

$\mathbb{Z}_p$ 上の測度の Γ -変換の λ -invariant について。

名大理 佐藤 潤也 (Junya Satoh)

虚abel体の岩澤invariantを考察する時、 Γ -変換の理論は有効である。 Sinnott は、[4]で μ -invariant に対しその理論を応用し、Ferrero-Washington の定理の新証明を与えた。 本稿では、 λ -invariant に対し Sinnott 流の解析を行い、 λ -invariant に関する関係式 (木田の公式[1], [2]) の初等的な証明を与える。

主も本質的な部分は、 Γ -変換の λ -invariantを $\mathbb{Z}_p$ 上の測度の λ -invariantに帰着させる所であるが、それに関して最初のが本質的に最終の結果は、木田の[3]である。 本稿では、第一部で [3]を少々一般化し、更に、より簡易化された証明を与える。 第二部ではその応用としてabel の場合の木田の公式を導く。

(1)

||第一部(一般論)||

p を素数とし、 $\mathbb{D}_p$ 上有限次拡大体の整数環 $\mathcal{O}$ の素idealを $\mathfrak{f}$ で表わす。また $\mathbb{Z}_p$ 上の $\mathcal{O}$ -valued の測度 α に対応する巾級数の n 次の係数を α_n ($n \geq 0$) で表わす。

この時、木田は[3]で次を示している。

定理 1 $\lambda_p(\alpha \circ \varphi) = \frac{1}{\mathfrak{f}} \lambda_p(\alpha|_{1+\mathfrak{f}\mathbb{Z}_p})$

但し、 $\varphi: \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} 1+\mathfrak{f}\mathbb{Z}_p : x \mapsto x^k$

・ $\mathfrak{f} = \begin{cases} p & (p \neq 2) \\ 4 & (p = 2) \end{cases}, k = e^{\mathfrak{f}}$

・ 測度 $\alpha \circ \varphi$ 及び $\alpha|_{1+\mathfrak{f}\mathbb{Z}_p}$ は次で定義する:

$\forall O \subset \mathbb{Z}_p$ compact open set に対し

$$\begin{cases} \alpha \circ \varphi(O) = \alpha(\varphi(O)) \\ \alpha|_{1+\mathfrak{f}\mathbb{Z}_p}(O) = \alpha(1+\mathfrak{f}\mathbb{Z}_p \cap O) \end{cases}$$

・ 測度の λ -invariant とは、対応する巾級数の λ -invariant のことである。(μ も同様)

注) ・ p -進 L 関数の岩澤-invariant を考察するには、 $k = e^{\mathfrak{f}}$ の場合で十分である。

・ Childress は、[5]で k を任意として、更に別の強い仮定の下で定理 1 を示している。

・ 本稿では、 k を任意として、定理 1 の簡易化された証明を与える。

(2)

(証明) $\mu_p(\alpha \circ \varphi) = \mu_p(\alpha|_{1+\vartheta\mathbb{Z}_p})$ であるから、
 $\mu_p(\alpha|_{1+\vartheta\mathbb{Z}_p}) = 0$ として一般性を失わない。測度と
 対応する巾級数の基本関係により、 $n \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} (\alpha|_{1+\vartheta\mathbb{Z}_p})_n &= \int_{1+\vartheta\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} d\alpha(x) \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{\kappa^x}{n} d\alpha \circ \varphi(x). \end{aligned}$$

ここで $\forall x \in \mathbb{Z}_p$ に対して

$$\binom{\kappa^x}{n} \equiv \binom{1}{n_0} \binom{\frac{\kappa^x-1}{\vartheta}}{n_1} \pmod{p}$$

但し、 $n = n_0 + \vartheta n_1$ s.t. $0 \leq n_0 \leq \vartheta-1$

であるから、 $\lambda_p(\alpha|_{1+\vartheta\mathbb{Z}_p})$ を考察するには

$(\alpha|_{1+\vartheta\mathbb{Z}_p})_{\vartheta n}$ ($n \geq 0$) を考察すれば十分である。

$$\therefore (\alpha|_{1+\vartheta\mathbb{Z}_p})_{\vartheta n} \equiv \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{\frac{\kappa^x-1}{\vartheta}}{n} d\alpha \circ \varphi(x) \pmod{p}.$$

