

方形に対する偏微分方程式を解くための直接法

広大 理 新谷尚義

§1 差分近似

方形領域

$$R : x_0 < x < X, \quad y_0 < y < Y, \\ (X = Mh, Y = Nh; \quad M = m+1, N = n+1)$$

の内部で方程式

$$(1.1) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

をみたし、境界上で

$$(1.2) \quad u(x, y) = \varphi(x, y)$$

となる函数 $u(x, y)$ を求める問題を考える。

$$x_i = x_0 + ih, \quad (i=0, 1, \dots, M),$$

$$y_j = y_0 + jh, \quad (j=0, 1, \dots, N)$$

とし、格子点 (x_i, y_j) での函数値 $u(x_i, y_j)$ を使って偏微分を差分近似する。

(i) 5 点公式

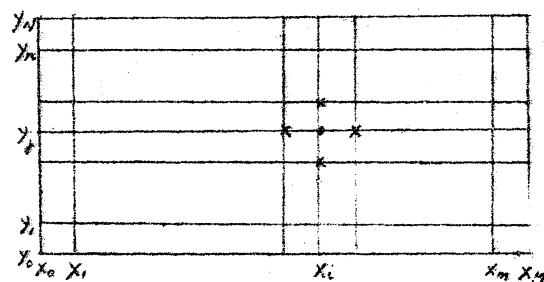
点 (x_i, y_j) , $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ の隣りの東西南北の格子点での函数値を用いると、

$$(1.3) \quad u(x_i+h, y_j) + u(x_i-h, y_j) - 2u(x_i, y_j) \\ = h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, y_j) + \frac{2}{4!} h^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x_i + \xi_i, y_j) \\ \quad \quad \quad (|\xi_i| < h)$$

$$\begin{aligned}
 (1.4) \quad & u(x_i, y_{j+h}) + u(x_i, y_{j-h}) - 2u(x_i, y_j) \\
 & = h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, y_j) + \frac{2}{4!} h^4 \frac{\partial^4}{\partial y^4} u(x_i, y_j + \zeta_j), \quad (|\zeta_j| < h)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.5) \quad & u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i+1}, y_j) + u(x_i, y_{j-1}) \\
 & + u(x_i, y_{j+1}) - 4u(x_i, y_j) \\
 & = h^2 \Delta u(x_i, y_j) + h^4 T(x_i, y_j) \\
 & = h^2 f(x_i, y_j) + h^4 T(x_i, y_j)
 \end{aligned}$$

が得られる。ただし



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

図 2

$$(1.6) \quad T(x_i, y_j) = \frac{2}{4!} \left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x_i + \zeta_i, y_j) + \frac{\partial^4}{\partial y^4} u(x_i, y_j + \zeta_j) \right]$$

である。(5)式の左辺を

$$\begin{aligned}
 (1.7) \quad & u(x_i, y_j) = u_{ij}, \quad f(x_i, y_j) = f_{ij}, \\
 & \varphi(x_i, y_j) = \varphi_{ij}, \quad T(x_i, y_j) = T_{ij}.
 \end{aligned}$$

$$(1.8) \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{in} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} h^2 f_{i1} - \varphi_{i0} \\ h^2 f_{i2} \\ \vdots \\ h^2 f_{in-1} \\ h^2 f_{in} - \varphi_{iN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_i = \begin{bmatrix} T_{i1} \\ \vdots \\ T_{in} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_0 = \begin{bmatrix} \varphi_{01} \\ \vdots \\ \varphi_{0m} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_M = \begin{bmatrix} \varphi_{M1} \\ \vdots \\ \varphi_{Mn} \end{bmatrix}$$

とかくことにする. $u_{i0} = \varphi_{i0}$, $u_{iM} = \varphi_{iM}$, $u_{0j} = \varphi_{0j}$, $u_{Nj} = \varphi_{Nj}$
 なる. これらを右辺に移して, (5) 式を行列でかくと次のようになる.

$$(1.9) \quad u_{i-1} - 4u_i + u_{i+1} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u_i \\
= u_{i-1} - Au_i + u_{i+1} = g_i + h^4 t_i, \quad (i=2, 3, \dots, n-1)$$

をばし

$$(1.10) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

である.

$i = 1, m$ に対しては $u_0 = \varphi_0$, $u_M = \varphi_M$ である

$$(1.11) \quad -Au_1 + u_2 = g_1 - \varphi_0 + h^4 t_1$$

$$(1.12) \quad u_{m-1} - Au_m = g_m - \varphi_M + h^4 t_m$$

となる.

$$(1.13) \quad b_1 = g_1 - \varphi_0, \quad b_m = g_m - \varphi_M, \quad b_i = g_i \\
(i=2, 3, \dots, m-1)$$

とおり, (5) 式は次のようにかける.

$$(1.14) \quad \begin{bmatrix} -A & I & & \\ & I & -A & I \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & I & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} + h^4 \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix}$$

u_{ij} の代りに未知数 v_{ij} を導入して, $v_i^T = (v_{i1}, \dots, v_{in})$
 とおき, (14) 式に対応して次の偏差分方程式を考える.

$$(1.15) \quad \begin{bmatrix} -A & I & & 0 \\ & I & -A & I \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & I & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lb_1 \\ lb_2 \\ \vdots \\ lb_m \end{bmatrix}$$

これは lb_i が既知なから解ける

$z_i = v_i - u_i$ とおくと, 差分近似による誤差は次の式で与えられる.

$$\begin{bmatrix} -A & I & & 0 \\ & I & -A & I \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & I & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = -h^4 \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix}$$

$h \rightarrow 0$ のとき, $\|z_i\| \rightarrow 0$ で行ければ, 偏微分方程式の差分近似にはならない.

