

De Sitter 群の一様有界表現

阪大 基礎工 川 西 啓 一

§ 1. 序文

$SL(2, \mathbb{R})$ および $SL(2, \mathbb{C})$ に関しては, それらの一様有界表現が構成され, その応用として *matrix element* を使ってすべての既約ユニタリ-表現が分類されている。(cf. [2], [3]) 我々はここで De Sitter 群について上記の考察を行なう。その際, [4] の表現 $g \mapsto R(g, n, s)$ が *complementary series* の表現を部分的に含むものであることを示し, 表現 $g \mapsto R(g, n, s)$ を使って De Sitter 群について Hausdorff-Toung の定理 L_p convolution 定理, Riemann-Lebesgue lemma を導く。最後にこれらの定理によって既約ユニタリ-表現の分類を行す。

G を De Sitter 群の *universal covering group* とし, H を *quaternion field* とする。 $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in H$, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ に対して

$$\bar{x} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k,$$

$$\hat{x} = x_1 + x_2 i + x_3 j - x_4 k,$$

$$|x| = (x\bar{x})^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$$

$$U = \{x \in \mathbb{H}; |x| = 1\}, \quad Z = \{x \in \mathbb{H}; x_4 = 0\}$$

とおく。 G は 2×2 quaternion matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \hat{a}c = \hat{c}a, \quad \hat{b}d = \hat{d}b, \quad \hat{a}d - \hat{c}b = 1$$

全体から作る群と同一視されること ([6], Chap II) に示されて
 いる。

$$G = K A N \text{ (右分解)}$$

ただし

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & -\hat{b} \\ b & a \end{pmatrix}; |a|^2 + |b|^2 = 1, a\hat{b} = b\hat{a} \right\},$$

$$A_+ = \left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{Z} \right\}$$

M' および $M \in K$ における A_+ の normalizer, centralizer とすると,

$$M' = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{u} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\hat{u} \\ u & 0 \end{pmatrix}; u \in U \right\}$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{u} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}; u \in U \right\}$$

を得る。 θ は Cartan involution とし, $V = \theta N$ とおくと,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; z \in \mathbb{Z} \right\}$$

にある。これらの subgroups について measure zero を除いて $G = TMA + N$ と分解される。 $T = MA + N$, $W = M/M$ (Weyl group)

とし, W の代表元として $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $p = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}$ をとる。

そのとき Bruhat 分解 $G = T \cup TpT$ (disjoint) を得る。

次に, G は左から $\mathbb{Z}$ に act し, 次の式で定義される。

$$g \cdot z = (az + b)(cz + d)^{-1}$$

ただし, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, $z \in \mathbb{Z}$ である。また,

$$\begin{cases} \omega_G(g, z) = |cz + d|^2, \\ u_G(g, z) = (cz + d) / |cz + d| \end{cases}$$

とおくと ω_G および u_G は multipliers である。

§ 2. G の表現について

Continuous principal series の既約ユニタリ表現は [6] に記述されている。それらは 2 つの parameters (n, s) , $n \geq 0$ half-integer, $s = 3/2 + it$, をもつ表現 $g \mapsto V_g^{n,s}$ として与えられる。 n に対して $(2n+1)$ 次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_n$ の $SU(2)$ の既約ユニタリ表現 ρ^n を与える。このとき $V_g^{n,s}$ は $\mathbb{Z}$ 上で定義される V^n -valued 2 乗可積分関数全体よりなる Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素として定義され, explicit には次の形である。

$$(2.1) \quad (V_g^{n,s} f)(z) = \omega_G(g^{-1}, z)^{-s} \rho^n(u_G(g^{-1}, z)^{-1}) f(g^{-1} \cdot z), \quad f \in \mathcal{H}$$

次に (2.1) から complementary series の既約ユニタリ表現の explicit 形を得る。

$g_{n,\sigma}$ ($\sigma \in \mathbb{R}$) を $\mathbb{R}^2$ で定義された V^n -valued 関数で

$$\|f\|_{n,\sigma}^2 = C_\sigma^n \iint_{\mathbb{R}^2} |u-v|^{-6+2\sigma} \langle f(u), f(v) \rangle_{V^n} du dv < +\infty$$