Mahler の定理により

$$f(x) := \binom{\frac{\kappa^x-1}{\vartheta}}{n} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{\ell-k} \binom{\ell}{k} \binom{\frac{\kappa^k-1}{\vartheta}}{n} \right\}}_{=: I_{n,\ell}} \binom{x}{\ell}$$

と展開すれば、

$$(\alpha|_{1+\vartheta\mathbb{Z}_p})_{\vartheta n} \equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} I_{n,\ell} (\alpha \circ \varphi)_{\ell} \pmod{p}$$

よって、定理を示すには

$$I_{n,\ell} \equiv \begin{cases} p\text{-adic unit} & \text{if } n = \ell \\ 0 & \text{if } n < \ell \end{cases} \pmod{p}$$

を示せば十分である。

(3)

次に、 $f(x)$ を巾級数展開して、

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j$$

とおけば、 $I_{n,l} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \sum_{k=0}^l (-1)^{l-k} \binom{l}{k} k^j$

ここで、 $S_2(j, l)$ を、第二種の Stirling 数とすれば、

$$x^j = \sum_{l=0}^j S_2(j, l) l! \binom{x}{l}$$

これに反転公式を用いて、

$$S_2(j, l) l! = \sum_{k=0}^l (-1)^{l-k} \binom{l}{k} k^j$$

$$\begin{aligned} \therefore I_{n,l} &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j l! S_2(j, l) \\ &= \sum_{j=l}^{\infty} f_j l! S_2(j, l) \end{aligned}$$

また、 $f(x)n! = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x-1}{p} - i \right)$
 $\equiv \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\log_p K}{p} x - i \right) \pmod{p\mathbb{Z}_p[[x]]}$

であるから、 $j \geq l \geq n$ に対して

$$f_j l! \equiv \begin{cases} p\text{-adic unit} & \text{if } j=l=n \\ 0 & \text{if } j > n \end{cases} \pmod{p}$$

以上により

$$I_{n,l} \equiv \begin{cases} p\text{-adic unit} & \text{if } n=l \\ 0 & \text{if } n < l \end{cases} \pmod{p}$$

(証明終了)

|| 第二部 (応用) ||

定理 1 の応用として、abel の場合の本田の公式の初等的な証明を与える。

(4)

K : $\mathbb{Q}$ 上有限次 abel 拡大体に対して次の記法を用いる。

K^+ : K 内最大実部分体

K_∞ : K の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ 拡大体

$\lambda_p^-(K)$: K_∞ の λ -invariant の minus part

X_K (X_K^-): K に対応する (odd) Dirichlet character 全体

$X_K(\ell)$ ($X_K^-(\ell)$): ℓ を素数とする時, conductor が ℓ で割れる X_K (X_K^-) の元全体

χ_K : X_K の元

$$\delta(K) = \begin{cases} 1 & \text{if } K \supset \mathbb{Z}_p \\ 0 & \text{if } K \not\supset \mathbb{Z}_p \end{cases}$$

この時, 木田の公式は, 次のように述べられる。

定理 2 $K \supset F$: 共に $\mathbb{Q}$ 上有限次 abel 拡大。

$[K:F]$: p 中なれば,

$$\lambda_p^-(K) - \delta(K) = [K_\infty : F_\infty] (\lambda_p^-(F) - \delta(F)) + \sum_{\mathfrak{p}} (e_{\mathfrak{p}} - 1) + \sum_{\mathfrak{p}_+} (e_{\mathfrak{p}_+} - 1)$$

但し $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}_+$) は p 上にはない K_∞ (K_∞^+) の prime ideal 全体を動き, $e_{\mathfrak{p}}$ ($e_{\mathfrak{p}_+}$) は K_∞/F_∞ (K_∞^+/F_∞^+) における $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}_+$) の分岐指数を表わす。

