は same combinatorics を持つ。

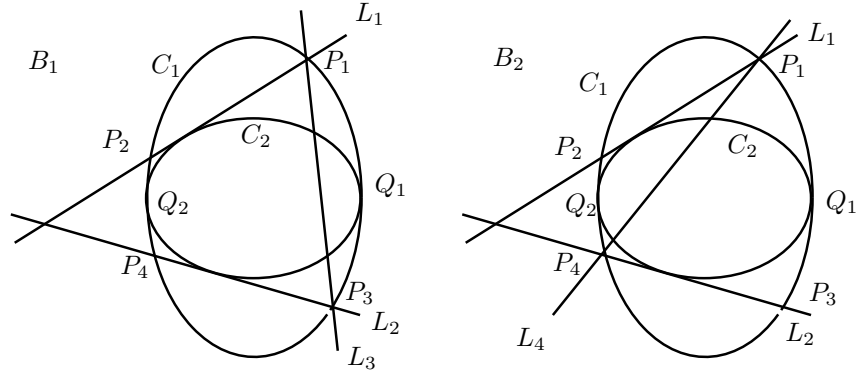
続いて Conic-line arrangement 2 について説明する. この conic-line arrangement は Conic-line arrangement 1 の直線 L_1 と L_2 を非特異な 2 次曲線に置き換えたものである.

Conic-line arrangement 2

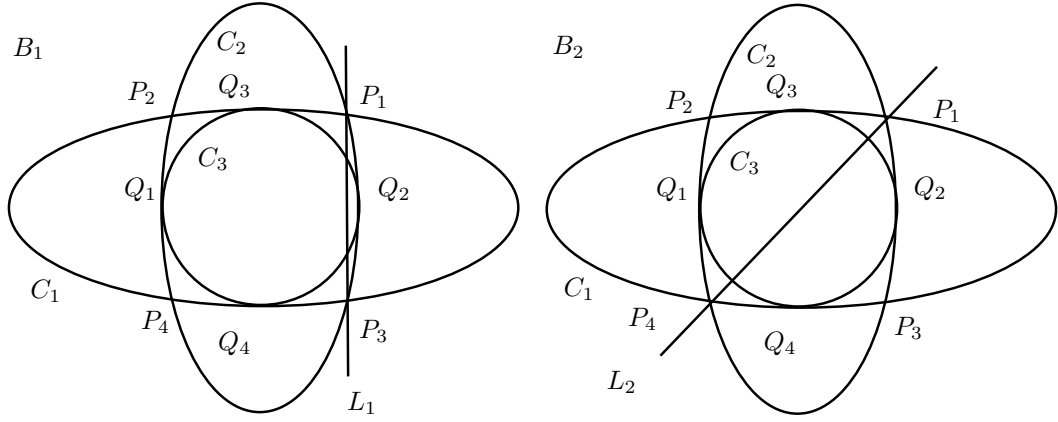
C_1, C_2, C_3 はすべて非特異な 2 次曲線, L_1 は L_2 は直線で以下の条件を満たすものとする:

- (i) C_1 と C_2 は横断的に交わる. $C_1 \cap C_2 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ とおく.
- (ii) C_3 は C_1 及び C_2 に各交点での交点数が偶数になるように接する. 必要なら C_1 と C_2 を取り替えると, 以下の 3 通りのどれかが起きているとしてよい:
 - (a) $C_3 \cap C_1 = \{Q_1, Q_2\}, C_3 \cap C_2 = \{Q_3, Q_4\}$.
 - (b) $C_3 \cap C_1 = \{Q_1\}, C_3 \cap C_2 = \{Q_2, Q_3\}$.
 - (c) $C_3 \cap C_1 = \{Q_1\}, C_3 \cap C_2 = \{Q_2\}$.
- (iii) 各 Q_i における接線は $C_1 + C_2$ の 2 重接線 (bitangent line) でない.
- (iv) L_1 は P_1 と P_3 を通る.
- (v) L_2 は P_1 と P_4 を通る.
- (vi) L_1 及び L_2 共に C_3 と横断的に交わる.