を満たすものの全体の作る Hilbert 空間とする。ただし, $C_\sigma^n = (2n+1)^{-1} 2^{3-2\sigma} \pi^{-3/2} \Gamma(-3/2+\sigma) / \Gamma(3-\sigma)$ である。そのとき

(1) $3/2 < \sigma < 3$ に対して, 表現 $g \mapsto V_g^{0,\sigma}$ on $g_{0,\sigma}$ は class 1 の complementary series の表現である。

(2) positive integer n と $3/2 < \sigma < 2$ に対して, 表現 $g \mapsto V_g^{n,\sigma}$ on $g_{n,\sigma}$ は n に対応する complementary series の表現である。
§3. G の一様有界表現

[4] と同様の方法によって次の定理を得る。得られる表現 $g \mapsto R(g, n, s)$ に関しては [4] の結果と一致するが, さらにこれが Complementary series を部分的に含むことが分る。

定理 1. $n \geq 0$ と half-integer とする。そのとき以下の条件を満たす表現 $g \mapsto R(g, n, s)$ of G on $\mathcal{H}$ が存在する;

(1) $g \mapsto R(g, n, s)$ は continuous, ただし, $n \geq 0$ half-integer, $1/2 < \operatorname{Re} s < 5/2$,

(2) $\operatorname{Re} s = 3/2$ のとき, $g \mapsto R(g, n, s)$ は Continuous principal series の表現にユニタリ-同値,

(3) $n=0$, s が実数で $3/2 < s < 5/2$ のとき, $g \mapsto R(g, n, s)$ は class 1 の Complementary series の表現にユニタリ-同値,

(4) $n \geq 1$ integer, s 実数で $3/2 < s < 2$ のとき, $g \mapsto R(g, n, s)$ は n に対応する Complementary series の表現にユニタリ-同値,

(5) $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ ならば, 各 fixed $g \in G$, $n \geq 0$ half-integer に対して $s \mapsto (R(g, n, s)\xi, \eta)$ は $1/2 < \operatorname{Re} s < 5/2$ で analytic,

(6) $\sup_{g \in G} \|R(g, n, s)\|_{\infty} \leq K_{\sigma} (1+n)(1+|t|)^4$, $s = \sigma + it$, $1/2 < \sigma < 5/2$, $n \geq 0$ half-integer, $\|\cdot\|_{\infty}$ は operator norm を表わし, K_{σ} は $(1/2, 5/2)$ の任意の closed subinterval 上で一様有界にとれる.

(証明) (3), (4) を除いては [4] にその証明が与えられている.

(3), (4) を証明するために $n \geq 0$ integer, $0 < \sigma < 3$ に対して, $\mathbb{C}$ 上で定義される $\mathbb{C}^n$ -valued 関数で

$$\|F\|_{n, \sigma}^2 = \int_{\mathbb{C}} |F(z)|_{\mathbb{C}^n}^2 \cdot |z|^{3-2\sigma} dz < +\infty$$

を満たすもの全体のつくる Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{n, \sigma}$ を導入する.

$s_1 = \sigma_1 + it_1$, $s_2 = \sigma_2 + it_2$, $0 < \sigma_1, \sigma_2 < 3$, $-\infty < t_1, t_2 < +\infty$ に対して $\mathcal{H}_{n, \sigma_1}$ 上の operator $W(s_2, s_1)$ を

$$(W(s_1, s_2)F)(z) = |z|^{s_2 - s_1} F(z), \quad F \in \mathcal{H}_{n, \sigma_1}$$

によって定義すれば, $W(s_1, s_2)$ は $\mathcal{H}_{n, \sigma_1}$ から $\mathcal{H}_{n, \sigma_2}$ の $\mathbb{C}$ への isometry で, $W(s_2, s_1)$ は $W(s_1, s_2)$ の inverse mapping である. さらに $\mathbb{R}^n$ 上の Fourier 変換を $\mathcal{F}$ で表わせば, $\mathcal{F}\mathcal{H}_{n, \sigma} = \mathcal{H}_{n, \sigma}$ であることが分り, [4] における intertwining operator $A(s) = \mathcal{F}^{-1}W(s, 3/2)\mathcal{F}$ for $\operatorname{Re} s \geq 3/2$, が成立する. これらの事と $R(g, n, s)$ の analyticity によって (3), (4) を得る. (証明終り)

