

Association scheme の composition

和歌山県立医科大学 楠本熊一

1 序 1957 年に A. T. James [5] が実験計画法の処理とブロックとの関係を relationship algebra として最初に取り扱って以来、1959 年に R. C. Bose と D. M. Meener が association algebra を処理間の relationship algebra として、そして同じ時 J. Ogawa [1] が処理についての association とブロックとの relationship algebra の解析を PBI design についても行った。1964 年に S. Yamamoto [3] は処理間に定義されている association algebra で、実験単位間に定義されている relationship algebra の中へ写像することが、実験計画法であるとみなし、その写像の特性を定義した。ここではまた、二つの algebra (処理についての association algebra とブロックについての relationship algebra) の composition を導入している。orthogonal composition でないものの取扱については一方を nuisance parameter algebra としている。私は、両方の algebra を nuisance parameter algebra と考えないで、しかも orthogonal composition でない composition を本論文で詳述しようと試みた。この composition を再びブロックの relationship algebra との composition へもって行こう。

2. 2つの association algebra の composition

処理数 v_1

v_1, v_2 はるものと考えよう。処理数 v_1 とする処理間に定義されている

association を示す association matrices によって生成される association algebra を $\mathcal{A}$ とし, $\mathcal{A}$ の互いに直交する idempotents を $A_1^\#, \dots, A_m^\#$ とし $\mathcal{A}$ の principal idempotent を $A_1^\# + \dots + A_m^\#$ とする。

処理数 v_2 とする処理間に定義されている association を示す association matrices によって生成される association algebra を $\mathcal{B}$ とする。 $\mathcal{B}$ の直交する idempotents を $B_1^\#, \dots, B_n^\#$ とし, $\mathcal{B}$ の principal idempotent を $B_1^\# + \dots + B_n^\#$ とする。 Φ_1 を $v_1 \times v$ 行列とし, Φ_2 を $v_2 \times v$ 行列 としよう。

行列 Φ_1, Φ_2 がつぎの条件 (i), (ii), (iii) を満足するとする。

$$(i) \quad \Phi_1' \Phi_1 = c_1 A_1^\# + c_2 A_2^\# + \dots + c_m A_m^\# \quad c_i > 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

$$(ii) \quad \Phi_2' \Phi_2 = d_1 B_1^\# + d_2 B_2^\# + \dots + d_n B_n^\# \quad d_j > 0 \quad (j=1, \dots, n)$$

$$(iii) \quad \Phi_1' \Phi_2 B_j^\# \Phi_2' \Phi_1 = d_j (p_{j1} A_1^\# + p_{j2} A_2^\# + \dots + p_{jm} A_m^\#)$$

ここでつぎの記号をつけよう

$$\bar{A}_i^\# = \frac{1}{c_i} \Phi_1 A_i^\# \Phi_1'$$

$$\bar{B}_j^\# = \frac{1}{d_j} \Phi_2 B_j^\# \Phi_2'$$

$$\bar{B}_0^\# = I_v - \sum_{j=1}^n \bar{B}_j^\#$$

I_v : v 次の単位行列

$$i=1, \dots, m \quad j=1, \dots, n$$

するとつぎの一連の定理が得られる。

定理 1
$$\bar{A}_i^\# \bar{B}_k^\# \bar{A}_j^\# = \frac{p_{ki}}{c_i} \delta_{ij} \bar{A}_i^\# \quad i, j=1, \dots, m$$

$$k=0, 1, \dots, n$$

ところで
$$\rho_{0i} = c_i - \sum_{j=1}^n \rho_{ji}$$

定理 2
$$\rho_{ki} = 0 \quad \text{ならば, そのときにのみ} \quad \bar{B}_k^* \bar{A}_i^* = 0$$

$$\rho_{ki} = c_i \quad \text{ならば, そのときにのみ} \quad \bar{B}_k^* \bar{A}_i^* = \bar{A}_i^*$$

定理 3
$$\rho_{ki} \geq 0 \quad c_i \geq \sum_{k=1}^n \rho_{ki} \geq 0$$

定理 4
$$\rho_{ki} > 0 ; k = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \quad \sum_{x=1}^s \rho_{\alpha_x i} = c_i$$

 ならば, そのときにのみ $\bar{B}_j^* \bar{A}_i^* \bar{B}_k^* ; j, k = \alpha_1, \dots, \alpha_s$ は一次独立
 であって $\sum_{x=1}^s \bar{B}_{\alpha_x}^* \bar{A}_i^* = \bar{A}_i^*$ である.