(ii) 9 点公式

点 (x_i, y_j) の斜め隣りの 4 点を使うと

$$(1.16) \quad \begin{aligned} & u(x_{i-1}, y_{j-1}) + u(x_{i+1}, y_{j-1}) + u(x_{i-1}, y_{j+1}) \\ & + u(x_{i+1}, y_{j+1}) - 4u(x_i, y_j) \\ & = 2h^2 \Delta u(x_i, y_j) + \frac{4h^4}{4!} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right] (x_i, y_j) + O(h^6) \end{aligned}$$

が得られる. $f(x, y) \equiv 0$ の (1) 式が

$$(1.21) \quad \Delta u(x, y) = 0$$

の場合には、

$$(1.22) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

だから、(5) 式の 4 倍を (20) 式に 4 加えると

$$(1.23) \quad \begin{aligned} & u(x_{i-1}, y_{j-1}) + u(x_{i+1}, y_{j-1}) + u(x_{i-1}, y_{j+1}) \\ & + u(x_{i+1}, y_{j+1}) + 4[u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i+1}, y_j) \\ & + u(x_i, y_{j-1}) + u(x_i, y_{j+1})] - 20u(x_i, y_j) \\ & = 0(h^6) \end{aligned}$$

となる。(23) 式は図式的に図 3 のようにかける。

$$(1.24) \quad A = \begin{bmatrix} 20 & -4 & & & 0 \\ -4 & 20 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & -4 & 20 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & 0 \\ & 1 & 4 & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

図 3

とおくと、対応する偏微分方程式は次のようになる。

$$(1.25) \quad \begin{bmatrix} -A & B & & & 0 \\ B & -A & B & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & B & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{bmatrix}$$

一般の楕円型偏微分方程式

$$(1.26) \quad \begin{aligned} & a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} \\ & + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + g(x, y)u = f(x, y) \end{aligned}$$

の場合には、関係式

$$(1.27) \quad u(x_{i-1}, y_{j-1}) - u(x_{i+1}, y_{j-1}) + u(x_{i+1}, y_{j+1})$$

$$\begin{aligned}
 & -u(x_{i-1}, y_{j+1}) \\
 & = 4h^2 u_{xy}(x_i, y_j) + O(h^4) \\
 (1.28) \quad & u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j) \\
 & = 2hu_x(x_i, y_j) + O(h^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.29) \quad & u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1}) \\
 & = 2hu_y(x_i, y_j) + O(h^3)
 \end{aligned}$$

を用いると，対応する図式は図4のようになる。

$$(1.30) \quad \begin{array}{ccc} j-1 & \frac{1}{2}b_{ij}, & c_{ij}-\frac{h}{2}e_{ij}, & -\frac{1}{2}b_{ij} \\ j & a_{ij}-\frac{h}{2}d_{ij}, & -2a_{ij}-2c_{ij}+h^2g_{ij}, & a_{ij}+\frac{h}{2}d_{ij} \\ j+1 & -\frac{1}{2}b_{ij}, & c_{ij}+\frac{h}{2}e_{ij}, & \frac{1}{2}b_{ij} \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} i-1 & i & i+1 \end{array}$

図 4

$$(1.31) \quad A_i = \begin{bmatrix} 0, \dots, 0, -c_{ij}+\frac{h}{2}e_{ij}, 2a_{ij}+2c_{ij}-h^2g_{ij}, -c_{ij}-\frac{h}{2}e_{ij}, 0, \dots, 0 \end{bmatrix}$$

$$(1.32) \quad B_i = \begin{bmatrix} 0, \dots, 0, -\frac{1}{2}b_{ij}, a_{ij}+\frac{h}{2}d_{ij}, \frac{1}{2}b_{ij}, 0, \dots, 0 \end{bmatrix}$$

$$(1.33) \quad C_i = \begin{bmatrix} 0, \dots, 0, \frac{1}{2}b_{ij}, a_{ij}-\frac{h}{2}d_{ij}, -\frac{1}{2}b_{ij}, 0, \dots, 0 \end{bmatrix}$$

とおくと，対応する偏微分方程式は次のようになる。

$$(1.34) \quad \begin{bmatrix} -A_1 & B_1 & & 0 \\ C_2 & -A_2 & B_2 & \\ & & & \\ 0 & & C_{m-1} & -A_{m-1} & B_{m-1} \\ & & & C_m & -A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{m-1} \\ v_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \\ b_m \end{bmatrix}$$

