

Box 乱流の大規模 DNS 結果から見た Channel 乱流

名古屋大学大学院工学研究科 石原 卓 (Takashi Ishihara)

Graduate School of Engineering, Nagoya University

名古屋大学大学院工学研究科 長田将明 (Masaaki Osada)

Graduate School of Engineering, Nagoya University

名古屋大学大学院工学研究科 金田行雄 (Yukio Kaneda)

Graduate School of Engineering, Nagoya University

1 はじめに

乱流中には大小様々なスケールの渦が混在する。コルモゴロフの理論 [1] によると、最も多くのエネルギーを保有する渦のスケール L とエネルギー散逸が支配的となるスケール η (コルモゴロフ長) の比はレイノルズ数 Re の 4 分の 3 乗に比例して大きくなり、乱流の自由度 ($\sim (L/\eta)^3$) が $Re^{9/4}$ に比例して大きくなることが導かれる。これにより、高レイノルズ数乱流の特徴のひとつは L/η もしくは自由度が非常に大きいことであると言える。

乱流の他の特徴のひとつとして、流れの不安定性もしくは誤差への敏感さがある。実際、乱流場を表す相空間の軌道は初期の誤差に敏感であることが数値実験により確認されており、そこでは、誤差が渦のスケールに依存して、時間のあるべき乗に従って大きくなることが示されている [2]。この事実は乱流場の予測の不可能性 (困難さ) を示唆している。一方、別の数値実験では、大きいスケールの渦を同化してやると小さいスケールの渦が再生する、すなわち小スケール渦が大スケール渦に従属的であることが示されており [3, 4]、これは (小スケール渦の) 「予測可能性」を示唆する事実として大変興味深い。

以上から、乱流は単純に超多自由度であるだけではなく、スケールに応じて個性の異なる渦 (自由度) が混在・相互作用している系であるということもできる。このような乱流の統計的性質を理解・予測するひとつの支えはコルモゴロフ的な普遍性である (乱流にある種の普遍性がない場合、個別の対応が必要となる) と考えられるが、残念ながら、そのコルモゴロフ的普遍性は (もしあるとしても) 「十分高い Re 、十分小さなスケール」にしかありそうになく、この「十分」の定量的意味についても良く分かっていない。

そこで、我々は、とりあえず「十分高い Re 、十分小さなスケール」に普遍性があると仮定して、なるべく「高い Re 、小さなスケール」のいわば漸近的普遍性をできるだけ大規模な直接数値計算 (DNS) で追求してみようと考え、Box 乱流の超大規模 DNS (最大格子点数 4096^3) [5, 6] と Channel 乱流の大規模 DNS (最大格子点数 $1024 \times 512 \times 1024$) を実施してきた。

本研究では Box 乱流の超大規模 DNS で得られた知見を基に Channel 乱流のデータ解析をした結果について報告する。Channel 乱流のデータ解析では特に 2 点速度相関に着目し、それを特徴つける各種長さスケールのレイノルズ数依存性、方向依存性、壁からの距離依存性について詳細に調べた。以下では、まず第 2 節で Box 乱流の超大規模 DNS で得られた知見について簡単に触れ、第 3 節では Channel 乱流の DNS 結果を報告し、最後に第 4 節でまとめを行う。