証明 $\bar{A}_i^* (I - \sum_{x=1}^s \bar{B}_{\alpha_x}^*) \bar{A}_i^* = \bar{A}_i^* (1 - \sum_{x=1}^s \rho_{\alpha_x i} \frac{1}{c_i}) = 0$ であるから
 $(I - \sum_{x=1}^s \bar{B}_{\alpha_x}^*) \bar{A}_i^* (I - \sum_{x=1}^s \bar{B}_{\alpha_x}^*) = 0$ となり $\sum_{x=1}^s \bar{B}_{\alpha_x}^* \bar{A}_i^* = \bar{A}_i^*$ である.
 また $\sum_{j,k} b_{jk} \bar{B}_j^* \bar{A}_i^* \bar{B}_k^* = 0$ とおくと $b_{jk} \bar{B}_j^* \bar{A}_i^* \bar{B}_k^* = 0$
 ここでもし $\bar{B}_j^* \bar{A}_i^* \bar{B}_k^* = 0$ ならば $\rho_{ji} \rho_{ki} \bar{A}_i^* = 0$ となり
 $\rho_{ki} > 0 ; k = \alpha_1, \dots, \alpha_s$ という仮定に反する. よって $b_{jk} = 0$
 逆に $\sum_{x=1}^s \bar{B}_{\alpha_x}^* \bar{A}_i^* = \bar{A}_i^*$ ならば $\frac{1}{c_i} \sum_{x=1}^s \rho_{\alpha_x i} \bar{A}_i^* = \bar{A}_i^*$ (定理1より)
 つぎに $\rho_{ki} = 0$ ならば $\bar{B}_k^* \bar{A}_i^* = 0$ となり $\bar{B}_k^* \bar{A}_i^* \bar{B}_j^* ; j, k = \alpha_1, \dots, \alpha_s$
 は一次独立であるという仮定に反する. 故に $\rho_{ki} > 0 ; k = \alpha_1, \dots, \alpha_s$

定理 5
$$\rho_{ki} > 0 ; k = \alpha_1, \dots, \alpha_s \quad \sum_{x=1}^s \rho_{\alpha_x i} < c_i$$

$$\rho_{ji} = 0 \quad ; j \neq \alpha_1, \dots, \alpha_s$$

ならば, そのときにのみ $\bar{A}_i^*, \bar{A}_i^* \bar{B}_{\alpha_x}, \bar{B}_{\alpha_y}^* \bar{A}_i^*, \bar{B}_{\alpha_y}^* \bar{A}_i^* \bar{B}_{\alpha_x}^*$

$x, y = 1, \dots, n$ は一次独立である。

証明. $a\bar{A}_i^\# + \sum_{y=1}^n b_y \bar{A}_i^\# \bar{B}_{\alpha_y}^\# + \sum_{x=1}^n g_x \bar{B}_{\alpha_x}^\# \bar{A}_i^\# + \sum_{x,y=1}^n h_{xy} \bar{B}_{\alpha_x}^\# \bar{A}_i^\# \bar{B}_{\alpha_y}^\# = 0$ とおく

$\bar{B}_{\alpha_x}^\#, \bar{B}_{\alpha_y}^\#$ を前からと後からとそれぞれかけると $a + b_y + g_x + h_{xy} = 0$

右から $\bar{B}_{\alpha_y}^\#$ をかけ、左から $\bar{B}_{\alpha_x}^\#$ をかけると $\rho_{\alpha_y i} (c_i a + c_i b_y + \sum_{x=1}^n g_x \rho_{\alpha_x i} + \sum_{x=1}^n h_{xy} \rho_{\alpha_x i}) = 0$

よって $(a + b_y)(c_i - \sum_{x=1}^n \rho_{\alpha_x i}) = 0$ 故に $a + b_y = 0$

同様に $a + g_x = 0$ 故に $-a = g_x = b_y = -h_{xy}; x, y = 1, \dots, n$ $\bar{B}_1, \bar{B}_1'$ と

左からかけると $a(c_i - \sum_{x=1}^n \rho_{\alpha_x i}) \bar{A}_i^\# = 0$ 故に $a = 0$

逆に、もしそうだとすれば 定理 4, 定理 1 より $\rho_{\alpha_i} > 0, \sum_{i=1}^n \rho_{\alpha_x i} < c_i$

($k = \alpha_1, \dots, \alpha_n$) である。

algebra $\mathcal{O}$ と algebra $\mathcal{B}$ とで構成された relationship algebra R において、仮定 (i), (ii) は $\mathcal{O}, \mathcal{B}$ から R への partially similar mapping であることを意味し、仮定 (iii) は image matrix algebra が orthogonal ではないということの意味する。

(iii) の代わりに条件

$$(iii)^* \quad \bar{\Phi}_2 \bar{\Phi}_1' \bar{A}_i^\# \bar{\Phi}_1 \bar{\Phi}_2' = c_i (\rho_{i1}^* \bar{B}_1^\# + \dots + \rho_{in}^* \bar{B}_n^\#) \quad i = 1, \dots, m$$

を置くこともできる。そしてその両方の条件 (iii) と (iii)* との成立を仮定することもできる。このとき

$$\bar{A}_0^\# = I_n - \sum_{i=1}^m \bar{A}_i^\#$$

と記号をつけると

$$(1) \quad \bar{B}_j^\# \bar{A}_i^\# \bar{B}_k^\# = \frac{\rho_{ij}^*}{d} \delta_{jk} \bar{B}_j^\# \quad \begin{matrix} j, k = 1, \dots, n \\ i = 0, 1, \dots, m \end{matrix}$$

