

## Stochastic Production Planning について

愛媛大学工学部 大橋 守 (Ohashi Mamoru)

### 1 はじめに

ある製品の需要率と在庫量に注目して、製品の適正な生産率を決める生産計画問題を考える。製品の在庫量は需要率と生産率によって決まる微分方程式に従う。Fleming, Sethi and Soner[2] は製品の需要率がマルコフ連鎖に従ってランダムに変化する Production Planning について研究した。また、Akella and Kumar [1] は生産システムの故障や修理を考慮して、生産率に制約がある Production Planning 問題を取り扱った。

ここでは、製品の需要率がマルコフ連鎖に従ってランダムに変化する Stochastic Production Planning 問題に対するダイナミック・プログラミング方程式について考察し、classical solution の数値解を求める。製品の在庫量が次の確率微分方程式で表せるものとする。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= u(t) - y(t), \\ x(0) &= x, \quad y(0) = i \end{aligned} \tag{1}$$

ただし、製品の在庫量を  $x(t) \in R$ , 製品の生産率  $u(t) \in K = [0, d]$ , マルコフ連鎖  $\{y(t), t \geq 0\}$  とする。このマルコフ連鎖によって製品の需要率を表す。このとき

$$J(u : x, i) = \mathbf{E} \left[ \int_0^\infty e^{-\alpha t} \{h(x(t)) + g(u(t))\} dt \mid x(0) = x, y(0) = i \right]$$

を最小にする生産率  $u(t)$  を決める。ここで、 $h(x)$ ,  $g(x)$  は単位時間当たりの在庫費用、生産費用とする。

マルコフ連鎖の状態空間  $S = \{1, 2, \dots, s\}$  は有限で生成行列  $\Lambda$  を

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1s} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{22} & \dots & \lambda_{2s} \\ \dots & & & \\ \lambda_{s1} & \lambda_{s2} & \dots & -\lambda_{ss} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\lambda_{ii} = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}, \quad \lambda_{ij} \geq 0$$

とする。  $J(u : x, i)$  の最小値

$$v(x, i) = \inf_u J(u : x, i) \quad (3)$$

を最適費用関数といい、

$$v(x, i) = J(u^* : x, i)$$

となる  $u^*$  を最適生産方策という。

ここでは以下の仮定のもとで Stochastic Production Planning 問題を考察する。

仮定 (i) 在庫費用  $h(x)$  は  $R$  の凸関数で、正の定数  $k_1, k_2$  に対して

$$-k_1 \leq h(x) \leq k_2(1 + |x|^2)$$

とする。

(ii) 生産費用  $g(u)$  は  $K$  の狭義凸関数とする。

(iii)  $s < d$  とする。

## 2 最適方策

最適費用関数  $v(x, i)$  の性質を次に示す。

補題 1  $v(x, i)$  はそれぞれの  $i \in S$  に対して 凸関数で

$$-k \leq v(x, i) \leq k(1 + |x|^2) \quad (4)$$

となる正の定数  $k$  が存在する。

この補題は大橋 [5] の結果である。また、Stochastic Production Planning 問題に対するダイナミック・プログラミング方程式は

$$\alpha v(x, i) + H(x, i, v'(x, i)) - Lv(x, i) = 0, \quad x \in R, \quad i \in S \quad (5)$$

となる。ただし、

$$H(x, i, r) = - \inf_{u \in K} [h(x) + g(u) + (u - i)r], \quad (6)$$

$$Lv(x, i) = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} [v(x, j) - v(x, i)] \quad (7)$$

とする。

ダイナミック・プログラミング方程式 (5) の連続な解  $v(x, i)$  について次の定義を行う。

**定義** (viscosity solution)

$v(x, i)$  を連続関数とする。それぞれの  $(x, i)$  に対して凸集合  $D_x^+(x, i), D_x^-(x, i)$  を次のように定義する。

$$D_x^+(x, i) = \{r \in R^n : \limsup_{h \rightarrow 0} (v(x + h, i) - v(x, i) - r \cdot h) |h|^{-1} \leq 0\},$$

$$D_x^-(x, i) = \{r \in R^n : \liminf_{h \rightarrow 0} (v(x + h, i) - v(x, i) - r \cdot h) |h|^{-1} \geq 0\}$$