$B_1 := C_1 + C_2 + C_3 + L_1$, $B_2 := C_1 + C_2 + C_3 + L_2$ とおく. B_1 と B_2 は same combinatorics をもつ.



Conic-line arrangement 1 of type (a)



Conic-line arrangement 2 of type (a)

ここでは、明示的に与えられた有理楕円曲面とそのうえの切断を利用して以下の二つの条件を満たす conic-line arrangement の対の例を与える。より一般の statement や証明の詳細については [16] を参照されたい。

Theorem 6 (i) conic-line arrangement の対 (B_1, B_2) で、(イ) B_i ($i = 1, 2$) は Conic-line arrangement 1 で述べた combinatorics をもつ、(ロ) (B_1, B_2) は Zariski 対である、を満たすものが存在する。

(ii) conic-line arrangement の対 (B_1, B_2) で、(イ) B_i ($i = 1, 2$) は Conic-line arrangement 2 で述べた combinatorics をもつ、(ロ) (B_1, B_2) は Zariski 対である、を満たすものが存在する。

1 例の構成

Example 1.1 $[T, X, Z]$ は $\mathbb{P}^2$ の同次座標 $(t, x) := (T/Z, X/Z)$ は $Z = 0$ を無限遠直線とおいたときの $\mathbb{P}^2$ の非同次座標とする。以下のような 2 次曲線 C_1 と 4 つの直線 L_1, L_2, L_3, L_4 を考える：

$$\begin{aligned} C_1 : x - t^2 &= 0, & L_1 : x - 3t + 2 &= 0, & L_2 : x + 3t + 2 &= 0, \\ L_3 : x - t - 2 &= 0, & L_4 : x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

$C_1 \cap (L_1 \cup L_2) = \{[\pm 1, 1, 1], [\pm 2, 4, 1]\}$ であることに注意する。 $Q_1 = C_1 + L_1 + L_2$ とおき、 $z_o = [0, 1, 0]$ とおく。 S'_1 は Q_1 で分岐する $\mathbb{P}^2$ の 2 次被覆とする。 z_o を通る直線のペンシルは S'_1 上に種数 1 の曲線束 Λ_{z_o} を引き起こす。 S'_1 の特異点を解消し、さらに $\Lambda_{z_o, 1}$ の base point を解消すると有理楕円曲面 $\varphi_{z_o, 1} : S_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ をえる。この有理楕円曲面は Weierstrass 方程式

$$S_1 : y^2 = (x - t^2)(x - 3t + 2)(x + 3t + 2).$$

で与えられる楕円曲面である。

この設定のもと、 S_1 の切断 $s_{L_i}^\pm (i = 3, 4)$ を以下のように選ぶ：

$$s_{L_3}^\pm = (t + 2, \pm 2\sqrt{2}(t - 2)(t + 1)) \quad s_{L_4}^\pm = (1, \pm 3(t + 1)(t - 1)).$$

S_1 の生成ファイバーを $\mathbb{C}(t)$ 上の楕円曲線とみて、楕円曲線上の‘2 倍’写像を計算すると、

$$[2]s_{L_3}^+ = (\frac{9}{8}t^2, \frac{1}{32}t\sqrt{2}(9t^2 - 16)), \quad [2]s_{L_4}^+ = (t^2 + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}t^2 - \frac{9}{8})$$

を得る。ここで、

$$C_2 : x - \frac{9}{8}t^2 = 0, \quad C'_2 : x - t^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

とおく。 $\mathcal{Q}_1 + C_2 + L_3$ と $\mathcal{Q}_1 + C_2 + L_4$ はともに Conic-line arrangement 1 of type (a) の combinatorics をもつ。また、 $\mathcal{Q}_1 + C'_2 + L_3$ と $\mathcal{Q}_1 + C'_2 + L_4$ はともに Conic-line arrangement 1 of type (b) の combinatorics をもつ。

p は奇素数、 D_{2p} は位数 $2p$ の二面体群とする。このとき、[16] より、

- $\mathcal{Q}_1 + C_2 + L_3$ (resp. $\mathcal{Q}_1 + C'_2 + L_4$) に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の D_{2p} -被覆で、 $\mathcal{Q}_1$ に沿って 2 重に分岐、 $C_2 + L_3$ (resp. $C'_2 + L_4$) に沿って p 重に分岐するものが存在する。
- $\mathcal{Q}_1 + C_2 + L_4$ (resp. $\mathcal{Q}_1 + C'_2 + L_3$) に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の D_{2p} -被覆で、 $\mathcal{Q}_1$ に沿って 2 重に分岐、 $C_2 + L_4$ (resp. $C'_2 + L_3$) に沿って p 重に分岐するものは存在しない。

