

開水路局所流の機構について

宇 民 正

LOCAL BEHAVIOR OF OPEN CHANNEL FLOW

By *Tadashi* UTAMI

Synopsis

The behavior of a local flow near the abrupt contraction of a rectangular channel is investigated experimentally and analytically under the condition of a laminar main flow. The flow being three dimensional, the flow visualization method in which small air and hydrogen bubbles are applied is used successfully to measure the flow pattern and the velocity distribution. Analytically, the vorticity variation along streamlines is made clear. Because of the difficulty of three-dimensional analysis, however, the two dimensional model of the flow is constructed to analyze approximately the flow patterns under the assumption that the mass transport from one section parallel to the channel bed to another is reduced to the source or sink line along the contraction wall. The result obtained analytically shows a good agreement with the experimental flow patterns.

1. 概 説

水制・河川幅の急縮部あるいはもぐりぜきなど開水路隅角部前面に生じる三次元的な局所流を解明することは河川構造物の前面洗掘や流木などの浮遊物による災害現象を取扱かう基本となるとともに水理学上も非常に興味がある。本報告はこのような水理現象の機構を明らかにする目的で、一様長方形断面水路に急縮部を設けその前面に生じる流れの三次元的な機構を Flow Visualization の方法を用いて実験的に把握し、それを近似的な二次元モデルを設定して解析的検討を行なったものである。このような急縮部前面の局所流に関する研究は、従来解析的にはほとんど行なわれておらず、二次元モデルによる Yih¹⁾ の研究があるにすぎない。なお本研究では、局所流内の水の実質部分の運動機構に主眼をおき、低 Re 数の流れを対象とした。

2. 実験装置および実験方法

実験に用いた水路は透明アクリル樹脂製で、Fig. 1 に示したように幅 20 cm、長さ 6 m、こう配 1/500 であり、その中央付近に幅 4 cm の突出壁を水路の両側面からそれに直角方向に設けてある。流体としては低 Re 数の流れをうるために水を使わず、水とグリセリンとの混合液を用いて主流が層流となるようにした。その理由は、対象とする局所流の性質が主として慣性によって規制されているならば、層流の場合から乱流の平均的な性状が推測されうると考えたこと、および層流の場合は乱流の場合に比較して測定が容易であることである。実験は、流量 0.430 l/sec、水深 4.4 cm、動粘性係数 $\nu = 2.5 \text{ (cm}^2\text{/sec)}$ 、Re 数 = 10~20 で行なった。

流速あるいは流れのパターンの測定には、トレーサの写真撮影を用いる方法いわゆる Flow Visualization 法を採用した。トレーサとして、① グリセリン溶液中に無数に含まれている微細な空気泡を用いた場合と、② 1300 ボルトの直流電流で水の電気分解を行なうことにより生じる水素気泡を用いた場合との

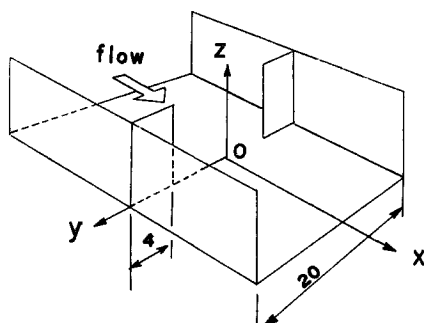


Fig. 1 Experimental channel and co ordinate system.

2種について実験を行なった。撮影に際しては、幅 0.5 mm のスリットを通して平行光線をあてて流れの一部を平面状に照明し、その平面に対して直角方向から断層写真をとる方法によった。

3. 実験結果と考察

① のトレーサーを用い、水路底面に平行な各断面における流れのパターンの写真観測結果を **Photo. 1** に示す。写真から、わずか数 mm の高低差で現象がいちぢるしく変化していることが明らかである。とくに、流れの表面付近では隅角部前面の渦はそれを構成する流体が渦領域の外と交換されることなく独自に回転しているが、流れの深さの中程の断面では渦を構成する流体がその領域の外から供給されており、また水路底面付近の断面では逆に渦領域からその外の領域へ流体が出て行っていることが特徴的に認められる。**Photo. 2** は同じく ① のトレーサーを用い水路側壁面に平行な各断面内の流れのパターンを示したものである。これらの写真で特徴的なことは、水路側壁面に近い断面では主流と逆方向で斜下向きの流れが存在する領域とその上流側で主流流下方向かつ斜下向きの流れが存在する領域との二つから主として成立っているが、水路側壁面から一定距離以上離れた断面では主流流下方向でかつ斜下向きの流れが主となり、主流と逆方向の流れは突出壁面と水路底面とはさまれた隅角部の近くのごく限られた部分にだけ観察されることである。さらに突出壁の先端近くの断面では突出壁面にごく近い部分を除いて流線は主流流下方向で水路底にほぼ平行になる。つぎにこれらの写真から流れの三次元的な流況について検討してみよう。**Fig. 2(a)**は写真で観察された渦の軸の位置を突出壁面 ($x=0$) に、**Fig. 2(b)**は側壁面 ($y=10$ cm) にそれぞれ射影したものを点線で示したものである。なお、座標系は **Fig. 1** のとおりである。**Fig. 2** から渦の軸は流れの深さの中程より高い所ではほぼ立っており、表面付近から深くなるにつれて側壁方向に偏する傾向にあるが、水路底に近づくにつれて次第に水平方向に向きを変え、最後にはほぼ水平方向となり、突出壁の先端をまわるようにして下流方向に延びていることが認められる。なお、**Fig. 2(a)**には、同時に写真から読みとった stagnation line が太い実線で記入してある。すなわちこれらの曲線の一方は流れを上下方向に分つものであり、他方は左右方向に分つものである。さらに、stagnation line の特性にしたがって stagnation line 近傍の突出壁面に沿う流線と同じく **Fig. 2(a)**に細い実線で示したが、この図から二つの stagnation line の交点 S は数学上の鞍形点を形成していることがわかる。