このとき、連続関数  $v(x, i)$  がそれぞれの  $(x, i)$  に対して

$$\alpha v(x, i) + H(x, i, r) - Lv(x, i) \leq 0, \quad r \in D_x^+(x, i)$$

$$\alpha v(x, i) + H(x, i, r) - Lv(x, i) \geq 0, \quad r \in D_x^-(x, i)$$

となるとき、ダイナミック・プログラミング方程式 (5) の viscosity solution という。

以下の補題は Fleming, Sethi and Soner[2] の結果である。

**補題 2**  $v(x, i)$  が viscosity solution で凸関数ならば、それぞれの  $i \in S$  に対して  $v'(x, i)$  は存在し、連続となる。

**補題 3**  $v(x, i)$  は viscosity solution となる。

**定理 1** それぞれの  $i \in S$  に対して

$$u^*(x, i) = \arg \min_{u \in K} [g(u) + u \cdot v'(x, i)] \quad (8)$$

は連続となる。

[証明] 補題 1、2、3 より  $v'(x, i)$  は  $x$  に関して連続となる。仮定 (ii) より

$$g(u) + u \cdot v'(x, i)$$

の最小点  $u^*(x, i)$  はただ 1 つ存在し、 $x$  に関して連続となる。  $\parallel$

**補題 4**  $u^*$  に対する方程式 (1) の解  $x^*(t)$  が

$$|x^*(t)| \leq k, \quad (t \geq 0)$$

となる正の定数  $k$  が存在する。

**定理 2**  $v(x, i) = J(u^* : x, i)$  となる最適生産方策  $u^*$  は (8) 式で与えられる。

[証明] 補題 4 と定理 1 より結果を得る。  $\parallel$

### 3 数値例

次に最適費用関数  $v(x, i)$  と最適生産方策  $u^*$  の数値解を求める。いま、

$$h(x) = x^2, \quad g(u) = u^2, \quad K = [0, 3], \quad S = \{1, 2\},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、最適生産方策  $u^*$  は (8) 式より

$$u^*(x, i) = \begin{cases} 0 & v'(x, i) \geq 0 \\ -\frac{1}{2}v'(x, i) & -6 \leq v'(x, i) < 0 \\ 3 & v'(x, i) < -6 \end{cases} \quad (9)$$

となる。製品の最適在庫量  $x^*(t)$  は

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = u^*(x^*(t), y(t)) - y(t), \quad (10)$$

$$x^*(0) = x, \quad y(0) = i$$

で与えられる。また、 $u^*(x, i) - i = 0$  となる  $x$  を  $\hat{x}_i$  とすると、 $\{(x(t), y(t)) : t \geq 0\}$  がマルコフ過程であるから

$$v(\hat{x}_i, i) = \sum_{j \neq i} \int_0^\infty \lambda_{ij} e^{-(\sum_{k \neq i} \lambda_{ik})t} \left[ \int_0^t e^{-\alpha s} \{f(\hat{x}_i) + g(u^*(\hat{x}_i, i))\} ds + e^{-\alpha t} v(\hat{x}_i, j) \right] dt$$

となる。よって、最適費用関数  $v(x, i)$  は  $\hat{x}_i$  で次の関係が成り立つ。

$$v(\hat{x}_1, 1) - \frac{\hat{x}_1^2 + 1}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + 1} v(\hat{x}_1, 2) = 0 \quad (11)$$

$$v(\hat{x}_2, 2) - \frac{\hat{x}_2^2 + 4}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + 1} v(\hat{x}_2, 1) = 0 \quad (12)$$

このとき、(5) 式は次のように書ける。

(a)  $-6 \leq v'(x, 1) < 0, -6 \leq v'(x, 2) < 0$  のとき

$$\alpha v(x, 1) + \frac{1}{4}(v'(x, 1))^2 + v'(x, 1) - v(x, 2) + v(x, 1) - x^2 = 0$$

$$\alpha v(x, 2) + \frac{1}{4}(v'(x, 2))^2 + 2v'(x, 2) - v(x, 1) + v(x, 2) - x^2 = 0$$

(b)  $v'(x, 1) \geq 0$ ,  $-6 \leq v'(x, 2) < 0$  のとき

$$\alpha v(x, 1) + v'(x, 1) - v(x, 2) + v(x, 1) - x^2 = 0$$

$$\alpha v(x, 2) + \frac{1}{4}(v'(x, 2))^2 + 2v'(x, 2) - v(x, 1) + v(x, 2) - x^2 = 0$$