が従う。故に、 $(\mathcal{Q}_1 + C_2 + L_3, \mathcal{Q}_1 + C_2 + L_4)$, $(\mathcal{Q}_1 + C'_2 + L_3, \mathcal{Q}_1 + C'_2 + L_4)$ はともに Zariski 対となる。

Example 1.2 座標に関する記号は Example 1.1 のものを踏襲する。

Conic-line arrangement 2 of type (a).

以下の定義方程式で与えられる 2 次曲線 C_1, C_2 と直線 L_1, L_2 を考える：

$$\begin{aligned} C_1 : x - t^2 + 2 &= 0, & C_2 : x^2 - 2x + t^2 - 4 &= 0, \\ L_1 : x - t &= 0, & L_2 : x - 3t + 4 &= 0. \end{aligned}$$

$C_1 \cap C_2 = \{[\pm 2, 2, 1], [\pm 1, -1, 1]\}$ であることに注意する。 $\mathcal{Q}_2 = C_1 + C_2$, $z_o = [0, 1, 0]$ とおく。 Example 1.1 と同様、 S'_2 を $\mathcal{Q}_2$ で分岐する $\mathbb{P}^2$ の 2 次被覆とすれば、 z_o を通る直線のペンシルは S'_2 上に種数 1 の曲線束 $\Lambda_{z_o, 2}$ を引き起こす。 S'_2 の特異点を解消し、さらに $\Lambda_{z_o, 2}$ の base point を解消すると有理楕円曲面 $\varphi_{z_o, 2} : S_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ を得る。この有理楕円曲面は Weierstrass 方程式

$$y^2 = (x - t^2 + 2)(x^2 - 2x + t^2 - 4).$$

で与えられる楕円曲面である。この設定のもと S_2 の切断 $s_{L_i}^\pm (i = 1, 2)$ を以下のように選ぶ：

$$s_{L_1}^\pm = (t, \pm \sqrt{-2}(t + 1)(t - 2)), \quad s_{L_2}^\pm = (3t - 4, \pm \sqrt{-10}(t - 1)(t - 2)).$$

すると、Example 1.1 と同様にして、

$$[2]s_{L_1}^+ = (\frac{1}{2}t^2 - 2, -\frac{1}{4}\sqrt{-2}t(t^2 - 4)), \quad [2]s_{L_2}^+ = (\frac{1}{10}t^2 - 2, -\frac{3}{100}\sqrt{-10}t(t^2 + 20)).$$

を得る. ここで,

$$C_3 : x - \frac{1}{2}t^2 + 2 = 0, \quad C'_3 : x - \frac{1}{10}t^2 + 2 = 0$$

とおく. $\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_1$, $\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_2$, $\mathcal{Q}_2 + C'_3 + L_1$, $\mathcal{Q}_2 + C'_3 + L_2$ はすべて Conic-line arrangement 2 of type (a) の combinatorics をもつ. Example 1.1 と同様にして, [16] より,

- $\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_1$ (resp. $\mathcal{Q}_2 + C'_3 + L_2$) に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の D_{2p} -被覆で, $\mathcal{Q}_1$ に沿って 2 重に分岐, $C_3 + L_1$ (resp. $C'_3 + L_2$) に沿って p 重に分岐するものが存在する.
- $\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_2$ (resp. $\mathcal{Q}_2 + C'_3 + L_1$) に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の D_{2p} -被覆で, $\mathcal{Q}_2$ に沿って 2 重に分岐, $C_3 + L_2$ (resp. $C'_3 + L_1$) に沿って p 重に分岐するものは存在しない.