また **Fig. 3** は、各鉛直断面において、**Photo. 2** で黒く写っている部分を重ね合わせて図示したものである。この部分は上流で水路の側壁面の近傍にあった流体部分であり、泡を含まないためこのように黒く写ったものと考えられる。また、側壁面に垂直な方向に向かう気泡は **Photo. 2** で点群として写っているもので、それを含む領域のうち、渦を構成すると考えられるものを重ね合わせたものが **Fig. 4** である。図において $y=8.75$ cm の断面と $y=8.0$ cm の断面とを比較すると、領域の形が大幅に変化していることが認められるが、これは両断面の間に渦の中心が存在し、それによって流れの方向が著しく変化するためである。

以上の考察から渦の三次元的な模様がかなり明らかになった。すなわち、**Fig. 2(a)**の突出壁面上の PST

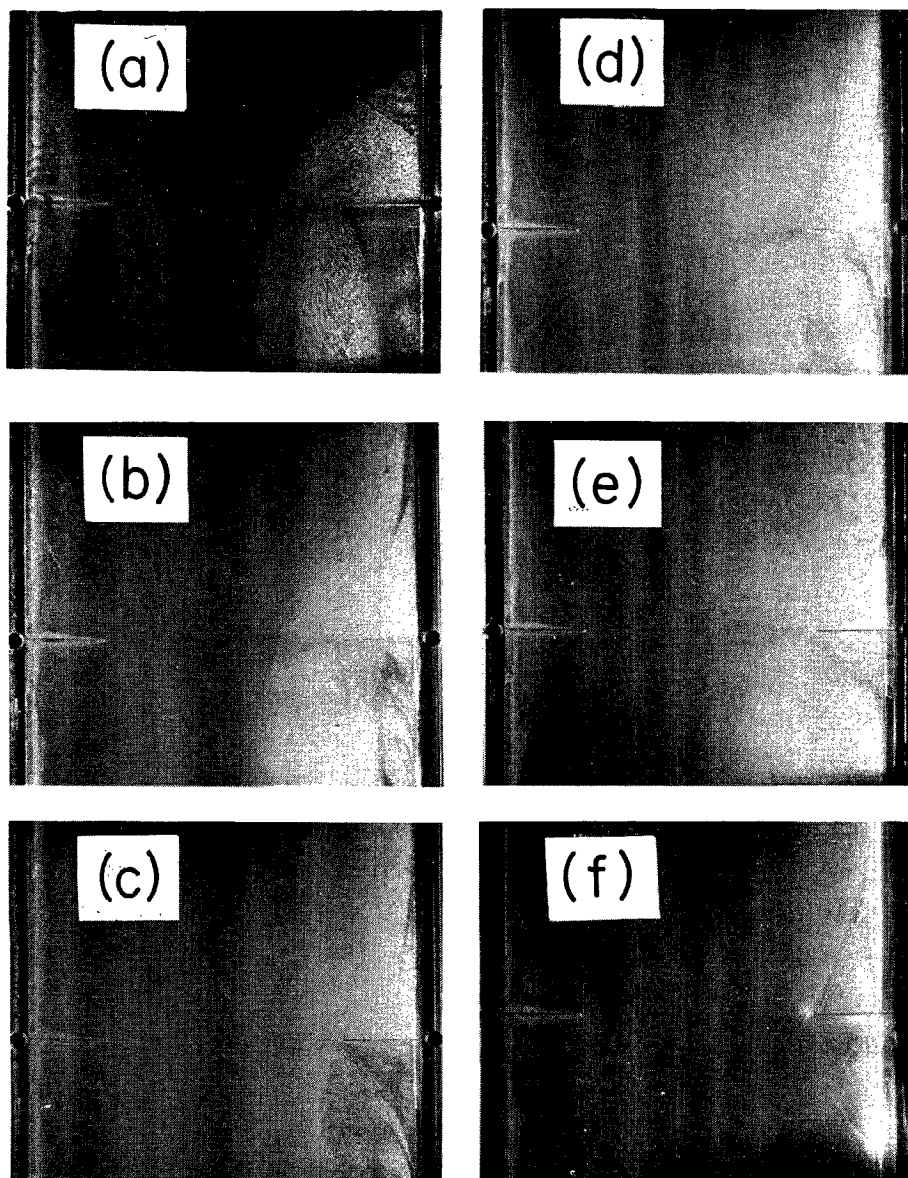


Photo. 1 Flow pattern in each section parallel to the channel bed.

(a) : $z=0.3$ cm, (b) : $z=1.0$ cm,
 (c) : $z=2.0$ cm, (d) : $z=2.5$ cm,
 (e) : $z=3.5$ cm, (f) : $z=4.5$ cm.