(c)  $v'(x, 1) \geq 0$ ,  $v'(x, 2) \geq 0$  のとき

$$\alpha v(x, 1) + v'(x, 1) - v(x, 2) + v(x, 1) - x^2 = 0$$

$$\alpha v(x, 2) + 2v'(x, 2) - v(x, 1) + v(x, 2) - x^2 = 0$$

(d)  $-6 \leq v'(x, 1) < 0$ ,  $v'(x, 2) \leq -6$  のとき

$$\alpha v(x, 1) + \frac{1}{4}(v'(x, 1))^2 + v'(x, 1) - v(x, 2) + v(x, 1) - x^2 = 0$$

$$\alpha v(x, 2) - v'(x, 2) - v(x, 1) + v(x, 2) - x^2 - 9 = 0$$

(e)  $v'(x, 1) \leq -6$ ,  $v'(x, 2) \leq -6$  のとき

$$\alpha v(x, 1) - 2v'(x, 1) - v(x, 2) + v(x, 1) - x^2 - 9 = 0$$

$$\alpha v(x, 2) - v'(x, 2) - v(x, 1) + v(x, 2) - x^2 - 9 = 0$$

$\alpha = 0.05$  の場合について上式の数値解を求める。(11), (12) 式を満たす (a) の解は

(a-i)  $-1.45 \leq x < 1.30$  のとき

$$v(x, 1) = 46.890 - 2.531x + 0.975x^2$$

$$v(x, 2) = 48.305 - 3.176x + 0.975x^2$$

(a-ii)  $-1.05 < x \leq 0.90$  のとき

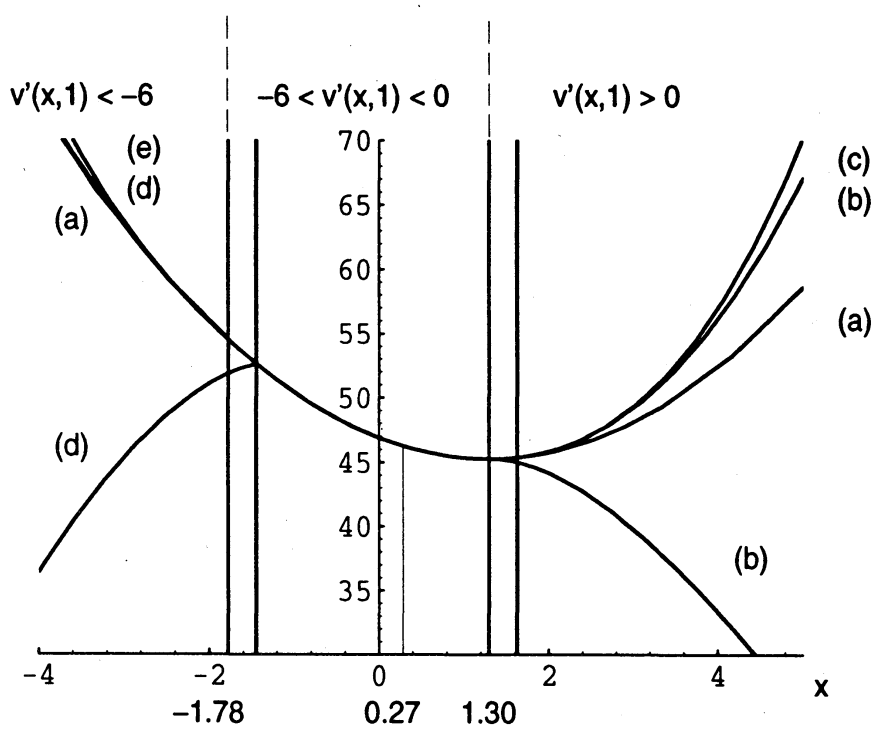
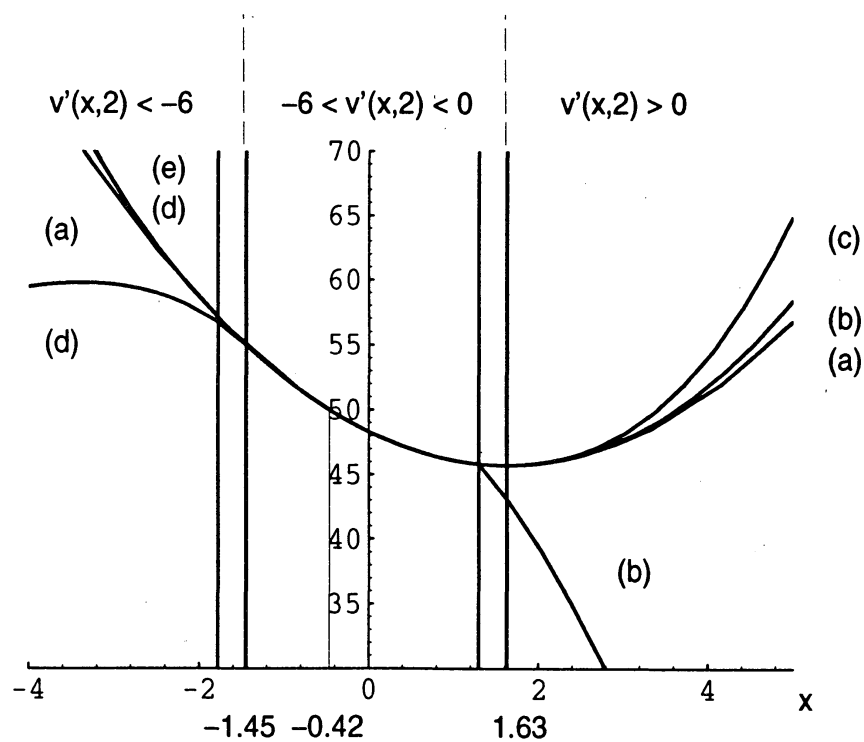
$$v(x, 1) = 29.058 - 4.200x - 1.000x^2$$