§ 4. G の Fourier analysis

$f \in L_1(G)$, $n \geq 0$ half-integer, $s \in \mathbb{C}$ $\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < \frac{5}{2}$ に対して f の Fourier 変換を

$$F(n, s) = \int_G f(q) R(q, n, s) dq$$

によって定義する。fixed n, s , $\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < \frac{5}{2}$ に対して $R(q, n, s)$ は一様有界表現であるから $F(n, s)$ は well-defined で G 上の bounded operator である。したがって, 各 fixed n に対して $F(n, s)$ は $\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < \frac{5}{2}$ において s の analytic function である。

定理 2 (Hausdorff-Young 定理) $1 < p < 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $s = \sigma + it$, $(\frac{1}{p} + \frac{5}{p'})/2 < \sigma < (\frac{5}{p} + \frac{1}{p'})/2$, $\sigma \neq \frac{3}{2}$ とする。このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ と constant $A(p, \sigma, \varepsilon)$ が存在して

$$(4.1) \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|F(n, s)\|_{p'}^p (1+|t|)^{2-4(\sigma-\frac{3}{2})/p-\varepsilon} dt \right)^{1/p} \\ \leq A(p, \sigma, \varepsilon) (1+n)^{|\sigma-\frac{3}{2}| \tau(1+\delta)/(1-\tau) + \tau-1} \|f\|_p,$$

を満足する。ただし, $f \in S_0(G)$, G 上の compact support をもつ simple function の全体からなる集合, $\|A\|_p^p = \tau(1A)^p$, $1A = (A^*A)^{1/2}$, τ は $\frac{1}{p} = 1 - \tau/2$ によって与えられ, $0 < \tau < 1$ である。

(証明) 最初に定理 1 の (b) は次の様に強められる;

任意の $\delta > 0$ に対して

$$\sup_{q \in G} \|R(q, n, s)\|_{\infty} \leq A_{\sigma, \delta} (1+n)^{|\sigma-\frac{3}{2}|(1+\delta)} (1+|t|)^{4|\sigma-\frac{3}{2}|(1+\delta)}$$

また $\mathcal{F}(n, s)$ の定義によって

$$\|\mathcal{F}(n, s)\|_{\infty} \leq \sup_{g \in G} \|R(g, n, s)\|_{\infty} \cdot \|f\|_1$$

これらの不等式から次のことを得る；

任意の $\delta > 0$, $1/2 < \sigma < 5/2$ に対して

$$(4.2) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} (1+|t|)^{-4(\sigma-3/2)(1+\delta)} \|\mathcal{F}(n, \sigma+it)\|_{\infty} \\ \leq A_{\sigma, \delta} (1+n)^{1(\sigma-3/2)(1+\delta)} \|f\|_1, \quad f \in S_0(G)$$

が成立する。さらに G に対する Plancherel の定理 (cf. [5]) に
よって

$$\|f\|_2^2 \geq \frac{1}{16\pi^2} \sum_{\substack{n \geq 0 \\ \text{half-integer}}} (2n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathcal{F}(n, 3/2+it)\|_2^2 [(n+1/2)^2+t^2] \\ \times t \cdot \tanh(\pi t + i\pi) dt$$

故に

$$(4.3) \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathcal{F}(n, 3/2+it)\|_2^2 \cdot |t|^3 / (1+|t|) dt \right)^{1/2} \\ \leq 4\pi (2n+1)^{-1} \cdot \|f\|_2$$

$(1/p + 5/q)/2 < \sigma < 3/2$ と仮定する。 α を $1/2 < \alpha < \sigma < 3/2$ とし、

(4.2) を σ の代りに α に置き換えると、

$$(4.4) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} (1+|t|)^c \|\mathcal{F}(n, \alpha+it)\|_{\infty} \leq A_{\alpha, \delta} (1+n)^{-c/4} \|f\|_1,$$