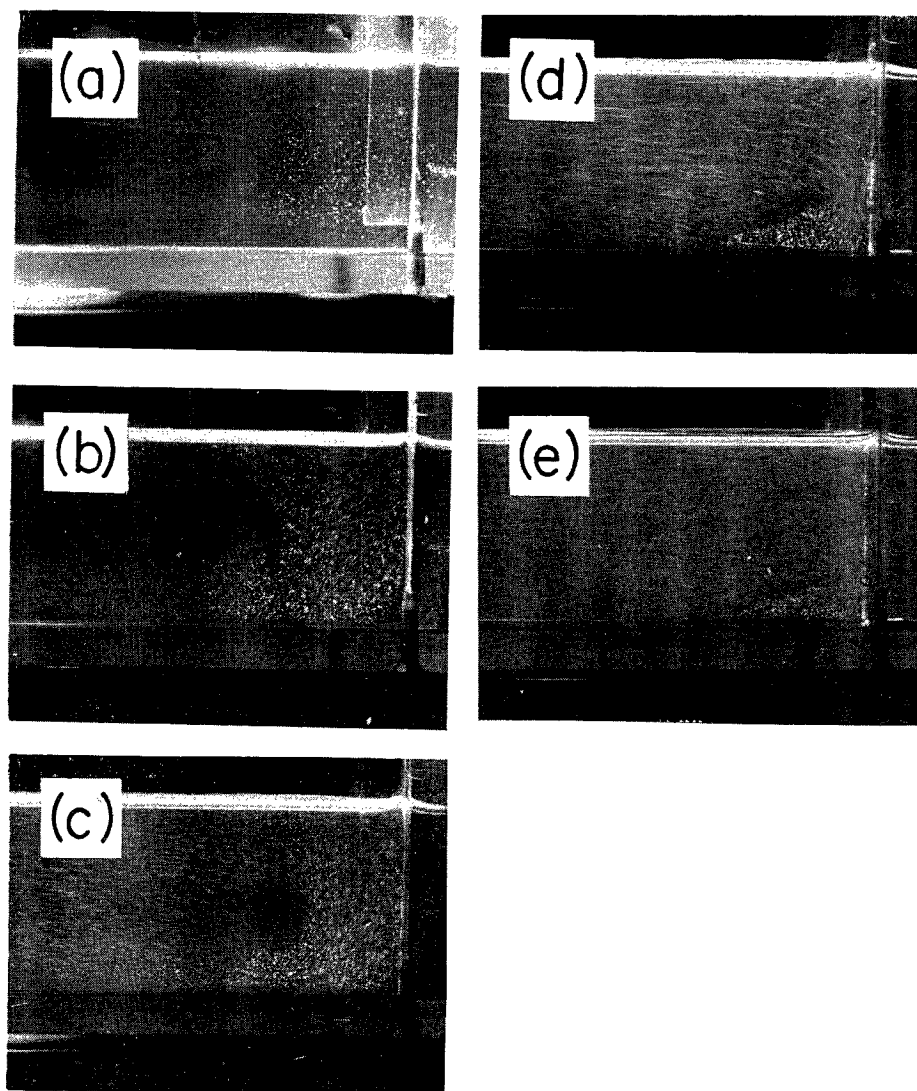


Photo. 2 Flow pattern in each section parallel to the side wall.

(a) : $y = 9.90$ cm, (b) : $y = 9.35$ cm,
(c) : $y = 8.75$ cm, (d) : $y = 7.60$ cm,
(e) : $y = 6.08$ cm.

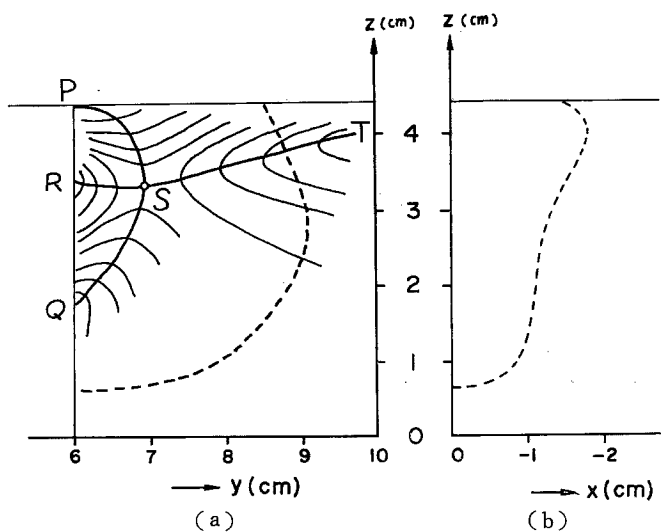


Fig. 2 Axis of corner vortex.

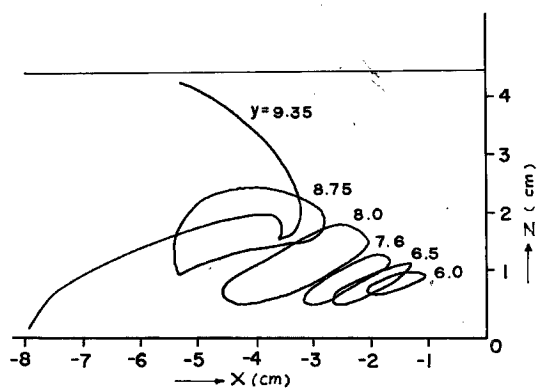


Fig. 3 Path domain of fluid which passes through the region near upstream side wall.