注) $p \nmid f(K)$ (K の conductor), $p \nmid [F^+:\mathbb{Q}]$ と仮定しても一般性は失われない。

・上の仮定の下, 分岐指数等の計算により, E を

(5)

K 内最大 P 中部分体とすれば,

$$\begin{aligned} \sum_{\ell} (e_{\ell} - 1) + \sum_{\ell} (e_{\ell} - 1) \\ = \begin{cases} \sum_{\ell} P^{n_{\ell}-1} \# \chi_E(\ell) \# \{ \chi_F: \text{odd}, \chi_F(\ell) = 1 \} & \text{if } P \neq 2 \\ \sum_{\ell} 2^{n_{\ell}-2} \{ \# \chi_E(\ell) - [K:F] \# \chi_{E \cap F}(\ell) \} & \text{if } P = 2 \end{cases} \\ \times \# \{ \chi_{F^*}: \chi_{F^*}(\ell) = 1 \} \end{aligned}$$

但し ℓ は P 以外の素数全体を動き、 $\mathbb{Z}_p^*$ 内で

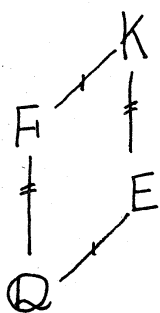
$$\ell = \omega(\ell) (1 + \ell, P^{n_{\ell}}) \quad ((\ell, P) = 1) \text{ と分解する.}$$

(証明) $\chi_K \in X_K^- \neq \omega^{-1}$ に対して $L_p(s, \chi \omega)$ を表わす岩澤の中級数の λ -invariant を λ_{χ} とすれば,

$$\lambda_p^-(K) = \sum_{\chi_K: \text{odd} \neq \omega^{-1}} \lambda_{\chi}$$

であり、後で独立に証明する補助定理を用いれば,

○ $P \neq 2$ の時.



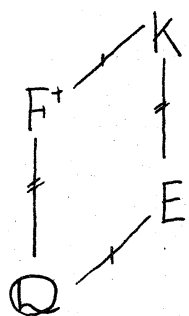
$$\begin{aligned} \lambda_p^-(K) &= \sum_{\chi_F: \text{odd}, \chi_E \neq 1} \lambda_{\chi_F \chi_E} + \sum_{\chi_F: \text{odd} \neq \omega^{-1}} \lambda_{\chi_F} \\ &= ([K:F] - 1) \lambda_p^-(F) + \delta(F) \sum_{\chi_E \neq 1} \lambda_{\chi_E} \\ &\quad + \sum_{\ell} P^{n_{\ell}-1} \# \chi_E(\ell) \times \{ \# \{ \chi_F: \text{odd}, \chi_F(\ell) = 1 \} - \delta(F) \} \\ &\quad + \lambda_p^-(F) \end{aligned}$$

$\delta(K) = \delta(F)$ であるから.

$$\therefore \lambda_p^-(K) - \delta(K) = [K:F] (\lambda_p^-(F) - \delta(F)) + \sum_{\ell} P^{n_{\ell}-1} \# \chi_E(\ell) \# \{ \chi_F: \text{odd}, \chi_F(\ell) = 1 \}$$

○ $P = 2$ の時. 初めに、 $\lambda_2^-(E)$ を計算すれば,

(6)



補助定理により,

$$\begin{aligned}\lambda_2^-(E) &= \sum_{\ell} 2^{n_{\ell}-2} \# X_E^-(\ell) - \{ \# X_E^- - \delta(E) \} \\ &= \sum_{\ell} 2^{n_{\ell}-2} \# X_E^-(\ell) - [K:F] + \delta(K)\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\lambda_2^-(K) &= \sum_{\chi_{F^+} \neq 1, \chi_E: \text{odd}} \lambda_{\chi_{F^+} \chi_E} + \sum_{\chi_E: \text{odd} \neq \omega^{-1}} \lambda_{\chi_E} \\ \therefore \lambda_2^-(K) - \delta(K) &= [K:F] \left(\sum_{\chi_{F^+} \neq 1} \lambda_{\chi_{F^+}} - 1 \right) \\ &\quad + \sum_{\ell} 2^{n_{\ell}-2} \# X_E^-(\ell) \# \{ \chi_{F^+}: \chi_{F^+}(\ell) = 1 \}\end{aligned}$$