定理2より $p_{ki} = 0$ ならば, そのときにのみ $p_{ik}^* = 0$

(2) $p_{ki} = c_i, p_{ik}^* = d_i$ ならば, そのときにのみ $\bar{A}_i^\# = \bar{B}_k^\#$

定理4より $\sum_{x=1}^s p_{\alpha_x i} = c_i, p_{ki} > 0, k = \alpha_1, \dots, \alpha_s$ ならば

(3) $\bar{A}_i^\# = \sum_{x=1}^s \bar{B}_{\alpha_x}^\#$ であって $p_{i\alpha_x}^* = d_{\alpha_x}$ である.

さて M^* の条件を仮定せずに, 定理1から定理5までによって algebra R は $p_{ki}; k=1, \dots, n, i=1, \dots, m$ の値によって, つぎの4つの場合にわけられることがわかり, 各々の場合について, その R の ideal と, その ideal の principal idempotent を計算する.

Case 1. $p_{ki} = 0; k=1, 2, \dots, n$ なるとき $[\bar{A}_i^\#]$ は one-dimensional two-sided ideal である. その ideal の principal idempotent は $\bar{A}_i^\#$ である.

Case 2. $p_{ki} = c_i$ なるとき $[\bar{A}_i^\#]$ は R の one-dimensional two-sided ideal である. その ideal の principal idempotent は $\bar{A}_i^\#$ である.

Case 3. $p_{\alpha_1 i}, p_{\alpha_2 i}, \dots, p_{\alpha_s i} > 0, \sum_{x=1}^s p_{\alpha_x i} = c_i$ なるとき

$$[\bar{B}_{\alpha_x}^\# \bar{A}_i^\# \bar{B}_{\alpha_y}^\#; x, y=1, 2, \dots, s]$$

は R の s^2 -dimensional two-sided ideal である. その ideal の principal idempotent は

$$(4) \quad \sum_{x=1}^s \frac{c_i}{\rho_{\alpha_x i}} \bar{B}_{\alpha_x}^* \bar{A}_i^* \bar{B}_{\alpha_x}^*$$

である。

なぜなら

$$(5) \quad \sum_{x=1}^s \sum_{y=1}^s \bar{B}_{\alpha_x}^* \bar{A}_i^* \bar{B}_{\alpha_y}^* = \sum_{y=1}^s \bar{A}_i^* \bar{B}_{\alpha_y}^* = \bar{A}_i^* = \sum_{x=1}^s \bar{B}_{\alpha_x}^* \bar{A}_i^*$$

であるから定理4より $[\bar{B}_{\alpha_x}^* \bar{A}_i^* \bar{B}_{\alpha_y}^*; x, y=1, 2, \dots, s]$ は R の s^2 -dimensional

two-sided ideal である。この ideal の既約表現は

$$(6) \quad \bar{A}_i^* \rightarrow \delta_{ij} \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\rho_{\alpha_1 i}}{c_i} & \frac{\rho_{\alpha_2 i}}{c_i} & \dots & \frac{\rho_{\alpha_s i}}{c_i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\rho_{\alpha_1 i}}{c_i} & \frac{\rho_{\alpha_2 i}}{c_i} & \dots & \frac{\rho_{\alpha_s i}}{c_i} \end{array} \right\| \quad \bar{B}_k^* \rightarrow \delta_{\alpha_x k} \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{x番目の行} & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|$$

$j=1, \dots, m \quad k=0, 1, \dots, n$

であるから この ideal の principal idempotent は 4 であることがわかる。

$$\text{Case 4. } \rho_{\alpha_x i} > 0 \quad x=1, 2, \dots, s \quad \sum_{x=1}^s \rho_{\alpha_x i} < c_i \quad \text{なるとき}$$

$$\rho_{ji} = 0 \quad j \neq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

$$[\bar{A}_i^*, \bar{A}_i^* \bar{B}_{\alpha_y}^*, \bar{B}_{\alpha_x}^* \bar{A}_i^*, \bar{B}_{\alpha_x}^* \bar{A}_i^* \bar{B}_{\alpha_y}^*; x, y=1, 2, \dots, s]$$

は R の $(s+1)^2$ -dimensional two-sided ideal である。この ideal の principal idempotent は

$$(7) \quad \frac{c_i}{c_i - \sum_{x=1}^s \rho_{\alpha_x i}} \bar{B}_0^* \bar{A}_i^* \bar{B}_0^* + \sum_{x=1}^s \frac{c_i}{\rho_{\alpha_x i}} \bar{B}_{\alpha_x}^* \bar{A}_i^* \bar{B}_{\alpha_x}^* = \frac{c_i}{\rho_{0i}} \bar{B}_0^* \bar{A}_i^* \bar{B}_0^* + \sum_{x=1}^s \frac{c_i}{\rho_{\alpha_x i}} \bar{B}_{\alpha_x}^* \bar{A}_i^* \bar{B}_{\alpha_x}^*$$