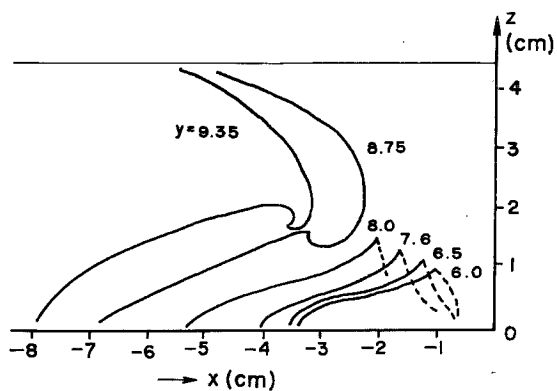


Fig. 4 Existence domain of fluid which has the direction of velocity perpendicular to side wall.

および TSQ の領域に上流域から接近する流体は、Photo. 1 の測定より、水路の側壁近くにありかつほぼ $z > 2 \text{ cm}$ の領域を通過したものであり、そのうち PST の領域に接近したものははじめほぼ鉛直な軸のまわりをまわるが、やがては Fig. 2 に示した渦の軸に平行な流速成分を生じ、丁度流出渦のように、渦軸をまわりながら下方に吸いこまれるようになって流下する。また、TSQ の領域に接近するものは、全体として渦軸をとりまくように、そのまわりをまわりながら開口部に向って流下する。一方、PSR および RSQ に接近する流体は RS の曲線で上下に分かれるのであるが、全体としてはそのまま開口部に流下してしまう。

以上によって、急縮部前面における流れの機構としては、突出壁先端で水深の浅い部分に接近する流体は、壁ではねかえされそのまま開口部に流下するが、突出壁面上で上記以外の部分に接近する流体は、全体として1つの軸のまがった渦の中をまわりながら開口部に流下し、あたかも流出渦の周辺部のような流況を呈することが明らかになった。急縮部前面の流れの場としては、上述の一種の流出渦に直接関係する領域と、ただ単に突出壁をまわる領域とが存在することになるが、この2つの領域を立体的かつ概念的に示すと Fig. 5 のとおりである。

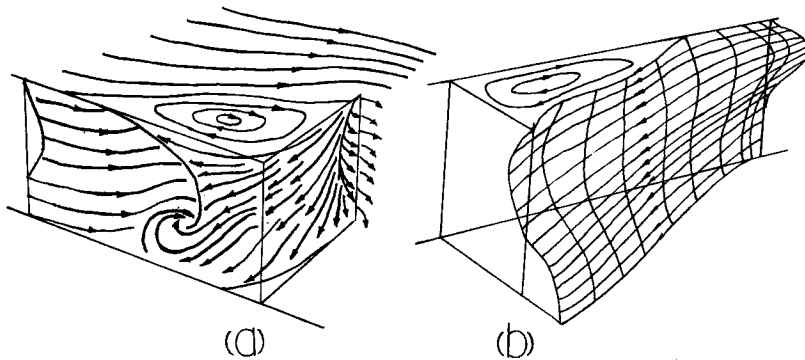


Fig. 5 Three dimensional flow pattern.

4. 理論的検討

以上に述べてきた所から、開水路隅角部の渦は三次元的であり、またそれを構成する流体は主流領域から供給されることが明らかになった。このような渦の機構は、橋脚前面に生じるいわゆる馬蹄渦について Roper²⁾ らが、渦度が橋脚により生成されるのではなく、剪断流中に既に存在していた渦度が橋脚により集中させられ、その結果として渦が生じると考えているのと同様である。これらのことから、まず流線に沿う渦度の変化について考察する。流体の運動方程式および連続の式

$$\mathbf{g} \cdot \text{grad } H = \mathbf{V} \times \text{curl } \mathbf{V} + \nabla^2 \mu \mathbf{V} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

から出発する。ここで $\mathbf{V}$ は流速ベクトル、 H は流体の単位質量あたりのエネルギー、 μ は粘性係数、 $\mathbf{g}$ は重力加速度である。Frenet Serret の座標系を採用する。すなわち、流線の接線方向に t 軸、主法線方向（曲率半径方向）に n 軸、そして t および n 軸に垂直な方向（陪法線方向）に b 軸をとり、各々の座標軸に沿う長さの単位要素を H_t 、 H_n および H_b で表わすと、(1) および (2) 式はつぎのように変形される。

$$\frac{\mathbf{g}}{H_t} \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla^2 \mu q \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\mathbf{g}}{H_n} \frac{\partial H}{\partial n} = \frac{q}{H_t H_n} \frac{\partial}{\partial n} (H_t q) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\mathbf{g}}{H_b} \frac{\partial H}{\partial b} = \frac{q}{H_t H_b} \frac{\partial}{\partial b} (H_t q) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$H_n H_b q = f_n(n, b) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで q は流速の絶対値であり、(6) 式の右辺は n と b との関数を表わす。上式から $\text{curl } \mathbf{V}$ の t , n および b 方向成分を計算すると、

$$(\text{curl } \mathbf{V})_t = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$(\text{curl } \mathbf{V})_n = \frac{1}{H_t H_b} \frac{\partial}{\partial b} (H_t q) = \frac{g}{q H_b} \frac{\partial H}{\partial b} = \frac{g H_n}{f_n(n, b)} \frac{\partial H}{\partial b} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$(\text{curl } \mathbf{V})_b = -\frac{1}{H_t H_n} \frac{\partial}{\partial n} (H_t q) = -\frac{g}{q H_n} \frac{\partial H}{\partial n} = -\frac{g H_b}{f_n(n, b)} \frac{\partial H}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (9)$$