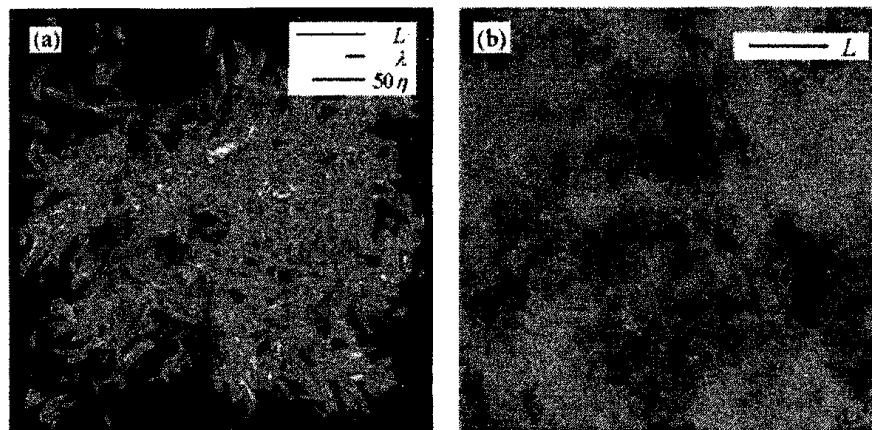


図 1: (a) Intense-vorticity isosurfaces showing the region where $\omega > \langle \omega \rangle + 4\sigma_\omega$. The size of the display domain is $367^3 \eta^3$, periodic in the vertical and horizontal directions. $R_\lambda = 94$. (b) Intense-vorticity isosurfaces showing the region where $\omega > \langle \omega \rangle + 4\sigma_\omega$. $R_\lambda = 732$. The size of the display domain is $(5984^2 \times 1496) \eta^3$, periodic in the vertical and horizontal directions. From [7]

2 Box 乱流の大規模 DNS

Box 乱流の DNS とは周期境界条件下で行う一様等方性乱流の DNS のことであり、乱流の本質のみを残して最も簡単化した問題 (カノニカルな問題) としてよく知られている。Box 乱流の DNS を用いて乱流の普遍性を追求した研究はこれまでも多くなされてきたが、実現できる Re はあまり大きいものではなかった。我々のグループは 2002 年に格子点数 4096^3 の Box 乱流 DNS を実現し、それ以前の DNS (格子点数 1024^3 以下) の 512 倍の自由度をもつ乱流場のデータ解析を可能とした [5, 6]。この超大規模 DNS により、単に量的に自由度が増えただけではなく、いくつか質的に新しい乱流の性質が見えてきている。以下では、そのうちのいくつかを紹介する。

図 1 は、格子点数 $N^3 = 256^3$ ($R_\lambda = 94$) と $N^3 = 2048^3$ ($R_\lambda = 732$) の乱流場における渦度集中領域 ($\omega > \langle \omega \rangle + 4\sigma_\omega$) を可視化したものである。ここで $\langle \omega \rangle$ と σ_ω は各々渦度の大きさの平均と標準偏差を表す。図 1(a) では渦集中領域が管状の構造をしており、「少数の渦管が場を支配している」という印象を受ける。これは乱流場が少数自由度系として記述できるのではないかという希望を抱かせる。一方、図 1(b) では、拡大してみる (拡大図は省略) と図 1(a) で見られたような渦管が観察されるものの場全体のスケールと比べそれらは非常に小さく、少数の渦管が場を支配しているようには見えない。むしろ、多数の渦管が集合体 (クラスター) を形成しており、集合体形成のメカニズムと集合体のダイナミクスが乱流理解の鍵を握っているのではないかと思わせる。なお、格子点数 4096^3 の同様な図 (省略) では、大小様々なサイズのクラスターが観測され、それはクラスターの階層構造を示唆するものであ

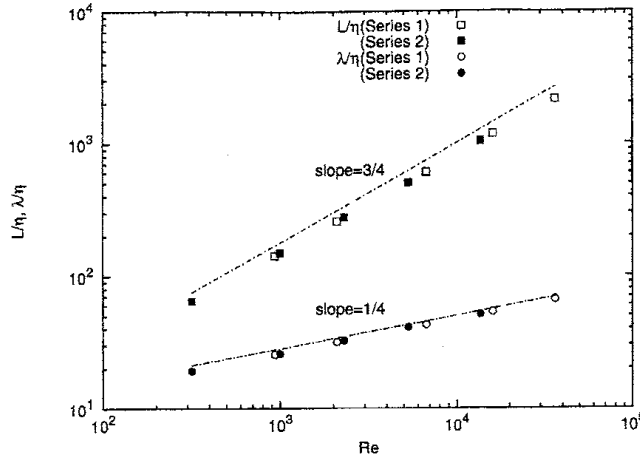


図 2: L/η and λ/η vs. Re . From [7]

た. いずれにせよ, 図 1(b) や 4096^3 の DNS による同様の図からは図 1(a) と異なり, 高レイノルズ数乱流においては少数自由度系による記述は困難であるという印象を受ける.