$c = 4(\alpha - 3/2)(1+\delta)$ α と $\sigma = \alpha(1-\tau) + 3\tau/2$ に取って、(4.3) と

(4.4) に定理 4 ([2], p. 16) を適用する。定理 4 の notation で

$$c = 4(\alpha - 3/2)(1+\delta), \quad a = 3/2, \quad b = -1/2$$

と取ると

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathcal{F}(n, \sigma+it)\|_q^q (1+|t|)^{qd} dt \right)^{1/q} \leq A(\tau, \alpha, \delta, n) \|f\|_p$$

$f \in S_0(G)$ を得る。ここで [2] におけると同様の議論により,

$$qd \geq 2 - 4q|\sigma - 3/2| - \varepsilon$$

$$A(\tau, \alpha, \delta, \kappa) = A(p, \sigma, \delta) (1+\kappa)^{|\sigma - 3/2| \tau (1+\delta)/(1-\tau) + \tau - 1}$$

が得られる。 $3/2 < \sigma < (5/p + 1/q)/2$ の場合にも $\mathcal{F}(n, s) = \mathcal{F}(n, 3-s)$ であることを使って同様に証明される。(証明終り)

$\Phi(s) = (\mathcal{F}(n, s), \xi, \eta)$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に Phragmen-Lindelöf principle を適用することにより以下の系が得られる。(cf. [2])

系 2.1. 各 p , $1 \leq p < 2$ に対して

$$(4.5) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mathcal{F}(n, 3/2 + it)\|_{\infty} \leq A_p \|f\|_p, \quad f \in S_0(G)$$

ただし, A_p は p のみに depend する constant である。

系 2.2. 各 p , $1 \leq p < 2$, $(1/p + 5/q)/2 < \sigma < (5/p + 1/q)/2$, $s = \sigma + it$ に対して,

$$(4.6) \quad \|\mathcal{F}(n, s)\|_{\infty} \leq A_{p,n,s} \|f\|_p, \quad f \in S_0(G)$$

次に Discrete series の表現を $D^{n,r,+}$, $D^{n,r,-}$ で表わす。ここで n, r : half-integer, $n \geq r \geq 1$, $n-r$: integer である。(cf. [6])

$$D_f^{n,r,\pm} = \int_G f(q) D_q^{n,r,\pm} dq, \quad f \in L_1(G)$$

とおく。

定理 3. $1 \leq p \leq 2$, $1/p + 1/q = 1$ とすると,

$$\frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{\substack{n \geq 1 \\ \text{half-integer}}} (2n+1) \sum_{\substack{n \geq r \geq 1 \\ n-r: \text{integer}}} (2r-1)(n+r)(n-r+1) (\|D_f^{n,r,+}\|_p^q + \|D_f^{n,r,-}\|_p^q) \right\}$$

$$+ \|D_f^{n,r;\pm} - \frac{1}{2}\|_p \}^{1/p} \leq \|f\|_p, \quad f \in L_1(G) \cap L_p(G)$$

これは是理2と同じ方法で証明される。

系3.1. Mapping $f \mapsto D_f^{n,r;\pm}$ は L_p 全体への unique 拡張をもち、この拡張は次の不等式を満たす。

$$(4.7) \quad \sup_{n,r;\pm} \|D_f^{n,r;\pm}\|_\infty \leq (2\pi/3)^{1-1/p} \|f\|_p, \quad 1 \leq p \leq 2$$

2つの関数 f, h に対して、それらの Convolution を

$$(f * h)(g_0) = \int_G f(g_0 \bar{g}) h(g) dg$$

で定義する。(4.5), (4.7) および Hilbert 空間上の bounded operators からなる Banach 空間の一般論 (cf. [2]) を結びあわせると、計算によって次の結論を得る。

是理4.1. (L_p convolution 是理) $f \in L_2(G), h \in L_p(G), 1 \leq p < 2$ とする。 $k = f * h$ とおくと、

$$(4.8) \quad k \in L_2(G), \quad \|k\|_2 \leq C_p \|f\|_2 \|h\|_p,$$

ただし、 C_p は f および h に independent である。すなわち L_p 関数 ($1 \leq p < 2$) による convolution の operation は $L_2(G)$ 上の bounded operator である。