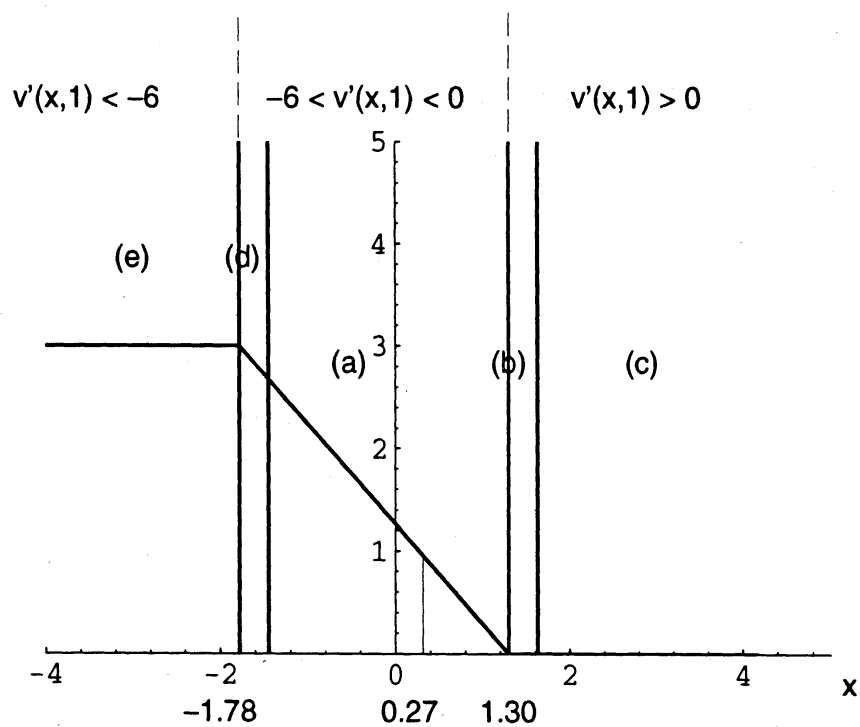
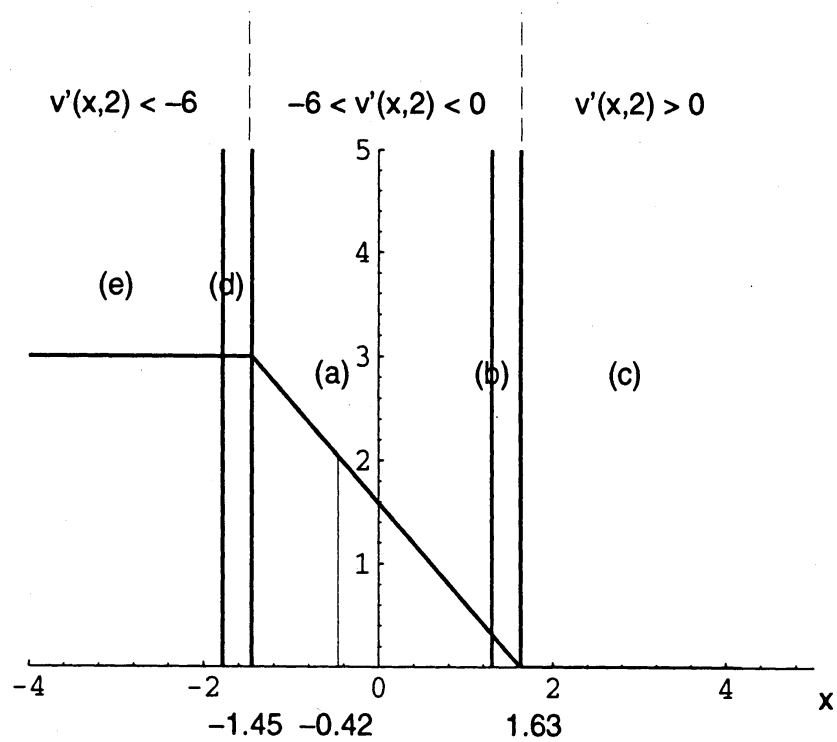
$$v(x, 2) = 30.721 - 2.210x - 1.050x^2$$