ここで上の等式で $K = F$ とすれば,

$$\begin{aligned}\lambda_2^-(F) - \delta(F) &= \sum_{\chi_{F^+} \neq 1} \lambda_{\chi_{F^+}} - 1 + \sum_{\ell} 2^{n_{\ell}-2} \# X_{E \cap F}^-(\ell) \\ &\quad \times \# \{ \chi_{F^+}: \chi_{F^+}(\ell) = 1 \}\end{aligned}$$

以上により,

$$\begin{aligned}\lambda_2^-(K) - \delta(K) &= [K:F] (\lambda_2^-(F) - \delta(F)) \\ &\quad + \sum_{\ell} 2^{n_{\ell}-2} \{ \# X_E^-(\ell) - [K:F] \# X_{E \cap F}^-(\ell) \} \\ &\quad \times \# \{ \chi_{F^+}: \chi_{F^+}(\ell) = 1 \} \\ &\quad \text{(証明終了)}\end{aligned}$$

注) $p \nmid f(K \text{ の conductor })$ にし $[K_{\infty}: F_{\infty}] = [K:F]$ 。

そこで、上の議論の本質的部分である補助定理について述べよう。 $\chi \in X_K$ を一つ固定し、更に χ は次の分解をもつものとする:

(7)

$\chi = \theta\psi$ 但し, ψ の order は P 中で conductor は素数 l , 更に $\forall a \in \mathbb{Z}$ に対して $\theta\psi(a) = \theta(a)\psi(a)$.

次に, f を θ の conductor とした時, $N \ni C > 1$ st. $C \equiv 1 \pmod{f}$, $(C, l) = 1$ なる C を $\rightarrow$ 固定する.

$\mathcal{O}$ として $\mathbb{D}_p(\chi)$ の整数環をとり,

$$F_\chi(T) := \sum_{a=1}^g \frac{\varepsilon_\chi(a) T^a}{T^g - 1} \in \mathcal{O}[[T-1]]$$

と定める. 但し, $\varepsilon_\chi(a) = \begin{cases} \chi(a) & \text{if } C \nmid a \\ (1-C)\chi(a) & \text{if } C \mid a \end{cases}$

g は ε_χ の周期の任意の倍数.

$\chi: \text{odd} \neq \omega^{-1}$ ならば [4] により

$$\lambda_\chi = \lambda_P(\Gamma_{\alpha_\chi}(s)) - P^{n_c}/g$$

が成立する. 更に $\equiv \equiv$ では, 一般の χ に対しても上式により λ_χ を定義する. 但し α_χ は $F_\chi(T)$ に対応する $\mathbb{Z}_p$ 上の $\mathcal{O}$ -valued の測度で, $\Gamma_{\alpha_\chi}(s) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \langle x \rangle^s d\alpha_\chi(x)$ for $s \in \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p^\times = V^\times (1 + g\mathbb{Z}_p)$ の分解を $x = \omega(u)\langle x \rangle$ で表わす. V は $\mathbb{Z}_p^\times$ 内の 1 の中根全体.

補助定理 上の仮定の下で

(i) $\theta \neq \omega^{-1}$, 1 の時

$$\lambda_{\theta\psi} = \begin{cases} \lambda_\theta + P^{n_c}/g & \text{if } \theta(l) = 1 \\ \lambda_\theta & \text{if } \theta(l) \neq 1 \end{cases}$$

ii) $\theta = \omega^{-1}$ の時

$$\lambda_{\theta\psi} = P^{n_c}/q - 1$$

注) ε_θ を定める時は, χ に対して決めた c をそのま
ま使う。また $\ell \neq p$ により $O(\ell) \equiv 1 \pmod{q}$ は
 $O(\ell) = 1$ と同値。