(8) および (9) 式は変形されて

$$\frac{(\text{curl } \mathbf{V})_n}{H_n} = \frac{g}{f_n(n, b)} \frac{\partial H}{\partial b} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{(\text{curl } \mathbf{V})_b}{H_b} = -\frac{g}{f_n(n, b)} \frac{\partial H}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。(10) および (11) 式において、局所流において通常取扱われているように、 H が流線に沿って保存されるとするならば、すなわち $H = H(n, b)$ とするならば、両式の右辺は n と b のみの関数すなわち流線の関数となり、したがって $(\text{curl } \mathbf{V})_n / H_n$ および $(\text{curl } \mathbf{V})_b / H_b$ は流線上で保存されることがわかる。

以上の理論的検討によって、このような局所流を解析するには、近似的に、流線に沿って流体のもつ単位質量当りのエネルギーが保存され、かつ渦度も保存されるとしてよいことがわかった。しかしながら、前項で説明したように、流況がかなり三次元的であるので、その理論的解析はかなりめんどうになる。そこで、以下においては、流況が比較的二次元的であるような、水路底に平行な断面を対象とし、Yih が行なった解析と同様な手法によって二次元として取扱ったとき、どの程度の近似で流況が説明できるかを検討してみよう。

5. 二次元としての解析

水路底に平行な断面内の二次元流として取扱かうわけであるから、まずどのような深さの断面内の流れが二次元的であるかを調べなければならない。そのために、突出壁が設けられている横断面 ($x = 0$ cm) およびそれより 45 cm 上流の横断面 ($x = -45$ cm) における流速分布を ⑤ のトレーサーを用いて測定した。その測定写真の一例を **Photo. 3** に示す。写真において、急縮部断面に認められる 2 点とそれを結ぶ直線が電気分解の陰極であり、それより下にある数本の白いしま模様が発生した水素気泡群である。流速分布の測定結果を **Fig. 6** に示す。先に述べた渦領域への流体の供給関係を数量的に検討するため、 $z = 0.3, 0.5$,

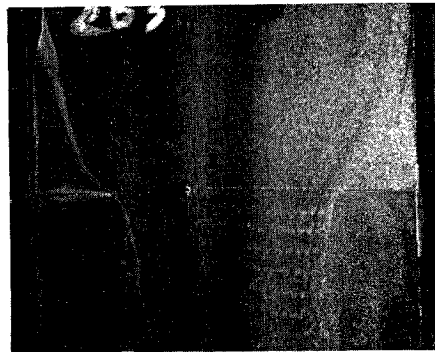


Photo. 3 Visualized velocity distribution by means of the hydrogen babble method.

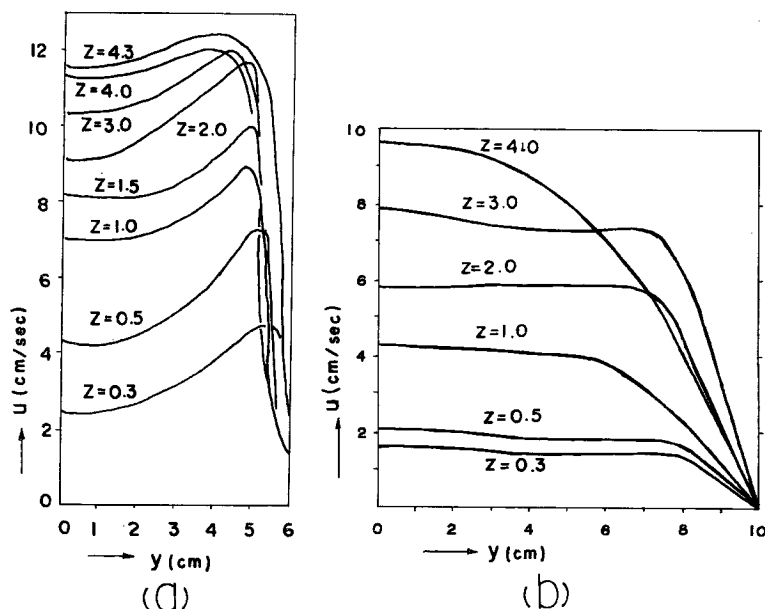


Fig. 6 Velocity distribution in the section (a) : $x=0$ cm and
(b) : $x=-45$ cm.

Table 1

z (cm)	Unit depth discharge (cm ³ /sec)		A—B (cm ³ /sec)	Central breadth of equal discharge	
	section $x=0$ (cm)	section $x=-45$ (cm)		section $x=0$ (cm)	section $x=-45$ (cm)
	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
0.3	38.80	26.61	12.19	9.00	20.00
0.5	61.53	33.51	28.02	7.32	20.00
1.0	81.70	66.74	14.96	9.00	20.00
1.5	94.28	—	—	—	—
2.0	109.75	101.52	8.23	10.06	20.00
3.0	118.61	132.14	-13.53	12.00	15.96
4.0	126.70	140.04	-13.34	12.00	15.26
4.3	137.08	—	—	—	—

1.0, 2.0, 3.0, 4.0 cm の各断面における単位深さあたりの流量の収支を計算した。その結果を Table 1 に示す。本表の ① および ② 欄は、同一平面内で連続式が成立している中央幅を求めたものである。すなわち、 $z \leq 2.0$ cm の各断面では横断面 $x=0$ cm の流量が横断面 $x=-45$ cm の流量より大きいので、横断面 $x=-45$ cm における流量に等しい流量を流す横断面 $x=0$ cm での中央幅を流量加積曲線から求め、また $z > 2.0$ cm の各断面ではその逆の操作を行なって求めたものである。