是理4.2. $f, h \in L_2(G), k = f * h$ とすると、

$$(4.9) \quad k \in L_q(G), \quad 2 < q \leq \infty, \quad \|k\|_q \leq C_q \|f\|_2 \|h\|_2,$$

ここで C_f は f および η に independent である。

(4.6) における constant $A_{p,n,s}$ をさらに詳細に調べることに
よって次の定理を得る。(cf. [2], [3])

定理 5 (A Riemann-Lebesgue lemma) $n \geq 0$,
half-integer, $1 \leq p < 2$, $f \in L_p(G)$ とする。そのとき,
 $\|F(n, \frac{1}{2} + it)\|_\infty$ は infinity で 0 になる。

§ 5. Continuous principal series a characterization
 $g \mapsto U_g$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ における G のユニタリー表現と
する。

定義. $g \mapsto U_g$ が fixed p , $p \geq 1$ に対して extendable
to $L_p(G)$ であるとは

$$\|U(f)\|_\infty \leq A \|f\|_p, \quad f \in L_1(G) \cap L_p(G)$$

が成立することである。ただし, A は f に independent で,
 $U(f) = \int_G f(g) U_g dg$ である。

次の lemma は [2] による。

Lemma. 表現 $g \mapsto U_g$ が extendable to $L_p(G)$ であるに
めの必要十分条件は, 任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対してすべての
matrix element $\phi(g) = (U_g \xi, \eta)$ が $L_p(G)$ に属すること
である。ここで $1/p + 1/p' = 1$ である。

Remarks. G の正則表現は (4.8) によって $L_p(G)$, $1 \leq p < 2$
に extendable である。再び (4.9) によって正則表現のすべて

の matrix element は $L_q(G)$, $q > 2$ に属する。

すべての matrix element は $L_\infty(G)$ に属する α で, matrix element が $L_{p_0}(G)$ に属するならば, それはまた $L_q(G)$, $q \geq p_0$ に属している。故に lemma によって, 表現が $L_{p_0}(G)$, $p_0 > 1$ に extendable ならば, それはまた $L_p(G)$, $1 \leq p \leq p_0$ に extendable である。

定理 6. $g \mapsto U_g$ を 恒等表現および non square-integrable 表現と異なる G の既約ユニタリ-表現とする。そのとき U は, (1) Continuous principal series, (2) Complementary series, (3) Discrete series, (4) Limits of Discrete series, のいずれかの表現に同値である。さらに,

(i) U が (2) または (4) の表現にユニタリ-同値。

$\Leftrightarrow U$ は $L_p(G)$, $1 \leq p < 2$ に extendable であるが, $L_2(G)$ に extendable ではない。

$\Leftrightarrow$ すべての matrix element が $L_q(G)$, $q > 2$ に属するが, $L_2(G)$ に属さないもの α が存在する。

(ii) U が $n=0$ に対しては $3/2 < \sigma < 5/2$, $n \geq 1$ integer に対しては $3/2 < \sigma < 2$ である parameter σ に対応する (2) の表現にユニタリ-同値。

$\Rightarrow U$ は $L_p(G)$, $p < 4/(2\sigma-1)$ に extendable。

$\Leftrightarrow$ すべての matrix element が $L_q(G)$, $q > 4/(5-2\sigma)$ に

属する。

(iv) ψ が (3) の表現にユニタリ-同値。

$\Leftrightarrow \psi$ は $L_2(G)$ に extendable。

$\Leftrightarrow$ すべての matrix element が $L_2(G)$ に属する。

(証明) [1]において, G のすべての既約ユニタリ-表現は恒等表現および non square-integrable 表現を除いて, (1), (2), (3), (4) のいずれかの表現にユニタリ-同値であることが示されている。

(4.5) によって (1) のすべての表現は $L_p(G)$, $1 \leq p < 2$ に extendable であり, (4.7) によって (3) のすべての表現は $L_2(G)$ に extendable である。strict half-integer n に対する表現 $g \mapsto V_g^{n, 3/2}$ は (4) の 2 つの表現の直和である。(cf. [6]) $V_g^{n, 3/2}$ は $L_p(G)$, $1 \leq p < 2$ に extendable であるから, (4) のすべての表現もまた $L_p(G)$, $1 \leq p < 2$ に extendable である。最後に (4.6) によって $n=0$ に対して $3/2 < \sigma < 5/2$, $n \geq 1$ integer に対して $3/2 < \sigma < 2$ である σ に対応する (2) の表現は $L_p(G)$, $1 \leq p < 4/(2\sigma-1)$ に extendable である。