定理 1 により補助定理は, 次の命題と同値である。

命題 補助定理と同じ仮定の下で,

i) の場合,

$$\lambda_p(H_{\theta\psi}(T)) = \begin{cases} \lambda_p(H_\theta(T)) + p^{n_c} & \text{if } O(\ell) = 1 \\ \lambda_p(H_\theta(T)) & \text{if } O(\ell) \neq 1 \end{cases}$$

ii) の場合, $\lambda_p(H_{\theta\psi}(T)) = P^{n_c} + P^{n_c} - q$ 。

但し, $\alpha \leftrightarrow F(T) \in \mathcal{O}[[T-1]]$ の時, $\alpha^{(i)} := \alpha|_{1+q\mathbb{Z}_p}$

に対応する巾級数を $F^{(i)}(T) = (F(T))^{(i)}$ で表わし

$H_\chi(T) := \frac{1}{2} \sum_i F_\chi^{(i)}(T^{\omega^{-1(i)}}) \in \mathcal{O}[[T-1]]$ とおく。

対応する測度は, $\frac{1}{2} \sum_{\ell \in V} \alpha_\ell \cdot \eta|_{1+q\mathbb{Z}_p}$ である。

i は, $p \neq 2$ の時 $i = 1, 2, \dots, p-1$, $p = 2$ の時 $i = 1, 3$ を
動く。

注) [4] により, $\lambda_p(\overline{\mathcal{Q}}_\chi(s)) = \lambda_p(\sum_{\ell \in V} \alpha_\ell \cdot \eta \cdot \varphi)$ である。

証明には, 以下のいくつかの lemma が必要であるの
でそれを述べる。

Lemma 1 $m = \sum_{i=0}^{\infty} m_i p^i, n = \sum_{i=0}^r n_i p^i$

$0 \leq m_i, n_i \leq p-1$ に対して

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^r \binom{m_i}{n_i} \pmod{p}$$

(注) 今後文字 n に対してのみ $n = n_0 + n_1 \wp$ st.

$0 \leq n_0 \leq \wp-1$, と表示し他の文字に対しては、これまで通り、 $\ell = \omega(\ell)(1 + \ell_1 p^{n_e})$ st. $(\ell, p) = 1$ と表示する。

Lemma 2 $\mu_p(F^{(\omega)}(T)) = 0$ ならば、 $\lambda_p(F^{(\omega)}(T)) = \lambda$

とおく時、 $\alpha^{(\omega)}_n \equiv \binom{i}{n_0} \alpha^{(\omega)}_{\wp n_1} \pmod{p} \quad (n \geq 0)$

特に、

$$\lambda \equiv 0 \pmod{\wp} \text{ であり } \alpha^{(\omega)}_{\lambda+1} \not\equiv 0 \pmod{\wp}$$

(証明) 測度と対応する巾級数の基本関係により、 $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{に対して } \alpha^{(\omega)}_n &= \int_{i+\wp \mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} d\alpha(x) \\ &\equiv \binom{i}{n_0} \int_{i+\wp \mathbb{Z}_p} \binom{x}{\wp n_1} d\alpha(x) \pmod{p} \\ &\equiv \binom{i}{n_0} \alpha^{(\omega)}_{\wp n_1} \pmod{p} \quad (\text{証明終了}) \end{aligned}$$

Lemma 3 $\alpha \leftrightarrow F(T), \beta \leftrightarrow G(T)$ の時、

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\wp} \Leftrightarrow F(T) \equiv G(T) \pmod{\wp[[T]]}$$

Lemma 4 $\mathbb{Z}_p^\times \ni a \equiv 1 \pmod{\wp}$ に対して

$$(F(T^a))^{(\omega)} = F^{(\omega)}(T^a)$$

(証明) 左辺の対応する測度は、

(10)

$$\alpha \circ \alpha^{-1}|_{i+g\mathbb{Z}_p} = (\alpha|_{i+g\mathbb{Z}_p}) \circ \alpha^{-1}$$

これは、右辺の対応する測度である。 (証明終了)

Lemma 5 $\alpha \leftrightarrow F(T)$, $\lambda_p(F(T)) = \lambda$ の時.