図 1(a) と図 1(b) で受ける印象の違いは大小渦のスケール比として定量的にみることができる. 図 2 は地球シミュレータで行った一連の DNS で得られた乱流場のデータより, L/η と λ/η を求め, レイノルズ数 $Re = Lu'/\nu$ の関数として図示したものである. ここで L は積分長, λ はテラーマイクロスケール, u' は速度成分の rms, ν は動粘性係数である. 図 2 より L/η 及び λ/η は各々 $Re^{3/4}$, $Re^{1/4}$ に比例していることが分かる. 2 本の直線で囲まれる領域の広さは慣性小領域の広さの目安を与えており, $Re \approx 300 (R_\lambda \approx 90)$ では L と λ のスケール比が高々 3 程度であるのに対し, $Re \approx 15,000 (R_\lambda \approx 730)$ では 200 程度になっていることが分かる. 実際, $R_\lambda \approx 90$ 程度では慣性小領域は存在しないが, $R_\lambda \approx 730$ ともなるとエネルギースペクトル $E(k)$ が $k^{-5/3}$ となり, エネルギー流束関数 $\Pi(k)$ が一定となる広い波数領域 (慣性小領域) を確認することができる (図省略).

この他, (I) $R_\lambda = 100 \sim 300$ の DNS の結果と (II) $R_\lambda = 400 \sim 1200$ の DNS の結果の間で質的な違いがあるものとして, 以下のものがある.

- (I) 無次元化したエネルギー散逸率 $\langle \epsilon \rangle L/u^3$ の値がバラバラ, (II) 一定値 (≈ 0.4) に漸近する [6],
- (I) 速度の空間微分の skewness が一定, (II) Re の増加関数に転じる,
- (I) 速度の空間微分の 4 次モーメントを特徴つける 4 つの回転不変量が異なる Re 依存性を持つ, (II) Re 依存性が似てくる (あるべき則),
- (I) 圧力のスペクトル $P(k)$ がコルモゴロフの理論 ($P(k) \propto k^{-7/3}$) に従わない, (II) $P(k) \propto k^{-7/3}$ に漸近してくる [8],

- (I) エネルギー散逸率とエンストロフィーのスペクトル形が異なる, (II) 散逸領域のスペクトル形は異なるが慣性小領域では一致してくる (あるべき則)[8].

また, 上記の他, (II) による新たな発見として以下のものがある.

- 慣性小領域のエネルギースペクトルが Kolmogorov の理論からわずかにずれる [6],
- 近散逸領域におけるエネルギースペクトルがある関数形によくフィットし, その関数形を定めるパラメータのレイノルズ数依存性が非常に緩やかである [9].

この他にも, 例えば, エネルギー流速の空間分布とスケール依存性について, コルモゴロフの 1962 年の理論を検証した結果についても新たな知見が得られているがここでは省略する.

以上, これまで行った一様等方性乱流の超大規模 DNS のデータ解析の結果を簡単にまとめたが, 以下では, 我々が最近行った Channel 乱流の大規模 DNS の結果を報告し, 最後に一様等方性乱流の超大規模 DNS のデータ解析の結果による知見を踏まえてまとめと考察を行う.