が従う. 故に, $(\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_1, \mathcal{Q}_2 + C_3 + L_2)$, $(\mathcal{Q}_2 + C'_3 + L_1, \mathcal{Q}_2 + C'_3 + L_2)$ はともに Zariski 対となる.

Conic-line arrangement 2 of type (b).

Conic-line arrangement 2 of type (a) で考えた楕円曲面 $\varphi_{z_0,2} : S_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ とつぎの定義方程式で与えられる直線 L_1, L_2 を考える.

$$L_1 : x - t = 0, \quad L_2 : x + 1 = 0.$$

L_2 から定まる S_2 の切断を

$$s_{L_2}^\pm = (-1, \pm\sqrt{-1}(t-1)(t+1)).$$

とおく. すると,

$$[2]s_{L_2}^+ = \left(t^2 - \frac{17}{4}, \frac{3}{8}\sqrt{-1}(4t^2 - 19) \right).$$

を得る. ここで,

$$C_3 : x - t^2 + \frac{17}{4} = 0.$$

とおく. すると, 2 次曲線 C_3 は C_1 には 1 点で, C_2 には相異なる 2 点で接することがわかる. C_3 と L_i ($i = 1, 2$) の交わりを考えると $\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_1$ と $\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_2$ はともに Conic-line arrangement 2 of type (b) の combinatorics をもつ. さらに, これまでと同様にして, [16] より,

- $\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_2$ に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の D_{2p} -被覆で, $\mathcal{Q}_2$ に沿って 2 重に分岐, $C_3 + L_2$ に沿って p 重に分岐するものが存在する.
- $\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_1$ に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の D_{2p} -被覆で, $\mathcal{Q}_2$ に沿って 2 重に分岐, $C_3 + L_1$ に沿って p 重に分岐するものは存在しない.

が従う. 故に, $(\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_1, \mathcal{Q}_2 + C_3 + L_2)$, は Zariski 対となる.

Conic-line arrangement 2 of type (c).

以下の定義方程式で与えられる 2 次曲線 C_1, C_2 と直線 L_1, L_2 を考える：

$$\begin{aligned} C_1 : x - t^2 + \frac{1}{2} &= 0, & C_2 : x^2 - x + t^2 &= 0, \\ L_1 : x &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & L_2 : \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{-1}c_1 - c_2)x + t - \frac{1}{4} (\sqrt{-1}c_1 + c_2) &= 0, \end{aligned}$$

ただし, $c_1 = \sqrt{2+2\sqrt{2}}, c_2 = \sqrt{-2+2\sqrt{2}}$ とする. このとき,

$$C_1 \cap C_2 = \left\{ \left[\pm \sqrt{-1/2 + 1/\sqrt{2}}, 1/\sqrt{2}, 1 \right], \left[\pm \sqrt{-1/2 - 1/\sqrt{2}}, -1/\sqrt{2}, 1 \right] \right\}.$$

である. $\mathcal{Q}_3 = C_1 + C_2$ とし, $z_o = [0, 1, 0]$ とおく. これまでの例と同様に, $\mathcal{Q}_3$ に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の 2 次被覆上で z_o を通る直線のペンシルから得られる種数 1 の曲線束の固定点を除去して, 有理楕円曲面 $\varphi_{z_o,3} : S_3 \rightarrow \mathbb{P}^1$ を得る. この楕円曲面は Weierstrass 方程式

$$y^2 = \left(x - t^2 - \frac{1}{2} \right) (x^2 - x + t^2).$$

で与えられている. ここで, L_1, L_2 から定まる S_3 の切断を

$$s_{L_1}^\pm = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{\sqrt{-1}}{2} (-2t^2 - 1 + \sqrt{2}) \right).$$

とおく. すると,

$$[2]s_{L_1}^+ = \left(t^2, \sqrt{-\frac{1}{2}}t^2 \right)$$

を得る. ここで,

$$C_3 : x - t^2 = 0$$

とおく. このとき, $\mathcal{Q}_3 + C_3 + L_1$ 及び $\mathcal{Q}_3 + C_3 + L_2$ は共に Conic-line arrangement 2 of type (c) の combinatorics を持つ. さらに, これまでと同じように [16] より,