こうした計算結果から、 $z=2 \sim 3$ cm の間のある断面内で見かけ上（流線はこの断面に平行であるとは限らない）流量の連続性が保持されるが、 z がそれより大きいところでは突出壁断面での流量が少なく、逆に z が小さく底面に近いところでは突出壁断面での流量が大きくなっている。このことは、前述したような三次

元的流況のためであることはいうまでもなく、突出壁前面付近で流体が表面から水路底の方へ移動しているわけで、いわば z の大きいところでは吸込み、 z の小さいところでは吹出しが存在している流況である。

いま、非常に大胆であるが、突出壁前面に水平方向に一樣な強度をもつ吸込み、あるいは吹出しが存在していると仮定し、水路底に平行な断面内の流況を二次元的に取扱うことができるでしょう。二次元の場合には(11)式で $H_0 \equiv 1$ であるから流線に沿って単位質量あたりのエネルギーが保存されるとするならば、同じく流線に沿って渦度も保存されるという前節の結論に従って、流れ関数を ψ とすれば渦度は $-f(\psi)$ で表わされる。数学上の簡単な計算により次式が成立する。

$$\nabla^2 \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = f(\psi) \quad \dots\dots\dots (12)$$

上式を解けばよいわけであるが、任意の境界条件に対して解析解を求めることはむずかしい。そこで上述した諸特性を勘案し、かつこの計算が近似計算であることを考慮して、つぎの境界条件を設定してみる。すなわち、Fig. 7 に示すように、① 上流側流入部の流速分布は余弦型である。② 吹出しまたは吸込みは、突出壁前面において一樣に分布する。③ それらの単位長さあたりの強さは一定である。このうち②および③については先に考察した通りであり、また①についてはFig. 6の実験結果と比較して少々ずれているが、計算を容易にするためにこのように仮定した。Fig. 1 に示すように座標軸を設定するとき、上述の境界条件は、 $x = -\infty$ で $u/u_{max} = \cos(\pi y/2)$ 、 $x = 0$ かつ $0 \leq y \leq y_0$ で $u/u_{max} = \text{一定}$ 、 $x = 0$ かつ $y_0 \leq y \leq 1$ で $u/u_{max} = \text{一定}$ と書きかえられる。ただし、ここで u は流速、 u_{max} は断面最大流速、 y_0 は急縮部開口幅の半分である。この場合、 $x = -\infty$ で $\psi = (2/\pi) \sin(\pi y/2)$ となるから、(12)式は

$$\nabla^2 \psi = -\pi^2 \psi/4 \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。境界条件を書き直すとつぎのようになる。

- | | | |
|--|--|------------------------|
| (i) $y = 0$ で | $\psi = 0$ | } \dots\dots\dots (14) |
| (ii) $x = -\infty$ で | $\psi = (2/\pi) \sin(\pi y/2)$ | |
| (iii) $x = 0$ かつ $0 \leq y \leq y_0$ で | $\psi = 2\kappa y/\pi y_0$ | |
| (iv) $y = 1$ で | $\psi = 2/\pi$ | |
| (v) $x = 0$ かつ $y_0 \leq y \leq 1$ で | $\psi = 2/\pi + 2(\kappa - 1)(1 - y)/\pi(1 - y_0)$ | |

ここで $2(\kappa - 1)/\pi$ が全吹出し量である。ただし、 $\kappa > 1$ のときが吹出し、 $\kappa < 1$ のときが吸込みを意味する。以上の境界条件の下で(13)式を解くとつぎの解をうる。

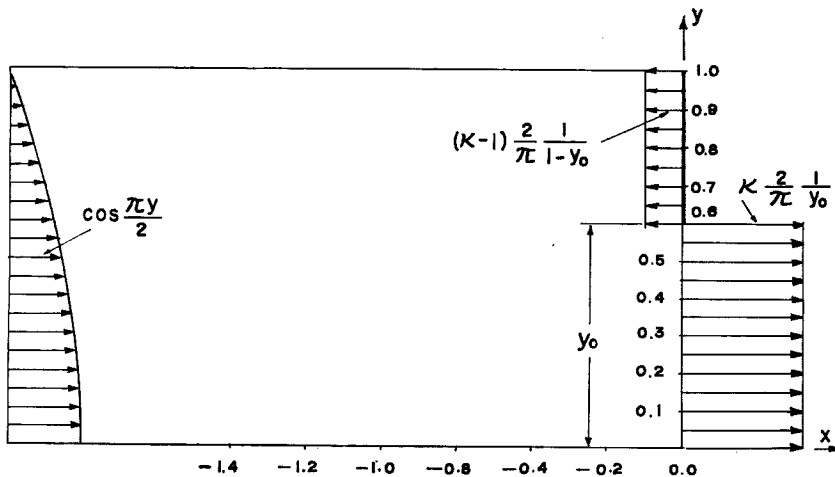
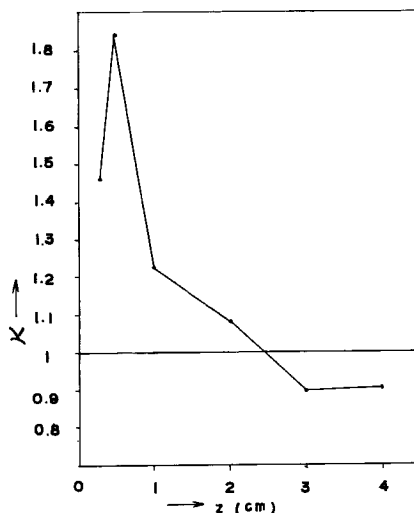


Fig. 7 Boundary conditions.