3 Channel 乱流の DNS

3.1 DNS の方法

Channel 乱流の DNS では, Kim ら [10] と同様に, 流れ方向 (x) とスパン方向 (z) に周期性を仮定し, ナヴィエ・ストークス方程式から非圧縮条件により圧力項を消去し, 従属変数を渦度の壁垂直方向 (y) 成分 g と速度の y 成分のラプラシアン ϕ とした方程式をスペクトル法 (フーリエ・チェビシェフタウ法) を用いて解いた. Moser ら [11] と同様に時間発展には非線形項に 3 段のルンゲクッタ法, 粘性項に陰的オイラー法を用いた. 非線形項の評価では, xz 方向のエイリアスエラーの除去を行った (y 方向のエイリアスエラーの除去は行っていないがエネルギースペクトルなどいくつかの統計量が y 方向のエイリアスエラーの有無に依らないことは確認した). 時間刻みは可変とし, Channel 中央の最大速度を考慮した CFL 条件が 0.5 以下になるようにした.

大規模な DNS を実行するに先立ち, Moser 等 [11] が Web で公開しているデータとほぼ同一の計算条件 (数種) で DNS を実行し, Web から入手できる統計量がほぼ一致することを確認した. 我々が行った Channel 乱流 DNS におけるパラメータを表 1 に示す. 表中の上添え字 + は距離を摩擦速度 u_τ と動粘性係数 ν で規格化したことを示す. 表 1 において Case 1, 2, 4 は Moser 等のデータと比較するために行ったものである. また Case 3 は Channel Box のサイズの影響を調べるために Case 2 と同じ条件で x, z 方向の Box サイズだけ 2 倍にした DNS である. Case 5 が今回行った Channel 乱流 DNS の内, 最も大規模のものである. なお, 以下に示す各種統計データは Case 1, 2, 3 については 10 wash out, Case 4 は 36 wash out, Case 5 は 10 wash out 分の時間平均を取ったものである. なお, ここで 1 wash out とは平均流量が x 方向の 1 周期分流れるのにかかる時間である.

表 1: Parameters in DNS of channel turbulence

Case No.	Re_τ	L_x	L_z	$N_x \times N_y \times N_z$	Δx^+	Δy_c^+	Δz^+
Case 1	175	$4\pi h$	$4/3\pi h$	$128 \times 128 \times 128$	17.2	5.7	4.3
Case 2	392	$2\pi h$	πh	$256 \times 256 \times 256$	9.6	4.8	4.8
Case 3	393	$4\pi h$	$2\pi h$	$512 \times 256 \times 512$	9.6	4.8	4.8
Case 4	578	$2\pi h$	πh	$384 \times 256 \times 384$	9.5	7.1	4.7
Case 5	1299	$2\pi h$	πh	$1024 \times 512 \times 1024$	8.0	8.0	4.0

3.2 DNS の結果

ここでは、Channel 乱流の 2 点速度相関について調べた結果を報告する。2 点速度相関は、考える速度成分 (u, v, w) 、考える 2 点の方向 (x, y, z) により異なる。例えば、主流方向速度成分 u の主流方向 x 、スパン方向 z 及び壁垂直方向 y の 2 点速度相関 R_{uu}^x 、 R_{uu}^z 、 R_{uu}^y は各々以下のように定義される。

$$R_{uu}^x(y, r) = \frac{\langle u(x+r, y, z)u(x, y, z) \rangle}{\langle u(x, y, z)^2 \rangle}, \quad R_{uu}^z(y, r) = \frac{\langle u(x, y, z+r)u(x, y, z) \rangle}{\langle u(x, y, z)^2 \rangle},$$

$$R_{uu}^y(y, r) = \frac{\langle u(x, y+r, z)u(x, y, z) \rangle}{\langle u(x, y+r, z)^2 \rangle^{1/2} \langle u(x, y, z)^2 \rangle^{1/2}}.$$

ここで、 $\langle \rangle$ は壁に平行な xz 面での平均である。速度の y 成分 v や z 成分 w についても同様に定義される。これらの 2 点速度相関は壁からの距離及び 2 点間の距離 r の関数で Channel 乱流のレイノルズ数 Re_τ にも依存する。