A_i, B_i, C_i は 3 重対角行列であり, (34) 式の係数行列はブロック 3 重対角行列である. このようは, 0 要素の多い疎な行列の逆行列は, 一般に 0 要素の少ないつまり, 大行列になる. しかも一行にただだか 9 個の要素しかなく, しかもそれらの現われる位置: 規則的だから, この行列を記憶するには $(mn)^2$ 個の代わりに $9mn$ 個の記憶場所があればよいことになる. これ以外の理由もあって, 通常 (34) 式は反復法で解かれ直接法は滅多に使われない. しかしながら, 直接法には (34) 式の行列を行列を行列の直積に分解する hypermatrix method と tensor product method や平方根法ほどもある. ここでは直接法について述べる.

§2 Dirichlet 問題

(1.34) 式の v_i を x_i とかき直し, 連立の形にみると次のようになる.

$$(2.1) \quad \begin{cases} A_1 x_1 - B_1 x_2 = b_1 \\ -C_k x_k + A_k x_k - B_k x_{k+1} = b_k, \quad (k=2, 3, \dots, m-1) \\ -C_m x_m + A_m x_m = b_m \end{cases}$$

方程式 (2.1) が一意的解をもつとし, $B_k, (k=1, 2, \dots, m-1)$ が正則であると仮定する. また $B_m = I$ とする. そのとき

$$(2.2) \quad P_0 = I, \quad P_1 = B_1^{-1} A_1$$

$$(2.3) \quad P_k = B_k^{-1} (A_k P_{k-1} - C_k P_{k-2}), \quad (k=2, 3, \dots, m)$$

$$(2.4) \quad q_0 = 0, \quad q_1 = B_1^{-1} b_1$$

$$(2.5) \quad q_k = B_k^{-1} (A_k q_{k-1} - C_k q_{k-2} + b_k), \quad (k=2, 3, \dots, m)$$

によって、行列 P_k とベクトル q_k を定義すると、(1) 式は次のように
書き直される。

$$(2.6) \quad \begin{cases} x_{k+1} = P_k x_1 - q_k, & (k=1, 2, \dots, m) \\ x_{m+1} = 0 \end{cases}$$

したがって x_1 は

$$(2.7) \quad x_1 = P_m^{-1} q_m$$

で与えられる。 B_k は対角または重対角行列だから、 P_k, q_k は
容易に求まり、 n 個の未知数をもつ連立 1 次方程式を解く問題に帰着さ
れる。

x_1 が求まると

$$(2.8) \quad \begin{cases} B_2 x_3 = A_2 x_2 - (C x_1 + b_1) \\ B_k x_{k+1} = A_k x_k - C_k x_{k-1} - b_k, & (k=3, \dots, m) \\ x_{m+1} = 0 \end{cases}$$

から x_2 が求められる。

$C_k, (k=2, 3, \dots, m)$ も正則な場合には

$$(2.9) \quad \begin{cases} C_m x_{m-1} = A_m x_m - b_m \\ C_k x_{k-1} = A_k x_k - B_k x_{k+1} - b_k, & (k=m-1, m-2, \dots, 1) \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

から x_m を求め、(1) 式を

$$(2.10) \quad \begin{cases} A_2 x_2 - B_2 x_3 = b_2 + C_2 x_1 \\ -C_k x_{k-1} + A_k x_k - B_k x_{k+1} = b_k, \quad (k=3, \dots, m-2) \\ -C_{m-1} x_{m-2} + A_{m-1} x_{m-1} = b_{m-1} + B_{m-1} x_m \end{cases}$$

に帰着させる方がよいように思われる。

A_k, B_k, C_k が次の形の場合は、ずっと簡単になる。

$$(2.11) \quad A_k = a_k I + \alpha_k J, \quad B_k = b_k I + \beta_k J, \quad C_k = c_k I + \gamma_k J$$

とすれば

$$(2.12) \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。このとき

$$(2.13) \quad T = (t_{ij}), \quad t_{ij} = \sin ij\theta, \quad \theta = \pi/N.$$

$$(2.14) \quad G = \text{diag} (\cos \theta, \cos 2\theta, \dots, \cos n\theta).$$

とすれば

$$(2.15) \quad \begin{aligned} A_k &= T^{-1}(a_k I + 2\alpha_k G)T, \quad B_k = T^{-1}(b_k I + 2\beta_k G), \\ C_k &= T^{-1}(c_k I + 2\gamma_k G) \end{aligned}$$

が成り立つから、(1) 式は次のようになり直される。

$$(2.16) \quad \begin{cases} y_2 = D_1 y_1 - g_1 \\ y_{k+1} = D_k y_k - E_k y_{k-1} - g_k, \quad (k=2, 3, \dots, m) \\ y_{m+1} = 0 \end{cases}$$