Fig. 8 Values of κ obtained by experiment.

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi y}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi y \cdot \exp \left(\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}} \pi x \right) \\ c_n &= \frac{4}{n\pi^2} \left(\frac{\kappa - y_0}{y_0(1 - y_0)} \frac{\sin n\pi y_0}{n\pi} - \frac{\cos n\pi}{1 - 4n^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

上の解法は Yih²⁾ の方法を参考にしたものであるが、彼の解は流出幅が無限小で吸込みや吹出しがない場合のものであり、(15) 式において $y_0 \rightarrow 0$, $\kappa = 1$ の場合に相当している。つぎに、実験的に Table 1 より κ の値を求めると Fig. 8 のようである。この図から水路底面から約 2.5 cm までの間は $\kappa > 1$ で吹出しであり、 $z = 2.5$ cm から水面までの間は $\kappa < 1$ すなわち吸込みがあること、また吹出しの強さは水路底から約 5 mm の断面で最大となっていることになる。ところで、 $\kappa = 1.2, 1.05, 1.0$ および 0.8 の各場合について (15) 式を計算した結果を Fig. 9 に示す。図からすぐ気づくことは、吹出しまたは吸込みが存在する場合には ($\kappa \neq 1$ の場合)、隅角部に渦が発生していないことである。すなわち $\kappa = 1$ の場合にのみ渦が発生することとなり、このような吹出しまたは吸込みを扱った二次元解析で、急縮部の三次元的な流況を解析するときの限界を示しているように思われる。ただし、吹出しの場合、主流と吹出し流との境界を表わす $\psi = 2/\pi$ の曲線は、二つの異った流れの境界を表わしている。そこで、Fig. 8 から κ の値が 1.08 および 1.22 となっている $z = 2.0$ cm および $z = 1.0$ cm のものについて、Photo. 1 から求めた主流域と渦領域との境界を、Fig. 9 の $\kappa = 1.05$, $\kappa = 1.2$ の計算結果と比較したものが Fig. 10 である。図中点線が計算結果であり、実線が測定結果であるが、Fig. 6 の上流境界での流速分布は Fig. 7 の余弦型流速分布とかなり異なっているにもかかわらず、この領域区分を示す曲線が大略一致している。このことは、少なくとも底面に近い部分で、Table 1 のような計算によって吹出しが存在すると仮定してよいような深さの底面に平行な断面内の流況において、主流域と渦領域との境界線が一樣な吹出しを仮定したときの (12) 式の解でほぼ表現できることを示すものと考えてよいだろう。

なお、流れの表面にみられる渦領域は Fig. 9 の $\kappa = 1$ に対応するはずであるが、Photo. 1 の結果と比較して、計算結果がせまい領域となっている。その原因はよくわからないが、Fig. 2 (a) の stagnation line から予想されるように、若干表面に向かう流れの成分が存在するためと考えられる。ちなみに、吹出しがあるものとする、 $\kappa > 1$ となるので、渦領域と主流域との境界線の測定結果を Fig. 10 に同時に示されているが、この境界線は $\kappa = 1.05$ の計算値とよく一致している。