2 点速度相関を特徴づける長さスケールとしては、積分長、Taylor マイクロスケールが考えられる。また、粘性散逸が支配的になる長さスケールとしてコルモゴロフ長があり、これは壁からの距離の関数となる。以下では特にこれらのスケールの壁からの距離依存性、及び、レイノルズ数依存性について詳しく調べる。なお、Case 3 以外はどれも Box サイズが大きくなり、考える速度成分によっては相関が計算領域の半分 (半周期) で落ちきらないため、積分長の評価が困難なものが存在した。Case 2 と比較して主流方向とスパン方向の Box サイズが倍である Case 3 ではそのような事はなく、Case 1, 2, 4, 5 で相関が小さくならないのは Box サイズが小さいことに起因すると考えられる。Case 2 と Case 3 の同じ 2 点速度相関の比較では、相関の半値幅 (r_{half} : 相関値が半分になる距離 r) はほぼ一致し、かつ半値幅が積分長の良い近似を与えることが確認できた。そこで、以下では積分長の代わりに半値幅に着目することにする。

図 3 は今回行った Case 1, 2, 4, 5 の DNS で得られた主流方向の平均速度 U^+ を y^+ の関数として図示したものである。図から Re_τ が大きくなるにつれ、 $U^+ \propto 1/0.4 \log(y^+) + 5.0$ となる、慣性低層が広がっている様子が観察できる。今回の DNS で最も Re_τ が大きい Case 5 ($Re_\tau \approx 1300$) では、 $30 < y^+ < 500$ 位が慣性低層に相当すると考えられる。

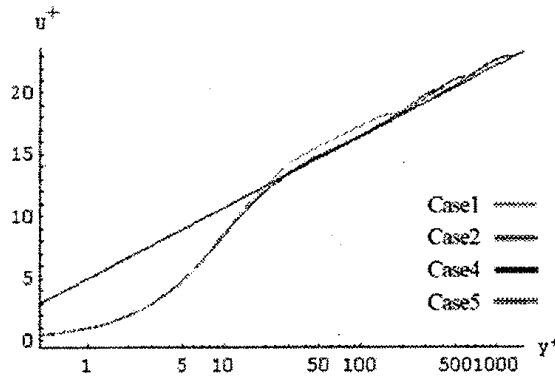


図 3: Mean flow U^+ as a function of y^+

上で定義した各種速度相関から求めた半値幅 r_{half} を y^+ の関数として図示したものからは、 r_{half} が慣性低層において y^+ のべき則に従う様子が観察できた。また、縦速度相関 $R_{uu}^x, R_{vv}^y, R_{ww}^z$ から求まる r_{half} の大きさを慣性低層において比較すると例えば $y^+ = 200$ において、 $r_{\text{half}}^x : r_{\text{half}}^y : r_{\text{half}}^z = 1 : 0.24 : 0.28$ であり、主流方向の長さスケールが他の方向に比べて大きい (約 4 倍程度) であることが分かった。

次に各種 2 点速度相関から Taylor マイクロスケール λ を定義して、その y^+ 依存性を調べた結果、半値幅のときと同様に慣性低層において y^+ のべき則に従う様子が観察できた。縦速度相関 $R_{uu}^x, R_{vv}^y, R_{ww}^z$ から求まるの大きさは慣性低層 ($y^+ = 200$) において、 $\lambda_{uu}^x : \lambda_{vv}^y : \lambda_{ww}^z = 1 : 0.55 : 0.66$ となり、半値幅と比べて非等方性の度合いが小さくなっている様子がわかる。また、同じ速度成分で 2 点の変位の向きを変えたものの比較では、例えば u について、 $\lambda_{uu}^x : \lambda_{uu}^y : \lambda_{uu}^z = 1 : 0.86 : 0.89$ (他の速度成分についても同様) となり、変位方向による非等方性が比較的弱いことがわかった。また、コルモゴロフ長 η の y 依存性については、 Re_τ が大きくなるにつれて、慣性低層で $\eta \propto (y^+)^{1/4}$ に近づいていく様子が観察できた。