である。

定理5より、この場合の前半は明らかである。そしてこの ideal の既約表現は

$$(8) \quad \bar{A}_j^* \rightarrow \delta_{ij} \left\| \begin{array}{ccc} 1 & \frac{p_{\alpha_i i}}{c_i} & \dots \frac{p_{\alpha_x i}}{c_i} \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \quad \bar{B}_k^* \rightarrow \delta_{k\alpha_x} \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots 1 & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right\|$$

(x+1) 番目の行

であるから、この ideal の principal idempotent は (7) である。

さて

$$(9) \quad E_e = \bar{B}_0^* - \sum_i \bar{A}_i^* - \sum_i \frac{c_i}{p_{0i}} \bar{B}_0^* \bar{A}_i^* \bar{B}_0^*$$

$$(10) \quad E_{Bj} = \bar{B}_j^* - \sum_i \bar{B}_j^* \bar{A}_i^* \bar{B}_j^* \frac{c_i}{p_{ji}} - \sum_i \bar{A}_i^* - \sum_i \bar{B}_j^* \bar{A}_i^* \bar{B}_j^* \frac{c_i}{p_{ji}}$$

とおく。(9) の第2項の和は $p_{ji} = 0$; $j=1, 2, \dots, n$ なる i についての和であり第3項の和は $0 < \sum_{j=1}^n p_{ji} < c_i$ なる i についての和である。

(10) の第2項は $0 < \sum_{j=1}^n p_{ji} < c_i$ なる i についての和であり第3項は $p_{ji} = c_i$ なる i についての和であり第4項は $\sum_{x=1}^s p_{\alpha_x i} = c_i$, $j = \alpha_x$ なる i についての和である。

E_{Bj} は B factor に内する j 番目の関係式の A factor の効果を除去した効果に対応する。

E_e は A factor の効果にも B factor の効果にも無関係な結合そのものの効果に対応する。

この結合を実験計画と考えれば E_e は実験誤差に対応する。そして単位要素の互いに直交する idempotents への分解はつぎの通りである。

$$(II) \quad I = \sum_i \bar{A}_i^{\#} + \sum_i \frac{c_i}{\rho_{0i}} \bar{B}_0^{\#} \bar{A}_i^{\#} \bar{B}_0^{\#} + E_e + \sum_{i,j} \bar{B}_j^{\#} \bar{A}_i^{\#} \bar{B}_j^{\#} \frac{c_i}{\rho_{ji}} \\ + \sum_{i,j} \bar{B}_j^{\#} \bar{A}_i^{\#} \bar{B}_j^{\#} \frac{c_i}{\rho_{ji}} + \sum_i \bar{A}_i^{\#} + \sum_{j=1}^n E_{Bj}$$

第1項の i は $\rho_{ji} (j=1, \dots, n) = 0$ なる i についての和

第2項の i は $c_i > \rho_{0i} > 0$ なる i についての和

第4項の i は $c_i > \rho_{0i} > 0$ なる i についての和で j は $c_i > \rho_{ji} > 0$ なる j についての和.

第5項の i は $c_i = \sum_{x=1}^d \rho_{\alpha_x i}$ なる i についての和で j は $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ についての和

第6項の i は 或る j について $\rho_{ji} = c_i$ なる i についての和

第7項の j はすべての j についての和である。

3. 実験計画法 PBLBD の relationship algebra

$n^* \times v$ 行列 Φ^* と $n^* \times k$ 行列 Ψ とが下記の条件を満足するとして。

$$(IV) \quad \Phi^{*'} \Phi^* = r \cdot I_v$$

$$(V) \quad \Psi' \Psi = D = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_k) = \begin{vmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & \ddots \\ & & & k_k \end{vmatrix}$$

$$(VI) \quad \Phi^{*'} \Psi D^{-1} \Psi' \Phi^* = \sum_{j=1}^n \sigma_j \bar{B}_j^{\#}$$

ここで下記の記号を附加しよう

$$U = \Psi D^{-1} \Psi' \quad S_j^{\#} = \frac{1}{r} \Phi^* \bar{B}_j^{\#} \Phi^{*'} \quad j=0, 1, \dots, n$$

$$T_i^{\#} = \frac{1}{r} \Phi^* \bar{A}_i^{\#} \Phi^{*'} \quad i=1, 2, \dots, m$$

すると, つぎの等式が成立する

$$(11) \quad T_i^\# S_j^\# T_k^\# = \delta_{ik} \frac{p_{ji}}{c_i} T_i^\# \quad i, k=1, \dots, m \quad j=0, 1, \dots, n$$

$$(12) \quad S_j^\# U S_k^\# = \delta_{jk} \frac{\sigma_j}{r} S_j^\# \quad j, k=0, 1, \dots, n \quad \text{但し } \sigma_0=0 \text{ と考える}$$

$$(13) \quad T_i^\# U = \sum_{j=1}^n T_i^\# S_j^\# U \quad i=1, \dots, m$$

$$(14) \quad S_0^\# U = U S_0^\# = 0$$

$$(15) \quad T_i^\# U S_j^\# = \frac{\sigma_j}{r} T_i^\# S_j^\# \quad i=1, \dots, m \quad j=0, 1, \dots, n$$