とすれば

$$(2.17) \quad F_k = (b_k I + 2\beta_k G)^{-1}, \quad D_k = F_k(a_k I + 2\gamma_k G), \\ E_k = F_k(c_k + 2\gamma_k G)$$

$$(2.18) \quad \varepsilon_k = F_k T D_k, \quad y_k = T x_k$$

である。

$$(2.19) \quad P_0 = I, \quad P_1 = D_1$$

$$(2.20) \quad P_k = D_k P_{k-1} - E_k P_{k-2}, \quad (k=2, 3, \dots, m)$$

$$(2.21) \quad q_0 = 0, \quad q_1 = \varepsilon_1$$

$$(2.22) \quad q_k = D_k q_{k-1} - E_k q_{k-2} + \varepsilon_k, \quad (k=2, 3, \dots, m)$$

とおくと, $T^{-1} = \frac{2}{N} T$ より x_1 は

$$(2.23) \quad x_1 = \frac{2}{N} T P_m^{-1} \varepsilon_m$$

で与えられる。

F_k, E_k, D_k は対角行列だから, P_k も対角行列で P_m^{-1} は容易に求められる。また行列 T の各要素を記憶する必要はなく, $f^T = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ とすると, $r_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} f_j$ は次の漸化式で求められる。

$$(2.24) \quad p_n = p_{n+1} = 0$$

$$(2.25) \quad p_k = (2 \cos i\theta) p_{k+1} - p_{k+2} + f_{k+1}, \quad (k=n-1, n-2, \dots, 0)$$

$$(2.26) \quad r_i = p_0 \sin i\theta$$

また,

$$(2.27) \quad a_k = a, \quad d_k = d, \quad b_k = c_k = b,$$

$$\beta_k = \gamma_k = \beta, \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

の場合は、もっと簡単になる。 $D_k = D$ とおくことにし、多項式 $P_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, m$) を次の式によって定義する。

$$(2.28) \quad P_0 = 1, \quad P_1(x) = x$$

$$(2.29) \quad P_{k+1}(x) = xP_k(x) - P_{k-1}(x), \quad (k=1, 2, \dots, m-1)$$

すると

$$(2.30) \quad P_k = P_k(D), \quad g_k = \sum_{i=1}^k P_{k-i} g_i$$

となり、

$$(2.31) \quad y_k = P_{m+1-k}^{-1} [P_{m-k} y_{k-1} + \sum_{i=k}^m P_{m-i} g_i], \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

を得られる。ただし $y_0 = y_{m+1} = 0$ である。そして (1) 式の解は

$$(2.32) \quad x_k = \frac{2}{N} T y_k, \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

で与えられる。

この numerical process が安定であるためには、 $P_{m+1-k}^{-1} P_j$, ($j=1, 2, 3, \dots, m-k$) の固有値の絶対値が 1 以下でなければならぬ。よく知られているように

$$(2.33) \quad P_k(x) = \begin{cases} \sinh(k+1)\mu / \sinh \mu, & 2 \cosh \mu = x, \quad (x > 2) \\ \left(\frac{x}{2}\right)^k (1+k), & (|x|=2) \\ \sin(k+1)\mu / \sin \mu, & 2 \cos \mu = x, \quad (|x| < 2) \\ (-1)^k \sinh(k+1)\mu / \sinh \mu, & 2 \cosh \mu = |x|, \quad (x < -2) \end{cases}$$

である。したがって、

$$(2.34) \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

とすると、

$$(2.35) \quad |\lambda_i| \geq 2, (i=1, 2, \dots, n)$$

は安定である。

たとえば、5 点公式の場合には

$$(2.36) \quad \lambda_i = 4 - 2 \cos i\theta = 2(1 + 2 \sin^2 \frac{i\theta}{2}) \geq 2.$$

9 点公式の場合には

$$(2.37) \quad \lambda_i = \frac{20 - 8 \cos i\theta}{4 + 2 \cos i\theta} = 2 + \frac{6(1 - \cos i\theta)}{2 + \cos i\theta} \geq 2.$$

だから、いずれの場合も process (2.31) は安定である。

$$(2.38) \quad y_1 = P_m^{-1} \sum_{i=1}^m P_{m-i} g_i$$

に

$$(2.39) \quad y_k = P_{k-1} y_1 - \sum_{i=k-1}^m P_{k-1-i} g_i$$

に代入し、関係式

$$(2.40) \quad P_r(x) P_{m-i}(x) - P_m(x) P_{r-i}(x) = P_{m-r-1}(x) P_{i-1}(x)$$

を使い、 x_k を次の形にかくことができる。

$$(2.41) \quad x_k = \frac{2}{N} TP_m^{-1} [P_{m-k} \sum_{i=1}^{k-1} P_{i-1} g_i + P_{k-1} \sum_{i=k}^m P_{m-i} g_i] \\ (k=1, 2, \dots, m)$$

§3 周期的境界問題

3.1 Poisson の方程式

K.W.Hockney は (1.1) と周期的境界条件

$$(3.1) \quad \begin{cases} u(x_0, y) = u(X, y), & (y_0 \leq y \leq Y) \\ u(x, y_0) = u(x, Y), & (x_0 \leq x \leq X) \end{cases}$$