次に、上で求めた Taylor マイクロスケールを基に R_λ を評価してみた。 R_λ も λ と同様に考える速度成分、考える変位の向き、壁からの距離に依存する。今回行った、最も大規模な DNS は Case 5 で Re_τ は 1300 程度である。Case 5 において R_λ が最も大きくなるのは速度成分として主流方向の変動成分 u の 2 点縦速度相関に基づくもので、 $y^+ \approx 600$ 程度における $R_{\lambda_{uu}}^x \sim 170$ であった。

4 まとめ

前節で Channel 乱流の大規模 DNS について、2 点速度相関を特徴つける各種長さスケールに着目したデータ解析結果を報告したが、 R_λ の値は $Re_\tau \sim 1300$ で高々 170 程度であった。 L/η や λ/η 等の値から判断して、これは一様等方性乱流 (Box 乱流) における格子点数

256³ 程度の DNS に相当する。現在 Jimenez らのグループが $Re_\tau \sim 4000$ 程度の Channel 乱流の超大規模 DNS を行っているという話があるが、我々の Channel 乱流の DNS データから外挿すると、それでも R_λ の値は高々 170 の 2 倍程度にしかない。

一様等方性乱流の超大規模 DNS を行ってきた知見からは、高レイノルズ数乱流の漸近的な振る舞いは $R_\lambda = 400 \sim 1200$ の DNS で初めて見えてきたものであり、 R_λ の値が 400 弱 ($Re_\tau \sim 4000$ 程度) では、Channel 乱流の高レイノルズ数における漸近的な振る舞いを議論するにはまだ十分に高いとはいえない。また、今後、工学的な要求に応えるような Channel 乱流のデータを DNS で構築するためには、より高速・大容量のスーパーコンピュータが必要であることが分かる。

参考文献

- [1] A. N. Kolmogorov: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30** (1941) 301.
- [2] Y. Yamazaki, T. Ishihara, and Y. Kaneda: *J. Phys. Soc. Jpn.* **71** (2002) 777.
- [3] K. Hayashi, T. Ishihara, and Y. Kaneda: in *Statistical Theories and Computational Approaches to Turbulence, Modern Perspectives and Applications to Global-Scale Flows*, edited by Y. Kaneda and T. Gotoh (Springer, New York, 2002), p. 239.
- [4] K. Yoshida, J. Yamaguchi, and Y. Kaneda: *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 014501.
- [5] M. Yokokawa, K. Itakura, A. Uno, T. Ishihara and Y. Kaneda: *Proc. the IEEE/ACM SC2002 Conference, Baltimore, 2002*, (<http://www.sc-2002.org/paperpdfs/pap.pap273.pdf>).
- [6] Y. Kaneda, T. Ishihara, M. Yokokawa, K. Itakura and A. Uno: *Phys. Fluids* **15** (2003) L21.
- [7] Y. Kaneda and T. Ishihara: *J. Turbulence* (2005) (to appear).
- [8] T. Ishihara, Y. Kaneda, M. Yokokawa, K. Itakura and A. Uno: *J. Phys. Soc. Jpn.*, **72** (5) (2003) 983.
- [9] T. Ishihara, Y. Kaneda, M. Yokokawa, K. Itakura and A. Uno: *J. Phys. Soc. Jpn.*, **74** (5) (2005) (to appear).
- [10] J. Kim, P. Moin, and R. D. Moser: *J. Fluid Mech.* **177**, (1987) 133.
- [11] R. D. Moser, J. Kim, and N. N. Mansour: *Phys. Fluids* **11** (4) (1999) 943.