定理 6 $p_{ki}=0$ ならば, そのときにのみ $T_i^\# S_k^\# = S_k^\# T_i^\# = 0$
 $p_{ki}=c_i$ ならば, そのときにのみ $T_i^\# S_k^\# = S_k^\# T_i^\# = T_i^\#$
 $i=1, 2, \dots, m \quad k=1, \dots, n$

定理 7 $\sigma_j=0$ ならば, そのときにのみ $S_j^\# U = U S_j^\# = 0$
 $\sigma_j=r$ ならば, そのときにのみ $S_j^\# U = U S_j^\# = S_j^\#$
 $j=1, 2, \dots, n$

定理 8 $0 \leq \sigma_j \leq r \quad j=1, 2, \dots, n$

定理 9 $\sum_{x=1}^j p_{jxi}=0, \quad 0 < p_{jyi} \leq c_i, \quad \sum_{y=j+1}^n p_{jyi}=c_i, \quad \sigma_{jy}=0$
 $y=j+1, \dots, n$

なるとき, そのときにのみ $S_{jy}^\# T_i^\# S_{jz}^\# \quad y, z=j+1, \dots, n$ は 3

行列は一次独立であって $\sum_{y=j+1}^n S_{jy}^\# T_i^\# = \sum_{y=j+1}^n T_i^\# S_{jy}^\# = T_i^\#$

$T_i^\# U = U T_i^\# = 0$ である.

証明 $\sum_{x=1}^n p_{ix} = 0$ 故に $T_i^\# S_{jx} = S_{jx}^\# T_i^\# = 0$ ($x=1, \dots, n$) (定理6より)

定理7より $S_{jy}^\# U = U S_{jy}^\# = 0$ ($y=n+1, \dots, n$) 故に $T_i^\# U = \sum_{x=1}^n (T_i^\# S_{jx}^\#) U$
 $+ \sum_{y=n+1}^n T_i^\# (S_{jy}^\# U) = 0$. 定理4より $S_{jy}^\# T_i^\# S_{jz}^\#$ ($y, z=n+1, \dots, n$) なる行列は一次独立であって $\sum_{y=n+1}^n S_{jy}^\# T_i^\# = \sum_{y=n+1}^n T_i^\# S_{jy}^\# = T_i^\#$ である.

逆に $S_{jy}^\# T_i^\# S_{jz}^\#$ ($y, z=n+1, \dots, n$) が一次独立で $\sum_{y=n+1}^n S_{jy}^\# T_i^\# = T_i^\#$ であることより $\sum_{y=n+1}^n p_{jyi} = c_i$, $p_{ixi} = 0$ ($x=1, \dots, n$) ($c_i > p_{jyi} > 0$ ($y=n+1, \dots, n$)) であることは明らかである. すなわち $T_i^\# S_{jz}^\# = 0$ ($z=1, \dots, n$) である. よって $T_i^\# U = 0$ から $\sum_{y=n+1}^n T_i^\# (S_{jy}^\# U) = 0$ が導かれ

$p_{ji} \sigma_{jy} / c_i \cdot T_i^\# = 0$ ($y=n+1, \dots, n$) 故に $\sigma_{jy} = 0$ ($y=n+1, \dots, n$)

定理10 $\sum_{x=1}^n p_{ix} = 0$, $\left(\begin{array}{l} \sigma_{ix'} = 0 \text{ or } r \text{ } (x'=n+1, \dots, n) \\ 0 < p_{jy,i} < c_i \text{ } (y=n+1, \dots, n) \end{array} \right. \sum p_{jyi} = c_i$,
 $0 < \sigma_{jy} < r$ ($y'=n+1, \dots, u$) なるとき, そのときにのみ $S_{jy}^\# T_i^\# S_{jz}^\#$
 $(y, z=n+1, \dots, n)$ $S_{jy}^\# T_i^\# S_{jz'}^\# U$, $U S_{jy'}^\# T_i^\# S_{jz}^\#$, $U S_{jy'}^\# T_i^\# S_{jz'}^\# U$ ($y, z=n+1, \dots, n$, $y', z'=n+1, \dots, u$); なる行列は一次独立であって $\sum_{y=n+1}^n S_{jy}^\# T_i^\#$
 $= \sum_{y=n+1}^n T_i^\# S_{jy}^\# = T_i^\#$ である. 但し $u \leq n$

証明. $\sum_{x=1}^n p_{ix} = 0$ より $T_i^\# S_{jx}^\# = S_{jx}^\# T_i^\# = 0$ ($x=1, \dots, n$)

$\sum_{y=n+1}^n p_{jyi} = c_i$, $0 < p_{jyi} < c_i$ ($y=n+1, \dots, n$) より $\sum_{y=n+1}^n S_{jy}^\# T_i^\# = \sum_{y=n+1}^n T_i^\# S_{jy}^\# = T_i^\#$