与えられた問題を解く問題を得る。それは次の形の方程式を解く問題に帰着される。

$$(3.2) \quad \begin{cases} Ax_1 - x_2 - x_m = b_1 \\ -x_{k-1} + Ax_k - x_{k+1} = b_k, & (k=2, 3, \dots, m-1) \\ -x_1 - x_{m-1} + Ax_m = b_m \end{cases}$$

ただし

$$(3.3) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & & & 0 \\ 0 & -1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 \\ 0 & & & & 4 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

である。

$$(3.4) \quad H = \text{diag} (1, \cos \theta, \cos 2\theta, \dots, \cos (n-1)\theta)$$

$$(3.5) \quad R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \cos \theta & & \cos (n-1)\theta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos (\ell-1)\theta & & \cos (n-1)(\ell-1)\theta \\ \delta & \delta \cos \ell \theta & & \delta \cos (n-1)\ell \theta \\ 0 & \sin (\ell+1)\theta & & \sin (n-1)(\ell+1)\theta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \sin (n-1)\theta & & \sin (n-1)(n-1)\theta \end{bmatrix}$$

とおく。ただし

$$(3.6) \quad \theta = \frac{2\pi}{n}, \quad \delta = \begin{cases} 1 & (n: \text{odd}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & (n: \text{even}) \end{cases}$$

で, l は $n/2$ を越えはい最大の整数である. すると

$$(3.7) \quad A = R^{-1}DR, \quad D = 4I - 2H, \quad R^{-1} = \frac{2}{n} R^T$$

が成り立ち, (3.2) は次のようにかき直される.

$$(3.8) \quad \begin{cases} Dy_1 - y_2 - y_m = g_1 \\ -y_{k-1} + Dy_k - y_{k+1} = g_k, \quad (k=2, 3, \dots, m) \\ y_{m+1} = y_1 \end{cases}$$

$$(3.9) \quad y_j = Rx_j, \quad g_j = Rb_j, \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

$P_j(D)$ と P_j とかくことにすると

$$(3.10) \quad y_{k+1} = P_k y_1 - P_{k-1} y_m - \sum_{i=1}^k p_{k-i} g_i \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

が成り立つ. これから次の式が得られる.

$$(3.11) \quad \begin{cases} P_{m-1} y_m = (P_m - I) y_1 - \sum_{i=1}^{m-1} p_{m-i} g_i \\ (I + P_{m-2}) g_m = P_{m-1} y_1 - \sum_{i=1}^{m-1} p_{m-1-i} g_i \end{cases}$$

したがって,

$$(3.12) \quad \Delta y_1 = (I + P_{m-2}) \sum_{i=1}^m p_{m-i} g_i - P_{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} p_{m-1-i} g_i$$

$$(3.13) \quad \Delta y_m = P_{m-1} \sum_{i=1}^m p_{m-i} g_i - (P_m - I) \sum_{i=1}^{m-1} p_{m-1-i} g_i$$

が得られる. したがって

$$(3.14) \quad \Delta = (I + P_{m-2})(P_m - I) - P_{m-1}^2 \\ = P_{m-2}P_m - P_{m-1}^2 + P_m - P_{m-2} - I$$

$P_k(x)$ は k 次の多項式で最高次の係数が 1 になり、 $P_{m-2}(x)P_{m-1}(x) - P_{m-1}(x)P_{m-1-i}(x)$, $P_{m-1}(x)P_{m-i}(x) - P_m(x)P_{m-1-i}(x)$ の最高次の係数は 0 になる。したがって (12), (13) 式をそのまま使っていると断落ちの起る恐れがある。そこで何らかの工夫が必要になる。

容易に検証できるように、次の関係式が成り立つ。

$$(3.15) \quad P_{m-1}(x)P_{m-i}(x) - P_m(x)P_{m-1-i}(x) \\ = P_{i-1}(x), \quad (i=1, 2, \dots, m-1)$$

$$(3.16) \quad P_{m-2}(x)P_{m-i}(x) - P_{m-1}(x)P_{m-1-i}(x) \\ = P_{i-2}(x)$$

これらを、(12), (13), (14) 式に代入すると次の式が得られる。

$$(3.17) \quad y_1 = (P_m - P_{m-2} - 2I)^{-1} \sum_{i=1}^m (P_{m-i} + P_{i-2})g_i$$

$$(3.18) \quad y_m = (P_m - P_{m-2} - 2I)^{-1} \sum_{i=1}^m (P_{m-1-i} + P_{i-1})g_i$$

方程式

$$(3.19) \quad \begin{cases} Dy_k - y_{k+1} = g_k + y_{k-1}, & (k=1, 2, \dots, m-1) \\ -y_{j-1} + Dy_j - y_{j+1} = g_j, & (j=k+1, \dots, m-1) \end{cases}$$

から、

$$(3.20) \quad y_k = P_{m-k}^{-1} [y_m + P_{m-1-k}y_{k-1} + \sum_{i=k}^{m-1} P_{m-1-i}g_i], \quad (k=2, \dots, m-1)$$

$$(3.21) \quad y_{m-k} = P_{m-k-1}^{-1} [y_1 + P_{m-k-2} y_{m-k+1} + \sum_{i=0}^{m-k-2} p_i g_{k+1+i}], \quad (k=1, 2, \dots, m-2)$$