次に (2) または (4) のすべての表現が $L_2(G)$ に extendable ではないことを示さなければならぬ。最初に (2) について考える。

lemma によって, $L_2(G)$ に属さない matrix element の存在を示せば十分である。[1] によって, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\phi(at) = (V_{at}^{n,s} f, f) \sim \operatorname{Re} [\lambda \exp \{(-3/2 + i(\sigma - 1/4)^{1/2})t\}],$$

ただし, $S = 3/2 \pm i(\sigma - 1/4)^{1/2}$, $\lambda \neq 0$, $dq = 2\pi^2 \sinh^3 t \, dt \, dk \, dk'$ 従って, $\phi(at) \in L_2(G)$ である。 (4) の表現に対しては, $t \rightarrow \infty$ のとき,

$$\phi(at) \sim \lambda e^{-3t/2}$$

従って, $\phi(at) \in L_2(G)$ である。 (証明終り)

§ 3 の補足

Normalized principal series は次の様に定義される;
 $n \geq 0$ half-integer, $\operatorname{Re} S = 3/2$ に対して

$$R(g, n, s) = A(s) V_g^{n,s} A(3-s), \quad g \in G$$

ただし, $\operatorname{Re} S = 3/2$ に対しては, operator $A(s)$ は $\mathcal{H} \cap \mathcal{U} = \mathcal{F}$ - operator で $A(s)^{-1} = A(3-s)$ である。この explicit 形式は

$$(A_n(s)f)(v) = \frac{1}{\gamma(s)} \int_{\mathbb{Z}} |z|^{-9/2+s} f(v-z) \, dz$$

$$\gamma(s) = 2^{-3/2+s} \pi^{3/2} \Gamma(-3/4 + s/2) / \Gamma(9/4 - s/2)$$

である。

$R(g, n, s)$ を拡張するとき本質的に用いたことは, $G_0 = \mathrm{VMA}_+$ としたとき,

$$R(g, n, s) = V_g^{n, 3/2}, \quad g \in G_0, \quad \operatorname{Re} S = 3/2$$

であること, $G = G_0 \cup G_0 p G_0$ (disjoint), および次の不等式 ([7] の Theorem B_2^*) である。

$\phi(v), \psi(z) \in \mathbb{R}^3$ の関数とし, $0 < r < 3$, $1 < p < \infty$, $\alpha < 3/p'$, $\beta < 3/q$, $\alpha + \beta \geq 0$, $1/q = 1/p + (\alpha + \beta + r)/3 - 1$ と仮定する。
 $p \leq q < \infty$ ならば,

$$\left| \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\phi(v) \psi(z)}{|v|^\alpha |v-z|^r |z|^\beta} dv dz \right| \leq K \|\phi\|_p \|\psi\|_{q'}$$

ただし, $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$, K は ϕ および ψ に independent である。

References

- 1 J.Dixmier: Représentations intégrables du groupe de De Sitter, Bull. Soc. Math. France, 89 (1961), 9-41.
- 2 R.A.Kunze and E.M.Stein: Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 real unimodular group, Amer. J. Math., 82 (1960), 1-62.
- 3 R.L.Lipsman: Uniformly bounded representations of $SL(2, \mathbb{C})$, Amer. J. Math., 91 (1969), 47-66.
- 4 _____: Uniformly bounded representations of the Lorentz groups, Amer. J. Math., 91 (1969), 938-962.
- 5 K.Okamoto: On the Plancherel formulas for some types of simple Lie groups, Osaka J. Math., 2 (1965), 247-282.
- 6 R.Takahashi: Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés, Bull. Soc. Math. France, 91 (1963), 289-433.
- 7 E.M.Stein and G.Weiss: Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space, J. Math. and Mechanics, 7 (1958), 503-514.