$S_{jy}^\# T_i^\# S_{jz}^\#$ ($y, z=n+1, \dots, n$) は一次独立である (定理4より)

また $0 < \sigma_{jy} < r$ ($y'=n+1, \dots, u$) であるから $U S_{jy'}^\# T_i^\# S_{jz}^\# U$ ($y', z'=n+1, \dots, u$) は一次独立である. 同様に $U S_{jy'}^\# T_i^\# S_{jz'}^\# U$ ($y'=n+1, \dots, u$, $z'=n+1, \dots, n$)

は一次独立であり $S_{jy}^\# T_i^\# S_{jz'}^\# U$ ($y=n+1, \dots, n$, $z'=n+1, \dots, u$) は一次独立である.

$0 < p_{jy,i} < c_i$, $0 < \sigma_{jy} < r$ ($y'=n+1, \dots, u$) であるから $S_{ji}^\# T_i^\# S_{jz}^\# \neq 0$

よって $S_{j_y'}^\# T_i^\# S_{j_z'}^\#$, $US_{j_y'}^\# T_i^\# S_{j_z'}^\#$, $S_{j_y'}^\# T_i^\# S_{j_z'}^\# U$, $US_{j_y'}^\# T_i^\# S_{j_z'}^\# U$ は一次独立である。よって十分条件であることは容易に示される。逆に必要であることの証明も容易である。

定理 11. $\sum_{x=1}^d \rho_{ix} = 0$, $0 < \rho_{j_y i} < c_i$, $\sum_{y=t+1}^n \rho_{j_y i} = c_i$, $\sigma_{j_y} = r$ ($y=t+1, \dots, n$)
 なるとき, そのときにのみ $S_{j_y}^\# T_i^\# S_{j_z}^\#$ ($y, z=t+1, \dots, n$) なる行列は一次独立であって $\sum_{y=t+1}^n S_{j_y}^\# T_i^\# = \sum_{y=t+1}^n T_i^\# S_{j_y}^\# = T_i^\#$, $T_i^\# U = U T_i^\# = T_i^\#$ である。

証明は定理 9 と同じである。

定理 12. $\sum_{x=1}^d \rho_{ix} = 0$, $0 < \rho_{j_y i} < c_i$, $\sum_{y=t+1}^n \rho_{j_y i} < c_i$, $0 < \sigma_{j_y} < r$ ($y=t+1, \dots, u$), $\sigma_{j_y} = 0$ ($y=t+1, \dots, t$), $\sigma_{j_y} = r$ ($y=u+1, \dots, n$)

ならば, そのときにのみ

$$\begin{aligned} & T_i^\#, T_i^\# S_{j_y}^\#, S_{j_z}^\# T_i^\#, S_{j_z}^\# T_i^\# S_{j_y}^\# \quad (y, z=t+1, \dots, n) \\ & T_i^\# S_{j_y}^\# U, US_{j_z}^\# T_i^\#, US_{j_z}^\# T_i^\# S_{j_y}^\# U, S_{j_z'}^\# T_i^\# S_{j_y'}^\# U, US_{j_z'}^\# T_i^\# S_{j_y'}^\# \\ & \quad (y, z=t+1, \dots, u; y', z'=t+1, \dots, n) \end{aligned}$$

は一次独立である。但し $t \leq u \leq n$ である

証明. $\sum_{x=1}^d \rho_{ix} = 0$ 故に $T_i^\# S_{j_x}^\# = S_{j_x}^\# T_i^\# = 0$ ($x=1, \dots, d$)

$0 < \rho_{j_y i} < c_i$, $\sum_{y=t+1}^n \rho_{j_y i} < c_i$ より $T_i^\#, T_i^\# S_{j_y}^\#, S_{j_z}^\# T_i^\#, S_{j_z}^\# T_i^\# S_{j_y}^\#$ ($y, z=t+1, \dots, n$) は一次独立 (定理 5 より) また $\sum_{y=t+1}^n \rho_{j_y i} \sigma_{j_y} < c_i r$ であるから $U T_i^\# \neq 0, T_i^\#$ として $U T_i^\#, U T_i^\# S_{j_y}^\#$ ($y=t+1, \dots, n$) は一次独立である。 $0 < \sigma_{j_y} < r$ ($y=t+1, \dots, u$) であるから $U T_i^\#, U T_i^\# S_{j_y}^\#, U T_i^\# S_{j_y}^\# U$

$(y=t+1, \dots, u)$ は一次独立であり, $T_i^\#, T_i^\# S_{j_y}^\#, T_i^\# S_{j_y}^\# U$ ($y=t+1, \dots, u$) も一次独立である. なお $S_{j_z}^\# T_i^\#, S_{j_z}^\# T_i^\# S_{j_y}^\#, S_{j_z}^\# T_i^\# S_{j_y}^\# U$ ($y=t+1, \dots, u; z=t+1, \dots, n$) も一次独立であることを示すのは容易である. これらの事実を利用して定理の十分条件を証明することができる. 必要条件の方は容易に証明することができる.