が得られる。そして解は

$$(3.22) \quad x_k = \frac{2}{n} R^T y_k \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

で与えられる。D の固有値は 2 より小さく正だから、この process は常に安定である。

(17), (18) 式を (10) 式に代入し (2.33) を使って解を次のようにかくこともできる。

$$(3.23) \quad x_{k+1} = \frac{2}{n} R^T (P_m - P_{m-2} - 2I)^{-1} \left[\sum_{i=1}^k (p_{m-k-2+i} + p_{k-i}) g_i + \sum_{i=k+1}^m (p_{m+k-i} + p_{i-k-2}) g_i \right], \quad (k=0, 1, \dots, m-1)$$

3.2 熱方程式

G. J. Tee は次の問題を考へた。

$$(3.24) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < 1)$$

$$(3.25) \quad u(0, t) = f(t), \quad u(1, t) = g(t),$$

$$u(x, 0) = u(x, T)$$

ここで、 $f(t)$, $g(t)$ は周期 T の周期函数である。

$$(3.26) \quad \ell = T/m, \quad h = l/N, \quad \sigma = \ell/h^2$$

とおき, t 方向を m 等分, x 方向を N 等分して, 差分近似する.

(i) 陽表公式

$$(3.27) \quad \begin{aligned} & u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) \\ &= h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, t_j) + \frac{2}{4!} h^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x_i, t_j) \\ & \quad + \frac{2}{6!} h^6 \frac{\partial^6}{\partial x^6} u(x_i + \xi_i, t_j), \quad (|\xi_i| < h) \end{aligned}$$

$$(3.28) \quad \begin{aligned} & u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j) \\ &= \ell \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{\ell^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_i, t_j) \\ & \quad + \frac{\ell^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x_i, t_j + \tau_j), \quad (0 < \tau_j < \ell) \end{aligned}$$

と

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} &= \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \end{aligned}$$

を用いて次の式が得られる.

$$(3.30) \quad \begin{aligned} u(x_i, t_{j+1}) &= \sigma u(x_{i-1}, t_j) + (1 - 2\sigma)u(x_i, t_j) \\ & \quad + \sigma u(x_{i+1}, t_j) + h^4 T(x_i, t_j) \end{aligned}$$

ただし

$$(3.31) \quad T(x_i, t_j) = \frac{1}{12}(6\sigma - 1)h^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x_i, t_j) + \sigma h^6 \left[\frac{\sigma^2}{3!} \right. \\ \left. \times \frac{\partial^6}{\partial x^6} u(x_i, t_j + \tau_j) - \frac{2}{6!} \frac{\partial^6}{\partial x^6} u(x_i + \xi_i, t_j) \right]$$

である。\$\sigma = 1/6\$ にとると、公式誤差は \$h^6\$ のオーダーになる。
これから得られる差分方程式

$$(3.32) \quad v_{ij} = \sigma v_{i-1,j} + (1 - 2\sigma)v_{ij} + \sigma v_{i+1,j}$$

の解が、\$\sigma\$ は一定を保って、\$h \rightarrow 0\$ のとき、(20) 式の解に収束する
ためには、\$\sigma \leq 1/2\$ でなければならぬことが知られている。

(ii) 陰伏公式

$$(3.33) \quad u(x_{i-1}, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) \\ = h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, t_{j+1}) + \frac{2}{4!} h^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x_i + \xi_i, t_{j+1})$$

$$(3.34) \quad u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j) \\ = \sigma h^2 \frac{\partial^2}{\partial t} u(x_i, t_{j+1}) - \frac{\sigma^2}{2!} h^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x_i, t_{j+1} - \tau_{j+1})$$

から、次の式が得られる。

$$(3.35) \quad \sigma u(x_{i-1}, t_{j+1}) - (1 + 2\sigma)u(x_i, t_{j+1}) \\ + \sigma u(x_{i+1}, t_{j+1}) + u(x_i, t_j) \\ = \sigma h^4 \left[\frac{2}{4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x_i + \xi_i, t_{j+1}) + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x_i, t_{j+1} - \tau_{j+1}) \right]$$

これから構成される差分方程式の解は、\$\sigma\$ は固定して \$h \rightarrow 0\$ とす
れば、\$\sigma\$ の値にかかわらず、(24) 式の解に収束すること知られている。

(24), (25)式から得られる差分方程式は、

陽表公式を用いる場合、

$$(3.36) \quad \begin{cases} x_1 - Mx_m = b_1, \\ x_k - Mx_{k-1} = b_k, \quad (k=2, 3, \dots, m) \end{cases}$$

陰伏公式を使う場合、

$$(3.37) \quad \begin{cases} Nx_1 - Mx_m = b_1, \\ -x_{k-1} + Nx_k = b_k, \quad (k=2, 3, \dots, m) \end{cases}$$

となる。ただし、

$$(3.38) \quad M = (1 - 2\sigma)I + \sigma J, \quad N = (1 + 2\sigma)I - \sigma J$$