$\mathbb{Z}_p^* \ni a$ に対して

$$F(T^a) \equiv \alpha_\lambda a^\lambda (T-1)^\lambda \pmod{\mathcal{P}, \deg(\lambda+1)}.$$

Lemma 6 Lemma 5 の状況の下、更に

$\lambda \equiv 0 \pmod{p}$, $a \equiv 1 \pmod{p}$ ならば

$$F(T^a) \equiv F(T) + a_1 \alpha_{\lambda+1} (T-1)^{\lambda+p^{n_a}} \pmod{\mathcal{P}, \deg(\lambda+p^{n_a}+1)}$$

注) Lemma 2 より $F^{(0)}(T)$ s.t. $\mu_p(F^{(0)}(T)) = 0$ に対して Lemma 6 が使える。

$$\begin{aligned} \text{(証明)} \quad T^a - 1 &\equiv T - 1 + a_1 (T-1)^{p^{n_a}} + a_2 (T-1)^{p^{n_a}+1} \\ &\pmod{\mathcal{P}, \deg(p^{n_a}+2)} \end{aligned}$$

であるから、これを $F(T^a) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (T^a - 1)^n$ に代入して

$$F(T^a) \equiv F(T) + a_1 \alpha_{\lambda+1} (T-1)^{\lambda+p^{n_a}} \pmod{\mathcal{P}, \deg(\lambda+p^{n_a}+1)}$$

(証明終了)

Lemma 7 $\widehat{F}_\psi(T) := \sum_{a=1}^{\ell} \frac{\psi(a) T^a}{T^\ell - 1}$ とすれば.

$$\widehat{F}_\psi^{(0)}(T) \equiv -i' \ell_1 (T-1)^{p^{n_f} - g} \pmod{\mathcal{P}, \deg(p^{n_f} - g + 1)}$$

注) ψ に対する仮定により $\ell \equiv 1 \pmod{p}$ である。

(11)

(証明) 剰度と対応する巾級数の基本関係により.

$$\begin{aligned}\widehat{F}_\psi^{(\omega)}(T) &= \frac{1}{g} \sum_{\zeta_g} \zeta_g^{-i} \widehat{F}_\psi(\zeta_g T) \\ &= \sum_{a=0}^{g-1} \frac{\psi(i+ga) T^{i+ga}}{T^{gl} - 1} \\ \therefore (T^{gl} - 1) \widehat{F}_\psi^{(\omega)}(T) &= \sum_{a=0}^{g-1} \psi(i+ga) T^{i+ga} \\ &\equiv \sum_{a=0}^{g-1} T^{i+ga} - T^{lj'} \pmod{g[T-1]}\end{aligned}$$

但し $p=2$, $g \equiv 3 \pmod{4}$ の時のみ $j'=4-i$ その他
他の場合は $j'=i$.

$\sum_{a=0}^{g-1} T^{i+ga} - T^{lj'}$ の $(T-1)^n$ の係数を I_n ($n \geq 0$) とすれば.

$$\begin{aligned}I_n &= \sum_{a=0}^{g-1} \binom{i+ga}{n} - \binom{lj'}{n} \\ &\equiv \binom{i}{n_0} \sum_{a=0}^{g-1} \binom{a}{n_1} - \binom{lj'}{n} \pmod{p} \\ &\equiv \binom{i}{n_0} \binom{g}{1+n_1} - \binom{lj'}{n} \pmod{p} \\ &\equiv \begin{cases} \binom{i}{n_0} \left\{ \binom{1+gP^{n_2}}{1+n_1} - \binom{i \cdot g P^{n_2}/g}{n_1} \right\} & \text{if } i=j' \\ \binom{i}{n_0} \left\{ \binom{2^{n_2}-1-(g+1)2^{n_2}}{1+n_1} - \binom{2^{n_2}-1-\{(4-i)g+1\}2^{n_2-2}}{n_1} \right\} & \text{if } i \neq j' \end{cases} \\ &\equiv \begin{cases} 0 & \text{if } n < p^{n_2} \\ -i \cdot g & \text{if } n = p^{n_2} \end{cases} \pmod{p} \end{aligned}$$