上述の定理により $T_i^\#$ ($i=1, 2, \dots, m$) と $S_j^\#$ ($j=0, 1, \dots, n$) は U とで生成される algebra R^* に P_{ki} ($k=0, 1, \dots, n, i=1, \dots, m$) と σ_j ($j=0, 1, \dots, n$) との値によってつぎの 3つの場合に分けることができる.

Case (1) $\sum_{j=1}^n P_{ji} = 0$ すなわち $P_{0i} = c_i$ なるとき $[T_i^\#]$ は one-dimensional two-sided ideal である. この ideal の principal idempotent は $T_i^\#$ である.

Case (2) $\sum_{x=1}^s P_{ix} = 0, \sum_{y=t+1}^n P_{iy} = c_i, \sigma_x = 0$ ($x=t+1, \dots, t$)

$0 < \sigma_{j_y} < r, \sigma_{j_z} = r$ ($y=t+1, \dots, u; z=u+1, \dots, n$) 但し $s \leq t \leq u \leq n$

ならば

$$(16) \quad \left[S_{j_x}^\# T_i^\# S_{j_y}^\# \quad (x, y=t+1, \dots, n), S_{j_x}^\# T_i^\# S_{j_y}^\# U, U S_{j_y}^\# T_i^\# S_{j_x}^\#, U S_{j_y}^\# T_i^\# S_{j_z}^\# U \right] \\ (y, z=t+1, \dots, u; x=s+1, \dots, n)$$

は $(n-s + u-t)^2$ -dimensional two-sided ideal である. この ideal の principal idempotent は

$$(17) \quad \sum_{x=s+1}^t \frac{c_i}{P_{j_x i}} S_{j_x}^\# T_i^\# S_{j_x}^\# + \sum_{y=t+1}^u \frac{c_i r}{P_{j_y i} (r - \sigma_{j_y})} (I - U) S_{j_y}^\# T_i^\# S_{j_y}^\# (I - U)$$

$$+ \sum_{y=t+1}^u \frac{r c_i}{\rho_{j_y i} \sigma_{j_y}} U S_{j_y}^{\#} T_i^{\#} S_{j_y}^{\#} U + \sum_{z=u+1}^n \frac{c_i}{\rho_{j_z i}} S_{j_z}^{\#} T_i^{\#} S_{j_z}^{\#}$$

である。

勿論 $t=n$ の場合もあり, $t=s, u=n$ の場合もあり, $u=s$ の場合も, $u=n$ の場合も, $u=t$ の場合も $t=s$ の場合もある。

$$\text{Case (3)} \quad \sum_{x=1}^s \rho_{j_x i} = 0, \quad 0 < \rho_{j_y i} < c_i, \quad \sum_{y=s+1}^n \rho_{j_y i} < c_i, \quad \sigma_{j_x} = 0 \quad (x=s+1, \dots, t), \quad 0 < \sigma_{j_y} < r \quad (y=t+1, \dots, u) \\ \sigma_{j_z} = r \quad (z=u+1, \dots, n)$$

ならば

$$(18) \quad [T_i^{\#}, T_i^{\#} S_{j_y}^{\#}, T_i^{\#} S_{j_{y'}} U, S_{j_x}^{\#} T_i^{\#}, S_{j_x}^{\#} T_i^{\#} S_{j_y}^{\#}, S_{j_x}^{\#} T_i^{\#} S_{j_{y'}} U, U S_{j_z}^{\#} T_i^{\#}, \\ U S_{j_z}^{\#} T_i^{\#} S_{j_y}^{\#}, U S_{j_z}^{\#} T_i^{\#} S_{j_{y'}} U; x, y=s+1, \dots, n, \\ y', z=t+1, \dots, u]$$

は $(1 + \overline{n-s} + \overline{u-t})^2$ -dimensional two-sided ideal である。その ideal の principal idempotent は

$$(19) \quad \frac{c_i}{c_i - \sum_{y=s+1}^n \rho_{j_y i}} (I - \sum_{y=s+1}^n S_{j_y}^{\#}) T_i^{\#} (I - \sum_{y=s+1}^n S_{j_y}^{\#}) + \sum_{x=s+1}^t \frac{c_i}{\rho_{j_x i}} S_{j_x}^{\#} T_i^{\#} S_{j_x}^{\#} \\ + \sum_{y=t+1}^u \frac{c_i r}{\rho_{j_y i} (r - \sigma_{j_y})} (I - U) S_{j_y}^{\#} T_i^{\#} S_{j_y}^{\#} (I - U) \\ + \sum_{y=t+1}^u \frac{c_i r}{\rho_{j_y i} \sigma_{j_y}} U S_{j_y}^{\#} T_i^{\#} S_{j_y}^{\#} U + \sum_{z=u+1}^n \frac{c_i}{\rho_{j_z i}} S_{j_z}^{\#} T_i^{\#} S_{j_z}^{\#}$$