である。

$$(3.39) \quad M = T^{-1}DT, \quad D = (1 - 2\sigma)J + 2\sigma G.$$

だから、(36) 式は次のようにかける。

$$(3.40) \quad \begin{cases} y_1 = Dy_m + g_1, \\ y_k = Dy_{k-1} + g_k, \quad (k=2, 3, \dots, m) \end{cases}$$

ただし、

$$(3.41) \quad y_j = Tx_j, \quad g_j = Tb_j$$

である。したがって、

$$(3.42) \quad y_k = D^k y_m + \sum_{i=1}^k D^{k-i} g_i, \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

を得る。これから

$$(3.43) \quad y_m = (I - D^m)^{-1} \sum_{i=1}^m D^{m-i} g_i$$

が得られる。 $y_0 = y_m$ とおくと、

$$(3.44) \quad y_k = Dy_{k-1} + g_k, \quad (k=1, 2, \dots, m-1)$$

が成り立つ。これから (36) 式の解は、

$$(3.45) \quad x_j = \frac{2}{N} Ty_j, \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

を与えられる。

D の固有値は、

$$\lambda_i = 1 - 2\sigma + 2\sigma \cos \frac{i\pi}{N} = 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{i\pi}{2N}, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

だから、 $\sigma \leq \frac{1}{2}$ ならば、この process は安定である。

次に (37) 式を扱う。

$$(3.46) \quad E = ((1 + 2\sigma)I - 2\sigma G)^{-1}$$

とおくと、 $N^{-1} = T^{-1}ET$ だから (37) 式は次のようにかける。

$$(3.47) \quad \begin{cases} y_1 = Ey_m + Eg_1 \\ y_k = Ey_{k-1} + Eg_k, \quad (k=2, 3, \dots, m) \end{cases}$$

これから

$$(3.48) \quad y_m = (I - E_m)^{-1} \sum_{i=1}^m E^{m+1-i} g_i$$

を得られる。よって $y_0 = y_m$ とおくと

$$(3.49) \quad y_k = E(y_{k-1} + g_k), \quad (k=1, 2, \dots, m-1)$$

これから

$$(3.50) \quad x_k = \frac{2}{N} Ty_j, \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

が得られる。E の固有値の絶対値はすべて 1 より小さいから、この process は常に安定である。

§4 Biharmonic equation

領域

$$R: 0 < x < L, \quad 0 < y < M$$

で、方程式

$$(4.1) \quad \Delta \Delta u(x, y) = f(x, y)$$

を考えよう。全境界上で u の値が与えられ、 $y = 0, y = M$ ($0 \leq x \leq L$) で u_y が与えられ、 $x = 0, x = L, (0 \leq y \leq M)$ で u_{xx} が与えられている場合には、次の差分方程式で (1) 式が近似される。

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} Bx_1 + Cx_2 + \alpha x_3 = lb_1 \\ Cx_1 + Bx_2 + Cx_3 + \alpha x_4 = lb_2 \\ \alpha x_{k-4} + Cx_{k-3} + Bx_{k-2} + Cx_{k-1} + \alpha x_k \\ \quad = lb_{k-2}, \quad (k=5, \dots, m) \\ \alpha x_{m-3} + Cx_{m-2} + Bx_{m-1} + Cx_m = lb_{m-1} \\ \alpha x_{m-2} + Cx_{m-1} + Bx_m = lb_m \end{array} \right.$$

ただし

$$(4.3) \quad \Delta x = L/N, \quad \Delta y = M/(m+1),$$

$$N = n+1, \quad m = 2p$$

$$(4.4) \quad \theta_x = \Delta x^2 / 2 (\Delta x^2 + \Delta y^2), \quad \theta_y = \Delta y^2 / 2 (\Delta x^2 + \Delta y^2)$$

$$(4.5) \quad R = 1 + 2 \cdot \theta_x^2 + 2 \cdot \theta_y^2, \quad \alpha = \theta_y^2 / R$$

$$(4.6) \quad A = (I - \theta_x J), \quad B = (A^2 + \theta_y^2 I) / R,$$

$$C = -2 \cdot \theta_y A / R$$

である。

$$(4.7) \quad \mathbf{g}_i = T \mathbf{b}_i / \alpha, \quad T \mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i, \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$(4.8) \quad E = (1 / \theta_y)(I - 2 \cdot \theta_x G), \quad D = I + E^2$$

$$(4.9) \quad \mathbf{g}_{-1} = \mathbf{g}_0 = 0$$

とおく。 (2) 式は次のようにかき直される。

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_{-1} = \mathbf{y}_0 = 0 \\ \mathbf{y}_k = 2E\mathbf{y}_{k-1} - D\mathbf{y}_{k-2} + 2E\mathbf{y}_{k-3} - \mathbf{y}_{k-4} \\ \quad + \mathbf{g}_{k-2}, \quad (k=3, 4, \dots, m+2) \\ \mathbf{y}_{m+1} = \mathbf{y}_{m+2} = 0 \end{array} \right.$$