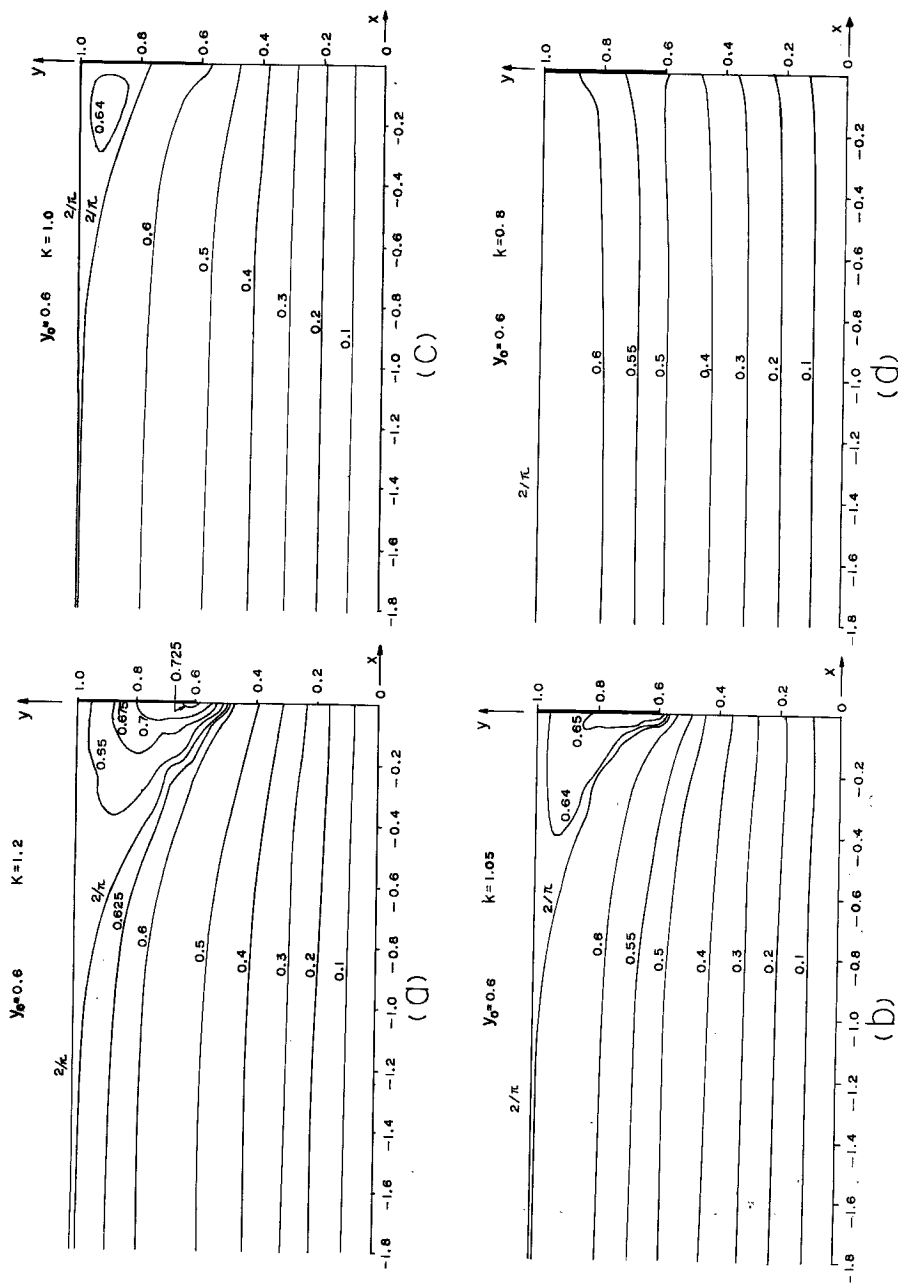


Fig. 9 Result of numerical calculation of eq. (15) for the case.

$y_0=0.6$ and (a) : $\kappa=1.2$ (b) : $\kappa=1.05$
(c) : $\kappa=1.0$ (d) : $\kappa=0.8$

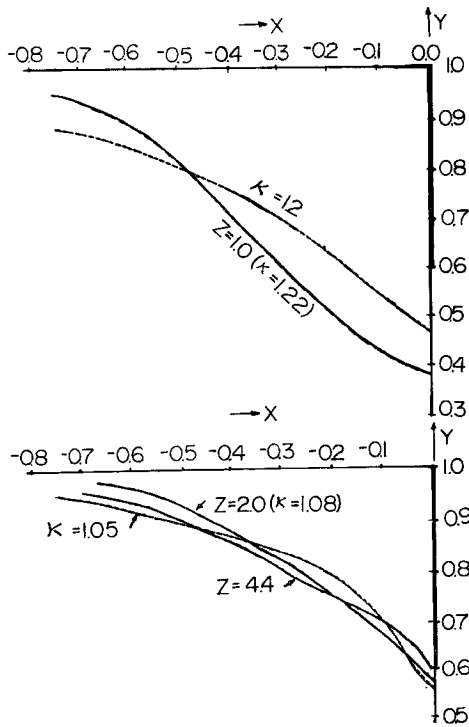


Fig. 10 Comparison of flow patterns between the calculated and experimental results.

6. 結 論

開水路急縮部前面における流れを、主流が層流の場合について実験的に把握し、さらに理論的解析を試みたが、えられた結果を要約するとつぎのとおりである。

1) 突出壁前面において2本の stagnation line が存在し、壁の上部でかつ開口部側の領域に接近する流体は、壁に突当った後開口部へ流れ去るような流況を呈す。一方、突出壁の残りの部分に接近する流体は、側壁と突出壁、および底面と突出壁で形成されている隅角部の方向に広がるが、それらの隅角線に沿うような曲った軸の渦が存在していてそのまわりをまわりながら、開口部の下層で突出壁の先端付近から流出する流況を呈し、あたかも曲った軸をもつ流出渦が存在しているような流れである。

2) このような渦に関係する領域と主流の領域との境界を実験的に明確にしたが、渦領域へ流入する流体は上流部の側壁の近傍でかつ表面に近い部分を流下してきたものである。

3) 理論的考察の結果、このような局所流を解析するに当たっては、流線に沿う単位質量当りのエネルギーおよび渦度が保存されるとしてよいことが示された。

4) 底面に平行な断面内について、流量が突出壁より吹出すようにしなければ連続性が保たれないような領域すなわち、水深の深いところには、渦領域と主流領域との境界線は、突出壁に沿って吹出しをおき、エネルギーと渦度が保持されたとした二次元解析によって解析できる。ただし、吹出しの強さは現在のところ実験的に定めなければならない。

以上、開水路急縮部前面における流れについて、その流況把握と理論的解析の可能性について検討した結果であるが、本文中でも述べたように、この流れは本質的に三次元流れであって、これを二次元的に取扱うときは自ら限界があるように思われる。したがって今後は三次元解析の方向で研究を続行するつもりである。

末筆になりますが、本研究を行なうにあたって、石原安雄教授の適切な御指導を賜ったことにつき、深甚の謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Yih, C. S.: J. Fluid Mechanics, Vol. 5, 1959, pp.36~40.
- 2) Roper, A. T., V. R. Schneider and H. W. Shen: 12th Proc. IAHR, Vol. 3, 1967.