- $\mathcal{Q}_3 + C_3 + L_1$ に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の D_{2p} -被覆で, $\mathcal{Q}_2$ に沿って 2 重に分岐, $C_3 + L_2$ に沿って p 重に分岐するものが存在する.
- $\mathcal{Q}_3 + C_3 + L_2$ に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の D_{2p} -被覆で, $\mathcal{Q}_2$ に沿って 2 重に分岐, $C_3 + L_1$ に沿って p 重に分岐するものは存在しない.

が従う. 故に, $(\mathcal{Q}_2 + C_3 + L_1, \mathcal{Q}_2 + C_3 + L_2)$ は Zariski 対となる.

参考文献

- [1] M. Amram, D. Garber and M. Teicher: *Fundamental groups of tangent conic-line arrangements with singularities up to order 6*, Math. Z. **256**, 837-870 (2007).

- [2] M. Amram, D. Garber and M. Teicher: *Fundamental groups of two tangent conics and an arbitrary number of tangent lines*, [arXiv:math/0612346v2](#).
- [3] M. Amram, M. Teicher and A. M. Uludag: *Fundamental groups of some quadric-line arrangements*, *Topology Appl.* **130**, 159-173 (2003).
- [4] E. Artal, J. Carmona, J.I. Cogolludo, and M.Á. Marco: *Topology and combinatorics of real line arrangements*, *Compos. Math.* **141** (2005), no. 6, 1578–1588.
- [5] E. Artal, J. Carmona, J.I. Cogolludo, and M.Á. Marco: *Invariants of combinatorial line arrangements and Rybnikov’s example*, *Singularity theory and its applications*, *Adv. Stud. Pure Math.* **43** (2007), 1–34.
- [6] E. Artal Bartolo, J.-I. Cogolludo and H. Tokunaga: *A survey on Zariski pairs*, *Adv.Stud.Pure Math.*, **50**(2008), 1-100.
- [7] E. Artal Bartolo and H. Tokunaga: *Zariski pairs of index 19 and Mordell-Weil groups of K3 surfaces*, *Proc. London Math. Soc.*, **80** (2000), 127 -144.
- [8] W. Barth, K. Hulek, C.A.M. Peters and A. Van de Ven: *Compact complex surfaces*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* **4** 2nd Enlarged Edition, Springer-Verlag (2004).
- [9] M. Friedman and D. Garber: *On the structure of fundamental groups of complements of conic-line arrangements*, [arXiv:math/1111.5291](#).
- [10] E. Horikawa: *On deformation of quintic surfaces*, *Invent. Math.* **31** (1975), 43 – 85.
- [11] R. Miranda: *Basic theory of elliptic surfaces*, *Dottorato di Ricerca in Matematica*, ETS Editrice, Pisa, 1989.
- [12] M. Namba and H. Tsuchihashi, *On the fundamental groups of Galois covering spaces of the projective plane*, *Geom. Dedicata* **104** (2004), 97–117.
- [13] H. Tokunaga: *Some examples of Zariski pairs arising from certain elliptic K3 surfaces*, *Math. Z.* **227** (1998), 465-477
- [14] H. Tokunaga: *Some examples of Zariski pairs arising from certain elliptic K3 surfaces II: Degtyarev’s conjecture*, *Math.Z.* **230** (1999), 389-400
- [15] H. Tokunaga: *Dihedral covers and an elementary arithmetic on elliptic surfaces*, *J. Math. Kyoto Univ.* **44**(2004), 55-270.
- [16] H. Tokunaga: *Sections of elliptic surfaces and Zariski pairs for conic-line arrangements via dihedral covers* to appear in *J. of Math. Soc. of Japan*.

- [17] O. Zariski: *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, Amer. J. Math. **51** (1929), 305–328.
- [18] O. Zariski: *The topological discriminant group of a Riemann surface of genus p* , Amer. J. Math. **59** (1937), 335–358.