行列 P_k, Q_k とベクトル $\mathbf{q}_k$, ($k=-1, 0, \dots, m+2$) を次の式によって定義する。

$$(4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{-1} = P_0 = 0, \quad P_1 = I, \quad P_2 = 0, \\ P_k = 2EP_{k-1} - DP_{k-2} + 2EP_{k-3} - P_{k-4}, \\ \quad (k=3, 4, \dots, m+2) \end{array} \right.$$

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_{-1} = Q_0 = Q_1 = 0, \quad Q_2 = I, \\ Q_k = 2EQ_{k-1} - DQ_{k-2} + 2EQ_{k-3} - Q_{k-4}, \\ \quad (k=3, 4, \dots, m+2) \end{array} \right.$$

$$(4.13) \quad \begin{cases} q_{-1} = q_0 = q_1 = q_2 = 0 \\ q_k = g_{k-2} + 2Eq_{k-1} - Dq_{k-2} + 2Eq_{k-3} - q_{k-4} \end{cases}$$

すなわち (10) 式は次のようにおける。

$$(4.14) \quad \begin{cases} y_k = P_k y_1 + Q_k y_2 + q_k, \quad (k=-1, 0, \dots, m+2) \\ y_{m+1} = y_{m+2} = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$(4.15) \quad q_k = \sum_{\ell=1}^{k-2} Q_{k-\ell} g_{\ell}, \quad (k=3, 4, \dots, m+2)$$

$$(4.16) \quad \begin{cases} P_k = -(k-2)E^{k-1} + (k-3)\text{次の項} \\ Q_k = (k-1)E^{k-2} + (k-4)\text{次の項} \end{cases}$$

である。(14) 式から

$$(4.17) \quad \begin{cases} P_{m+1} y_1 + Q_{m+1} y_2 = -q_{m+1} \\ P_{m+2} y_1 + Q_{m+2} y_2 = -q_{m+2} \end{cases}$$

したがって

$$(4.18) \quad \begin{cases} \Delta y_1 = \sum_{k=1}^m U_k g_{m+1-k} \\ \Delta y_2 = \sum_{k=1}^m V_k g_{m+1-k} \end{cases}$$

が得られる。さらに

$$(4.19) \quad \Delta = Q_{m+2} P_{m+1} - Q_{m+1} P_{m+2}$$

$$(4.20) \quad U_k = Q_{m+1} Q_{k+1} - Q_{m+2} Q_k$$

$$(4.21) \quad V_k = P_{m+2}Q_k - P_{m+1}Q_{k+1}$$

である。

(16) 式を使いと

$$(4.22) \quad \Delta = \left\{ -(m+1)(m-1) + m^2 \right\} E^{2m} + \dots = E^{2m} + \dots$$

$$(4.23) \quad U_k = \left\{ mk - (m+1)(k-1) \right\} E^{m+k-2} + \dots = (m+1-k)E^{m+k-2} + \dots$$

$$(4.24) \quad V_k = \left\{ (m-1)k - (k-1)m \right\} E^{m+k-1} + \dots = (m-k)E^{m+k-1} + \dots$$

である。しかし、(18) 式をそのまま使いと漸化式が生ずる。そこで漸化式を防ぐために別の漸化式を作る。

$$(4.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_{-1} = U_0 = 0, \quad U_1 = Q_{m+1}, \\ U_2 = DQ_m - 2EQ_{m-1} + Q_{m-2} \\ V_{-1} = V_0 = 0, \quad V_1 = -P_{m+1}, \\ V_2 = -DP_m + 2EP_{m-1} - P_{m-2} \\ U_k = 2EU_{k-1} - DU_{k-2} + 2EU_{k-3} - U_{k-4} \\ V_k = 2EV_{k-1} - DV_{k-2} + 2EV_{k-3} - V_{k-4} \end{array} \right.$$

$$(4.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{-1} = R_0 = 0, \quad R_1 = I, \quad R_2 = D \\ S_{-1} = S_0 = 0, \quad S_1 = 2E \\ R_k = D(R_{k-1} - R_{k-3}) + 2E(S_{k-3} - S_{k-2}) + R_{k-4}, \\ S_k = 2E(R_k - R_{k-1}) + S_{k-2} \end{array} \right. \quad (k=3, 4, \dots, m+1)$$

によって、 U_k, V_k, S_k, R_k を求める。すると、 $\Delta = R_{m+1}$ である。
したがって、(18) 式は次のようにかける。

$$(4.26) \quad \begin{cases} R_{m+1} y_1 = \sum_{k=1}^m U_k g_{m+1-k} \\ R_{m+1} y_2 = \sum_{k=1}^m V_k g_{m+1-k} \end{cases}$$

これから、 x_1, x_2 は次のようにして求められる。

$$(4.27) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{2}{N} TR_{m+1}^{-1} \sum_{k=1}^m U_k g_{m+1-k} \\ x_2 = \frac{2}{N} TR_{m+1}^{-1} \sum_{k=1}^m V_k g_{m+1-k} \end{cases}$$

同様にして、 x_m, x_{m-1} が求められる。