である。

勿論 Case (2) と同じように $t=n$ の場合も $t=1, u=n$ の場合も, $u=1$ の場合も, $u=n$ の場合も, $u=t$ の場合も $t=1$ の場合もありうる。

Case (1) の $T_i^{\#}$ と (19) の第1項に対応する処理の平方和の成分は block 空間と B-factor 空間に直交している。(17) の第1項 第2項と (19) の第2項, 第3項に対応する処理の平方和の成分は block 空間に直交していて B-factor 空間に交絡している。(17) の第3項 第4項と (19) の第4項, 第5項とに対応するものは block 空間にも B-factor 空間にも交絡している。

4. 分散分析

この実験計画法の分散分析において

$A_i^{\#}$ に対応する平方和は Case (1) のとき $\sum' T_i^{\#} \sum$ である。自由度は $\alpha_i = n(A_i^{\#})$ である。Case (3) のとき

$$(20) \quad T_i = \frac{c_i}{c_i - \sum_{j=1}^n p_{ji} i} \sum' (I - \sum_{j=1}^n S_{ij}^{\#}) T_i^{\#} (I - \sum_{j=1}^n S_{ij}^{\#}) \sum$$

である。自由度は $\alpha_i = n(A_i^{\#})$ である。

$B_j^{\#}$ に対応する平方和は $0_j = 0$ の場合

$$(21) \quad \sum' S_j^{\#} \sum - \sum_i \frac{c_i}{p_{ji}} \sum' S_j^{\#} T_i^{\#} S_j^{\#} \sum$$

第2項の i についての和は $p_{ji} \neq 0$ なる i についての和である。

$0 < 0_j < 1$ の場合

$$(22) \quad \Xi'(I-U)S_j^*(I-U)\Xi - \sum_i \frac{c_i r}{p_{ji}(r-q_j)} \Xi'(I-U)S_j^* T_i^* S_j^*(I-U)\Xi$$

第2項の i についての和は $p_{ji} \neq 0$, c_i なる i についての和である。

(21) に対する自由度は $\text{tr}(B_j^*) - \sum_i \alpha_i$ (22) に対する自由度は

$\text{tr}(B_j^*) - \sum_i \alpha_i$ である。各々の i についての和は、それぞれ (21), (22) の中の項の i と同じである。明らかにつぎの定理が導かれる。

$$\text{定理13} \quad \text{tr}(B_j^*) \geq \sum_i \text{tr}(A_i^*) \quad q_j \neq r,$$

i についての和は $0 < p_{ji} \leq c_i$ なるすべての i についての和である。

block に対する平方和 すなわち U に対する平方和は

$$(23) \quad \Xi'(U - \frac{1}{n^*} G)\Xi - \sum_i \sum_{y=t+1}^u \frac{c_i}{p_{ji}} \Xi' U S_{jy}^* T_i^* S_{jy}^* U \Xi \\ - \sum_i \sum_{z=u+1}^n \frac{c_i}{p_{jz}} \Xi' S_{jz}^* T_i^* S_{jz}^* \Xi$$

これに対する自由度は $h-1 - \sum_i (n-t) \alpha_i$ である

誤差項に対する平方和は

$$(24) \quad \Xi'(I_{n^*} - U)\Xi - \Xi'(I-U)(\Xi^* \Xi^*)(I-U)\Xi - \sum_i \Xi' T_i^* \Xi - \sum_i F_i$$

である。これに対する自由度は $n^* - h - v + \sum_j \text{tr}(B_j^*) - \sum_{i_x} \alpha_{i_x} - \sum_{i_y} \alpha_{i_y}$

である。 j についての和は $q_j = r$ の場合についてであり、 i_x は

$p_{ji_x} = 0$ ($j=1, \dots, n$) なる i_x についてであり i_y は $0 < \sum_j p_{ji_y} < c_{i_y}$ なる i_y についての和である。

参考文献

- [1] Ogawa, J. (1959) "The theory of the association algebra and the relationship algebra of a partially balanced incomplete block design" Inst. Statist. Mimeo Series 224 Chapel Hill, N.C.
- [2] Yamamoto, S. & Fujii, Y. (1963) "Analysis of Partially Balanced Incomplete Block Design" J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 27 119-135
- [3] Yamamoto, S. (1964) "Some Aspects for the Composition of Relationship Algebras of Experimental Designs" J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 28 167-197
- [4] Yamamoto, S. Fujii, Y. and Hamada, N. (1965) "Composition of some Series of Association Algebras" J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 29 181-215
- [5] James, A.T. (1957) "The relationship algebra of an experimental design" Ann. Math. Stat. 28 993-1002
- [6] Kusumoto, K. (1964) "On a Design for Two-way Elimination of Heterogeneity and its Analysis" J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 28 237-258
- [7] Kusumoto, K. (1967) "Association scheme of new types and necessary conditions for existence of regular and symmetrical PBIB designs with those association schemes" Ann. Inst. Statist. Math. vol 19.