以上により $\widehat{F}_\psi^{(\omega)}(T) \equiv -i \cdot g (T-1)^{p^{n_2}-g} \pmod{g \cdot \deg(P^{n_2}-g+1)}$

(12)

(証明終了)

以上の準備の下に、命題を証明する。

(証明) (i) の場合。

$$F_{\theta 4}(T) \equiv F_{\theta}(T) - \theta(\ell) F_{\theta}(T^{\ell}) \pmod{\mathcal{F}[T-1]}$$

ここで $p=2$, $\theta \neq 1$ なら $F_{\theta}(T^{\ell}) \equiv F_{\theta}(T) \pmod{\mathcal{F}[T-1]}$ であることに注意して 更に $\ell \equiv 1 \pmod{p}$ であるから。

Lemma 3, 4 により

$$F_{\theta 4}^{(i)}(T) \equiv F_{\theta}^{(i)}(T) - \theta(\ell) F_{\theta}^{(i)}(T^{<\ell>}) \pmod{\mathcal{F}[T-1]}$$

$$\therefore H_{\theta 4}(T) \equiv H_{\theta}(T) - \theta(\ell) H_{\theta}(T^{<\ell>}) \pmod{\mathcal{F}[T-1]}$$

[4] により $\mu_p(H_{\theta}(T)) = 0$ であるから Lemma 2, 6 により。
 $H_{\theta 4}(T) \equiv (1 - \theta(\ell)) H_{\theta}(T) + \text{"p-adic unit"} (T-1)^{\lambda+p^{n_2}} \pmod{(\mathcal{F}, \deg(\lambda+p^{n_2}+1))}$

$$\text{但し } \lambda = \lambda_p(H_{\theta}(T))$$

よって (i) の場合が得られた。

(ii) の場合。 $F_{\theta 4}^{(i)}(T) = F_{\theta 4}^{(i)}(T) \theta(i)$ である。ここで。
 $F_{\psi}(T) = \tilde{F}_{\psi}(T) - c\psi(\ell) \tilde{F}_{\psi}(T^{\ell})$ であるから Lemma 3, 4 により

$$\tilde{F}_{\psi}^{(i)}(T) = \tilde{F}_{\psi}^{(i)}(T) - c\psi(\ell) \tilde{F}_{\psi}^{(i)}(T^{\ell})$$

Lemma 2, 6, 7 により

$$\tilde{F}_{\psi}^{(i)}(T) \equiv \text{"iに依らない p-adic unit"} \times i^2 (T-1)^{p^{n_1}+p^{n_2}-2} \pmod{(\mathcal{F}, \deg(p^{n_1}+p^{n_2}-2+1))}$$

(13)

Lemma 5 に より

$$H_{0+}(T) \equiv \text{"p-adic unit"} \times (T-1)^{p^{nc} + p^{ne} - g}$$

$$\text{mod} (f, \text{deg} (P^{nc} + P^{ne} - g + 1))$$

(証明終了)

参考文献

- [1]: Y. Kida, λ -extensions of CM-fields and cyclotomic invariants, J. Number Theory 12 (1980), 519-528
- [2]: —, Cyclotomic $\mathbb{Z}_2$ -extensions of J-fields, J. Number Theory 14 (1982), 340-352
- [3]: —, The λ -invariants of p-adic measures on $\mathbb{Z}_p$ and $1 + 8\mathbb{Z}_p$, Sci. Rep. Kanagawa Univ. 30 (1986), 33-38
- [4]: W. Sinnott, On the μ -invariant of the Γ -transform of a rational function, Invent. Math. 75 (1984), 273-282
- [5]: N. Childress, λ -invariants and Γ -transforms, Manuscripta math. 64 (1989), 359-375