(a-iii)  $-1.05 < x \leq 0.90$  のとき

$$v(x, 1) = 29.063 - 4.154x - 1.025x^2$$

$$v(x, 2) = 30.676 - 2.153x - 1.025x^2$$

Fig. 1 最適費用関数  $v(x, 1)$ Fig. 2 最適費用関数  $v(x, 2)$

Fig. 3 最適生産方策  $u^*(x,1)$ Fig. 4 最適生産方策  $u^*(x,2)$

(a-iv)  $-1.05 < x \leq 0.90$  のとき

$$v(x, 1) = 29.116 - 4.105x - 1.050x^2$$

$$v(x, 2) = 30.679 - 2.100x - 1.000x^2$$

となり、 $v(x, i)$  は4つ存在する。しかし、補題1より  $v(x, i)$  は凸関数であるから (a-i) の解が最適費用関数となり Fig.1,2 (a) のようになる。このとき、最適生産方策  $u^*(x, i)$  と  $\hat{x}_i$  は

$$u^*(x, 1) = 1.266 - 0.975x$$

$$u^*(x, 2) = 1.588 - 0.975x$$

$$\hat{x}_1 = 0.27$$

$$\hat{x}_2 = -0.42$$

となる。また、 $\hat{x}_i$  の定義より製品の最適在庫量  $x^*(t)$  は

$$\frac{d}{dt}x^*(t) \begin{cases} \geq 0, & x \leq \hat{x}_{y(t)} \\ < 0, & x > \hat{x}_{y(t)} \end{cases}$$

となる。

(a-i) より  $v(1.30, 1) = 45.25$ ,  $v(1.30, 2) = 45.83$  であるから  $x \geq 1.30$  のとき、(b) の微分方程式を解くと Fig.1,2 (b) のようになる。このとき、 $v(x, i)$  が凸関数であるから (b) の条件  $v'(x, 1) \geq 0$ ,  $-6 \leq v'(x, 2) < 0$  を満たす  $x$  は  $1.30 \leq x < 1.63$  となる。よって、 $x \geq 1.63$  のとき、初期条件  $v(1.63, 1) = 45.36$ ,  $v(1.63, 2) = 45.72$  のもとで (c) の微分方程式を解くと Fig.1,2 (c) のようになる。同様に、 $x < -1.45$  のとき、初期条件  $v(-1.45, 1) = 52.60$ ,  $v(-1.45, 2) = 54.95$  のもとで (d) の微分方程式を解くと Fig.1,2 (d) のようになる。(d) の条件  $-6 \leq v'(x, 1) < 0$ ,  $v'(x, 2) \leq -6$  を満たす  $x$  は  $-1.78 \leq x < -1.45$  となる。よって、 $x < -1.78$  のとき、初期条件  $v(-1.78, 1) = 54.48$ ,  $v(-1.78, 2) = 57.05$  のもとで (e) の微分方程式を解くと Fig.1,2 (e) のようになる。このとき、最適生産方式は Fig.3, 4 のようになる。また、(c), (e) の微分方程式より

$$-k_1 \leq v(x, i) \leq k_2(1 + |x|^2)$$

となる。従って、ダイナミック・プログラミング方程式 (5) を満たし、最適費用関数である classical solution が求まった。

## 参考文献

- [1] R. Akella and P. R. Kumar, *Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system*, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-31**(1986), pp.116-126.

- [2] W. H. Fleming, S. P. Sethi and H. M. Soner, *An optimal stochastic production planning problem with randomly fluctuating demand*, SIAM J. Control and Optim., **25**(1987), pp.1494-1502.
- [3] W. H. Fleming and H. M. Soner, *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag, 1993.
- [4] M. K. Ghosh, A. Arapostathis and S. I. Marcus, *Optimal control of switching diffusions with application to flexible manufacturing systems*, SIAM J. Control and Optim., **31**(1993), pp.1183-1204.
- [5] 大橋 守, *Simple Production Planning Model* について, 数理解析研究所講究録, **864**(1994), pp. 31-40.