

# プラズマの非線形横振動に ついて

慶応義塾大学工学部  
鬼頭史城

(1) 緒言 プラズマの非線形横振動  
に関して、且つて

J. Enoch, Nonlinearized Theory of  
Transverse Plasma Oscillations

(The Physics of Fluids, April, 1962)

という論文が出ている。今のこの報文では、J.  
Enoch の論文に対する補足事項を記したも  
のである。すなわち

(イ) 任意波形の単一進行波  $\varphi(kx - \omega t)$   
が存在し得るかどうかの問題

(ロ) 波形を定めない一般の場合に対する  
電場  $E_y(x, t)$  に対する非線形波動方程式  
について記してある。広く文献をあさる便宜が  
得られないので、同じ趣旨のことが既に発表さ

れていないとも限らない。

## (2) 記号

$f$  = 分布関数,  $v$  = 粒子速度,  $E$  = 電場の強さ,  $B$  = 磁束密度 ( $H$  = 磁場の強さ),  $\mathbf{r}(x, y, z)$  = 粒子の位置 (直角座標),  $e$  = 電子の荷電量,  $m$  = 陽子の質量,  $\rho$  = 場の荷電密度,  $\mathbf{j}$  = 場の電流密度

以下において,  $v_x, v_y, v_z$  に対する積分は, 原則的には  $-\infty$  から  $+\infty$  まで行なうものとする。

## (3) 基礎方程式

Maxwell-Boltzmann の方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} + v \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \quad \text{---(1)}$$

[衝突項は無視している。]

Maxwell の電磁方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

}

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

荷電密度と電流密度

$$\left. \begin{aligned} \rho &= en - e \iiint f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v} \\ \mathbf{j} &= -\frac{e}{c} \iiint \mathbf{v} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

以上は、ベクトルの的に累記号で表わしてある。

#### (4) 問題の設定

(a) 分布関数  $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$  は  $y, z$  に無関係, (b)  $E_x \equiv 0, E_z \equiv 0$ , とい  $E_y$  たげを考える。以上の仮定の下に方程式 (1) は

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{e}{m} E_y \frac{\partial f}{\partial v_y} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

となる。この (4) は  $f$  に対する第1階の偏微分方程式であり、その特性曲線の方程式は下記のごとくになる。

$$\frac{dt}{1} = \frac{dv_y}{\left[-\frac{e}{m} E_y(x, t)\right]} = \frac{dx}{v_x} \quad \text{---(5)}$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} dx - v_x dt &= 0 \\ \frac{e}{m} E_y(x, t) dt + dv_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{---(6)}$$

従って

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= x - v_x t \\ c_2 &= v_y + \frac{e}{m} \int_0^t E_y(c_1 + v_x \tau, \tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$f(x, t, v_x, v_y, v_z) = F(c_1, c_2, v_x, v_z) \quad \text{---(8)}$$

$F(\dots)$  は  $c_1, c_2, v_x, v_z$  の任意関数。  $F$  の具体的な形は初期値 (および境界条件) によってきまる。 plasma の neutrality の条件は

$$\iiint f(x, t, v_x, v_y, v_z) d\mathbf{v} = n \quad (9)$$

これを  $F$  の項で書き表わせば

$$\iiint F(x-v_x t, v_y^*, v_x, v_z) dv_x dv_y^* dv_z = n \quad \text{--- (10)}$$

便宜上下記の関数  $g(\dots)$  を導入する。

$$\begin{aligned} g(x-v_x t, t, v_x) \\ = \frac{1}{n} \iint F(x-v_x t, v_y^*, v_z) dv_y^* dv_z \end{aligned} \quad \text{--- (11)}$$

條件式(10)より

$$\int g(x-v_x t, v_x) dv_x = 1 \quad \text{--- (12)}$$

この(12)式の右辺は  $x, t$  に無関係であるから、左辺も又そうであると推論される。故に以下において

$$g(x-v_x t, v_x) = g(v_x)$$

と書くものとする。

(5) 任意波形の進行波  $\varphi(kx - \omega t)$   
の場合の検討

この目的に対して  $[\sin(kx - \omega t)]$  とおく代りに]

$$E_y(x, t) = \varphi'(kx - \omega t) \quad \text{---(13)}$$

と置き、この値を (7) に代入すれば

$$\begin{aligned} c_2 &= v_y + \frac{e}{m} \frac{\varphi(kx - \omega t) - \varphi\{k(x - v_x t)\}}{(kv_x - \omega)} \\ &= v_y + S \end{aligned} \quad \text{---(14)}$$

となる。これに対して電流  $j_y$  は

$$j_y = -\frac{e}{c} \iiint v_y F[x - v_x t, v_y + S, v_x, v_z] \cdot dv_x dv_y dv_z$$

さらに

$$v_y^* = v_y + S$$

とおくと

$$\frac{\partial(v_x, v_y^*, v_z)}{\partial(v_x, v_y, v_z)} = 1$$

であるから

$$\begin{aligned} j_y &= -\frac{e}{c} \iiint v_y^* F(x - v_x t, v_y^*, v_x, v_z) \cdot dv_x dv_y^* dv_z \\ &\quad + \frac{e}{c} \iiint S F(x - v_x t, v_y^*, v_x, v_z) \cdot dv_x dv_y^* dv_z \quad \text{--(15)} \end{aligned}$$

式 (15) の右辺の第 2 積分は、 $v_x$  については

$(-\infty, \frac{\omega}{k} - \varepsilon), (\frac{\omega}{k} - \varepsilon, \frac{\omega}{k} + \varepsilon), (\frac{\omega}{k} + \varepsilon, +\infty)$   
 の3段にわけ、あとで  $\varepsilon \rightarrow 0$  とおく。その結果  
 $[P$  は Cauchy の主値を意味するものとして]

$$\begin{aligned} j_y = & -\frac{e}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-v_x t, v_x) dv_x \\ & + \frac{e^2 n}{mc} \varphi(kx - \omega t) P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(v_x)}{kv_x - \omega} dv_x \\ & - \frac{e^2 n}{mc} P \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\{k(x-v_x t)\} \frac{g(v_x)}{kv_x - \omega} dv_x \end{aligned} \quad \text{--- (16)}$$

そこで

$$G(x-v_x t, v_x) = \iint v_y F(x-v_x t, v_y, v_x, v_z) \cdot dv_y dv_z \quad (17)$$

電磁波の方程式は現在の場合には

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial j_y}{\partial t} \quad \text{--- (18)}$$

となるが、(13) の1項で計算すると

$$j_y = \frac{c}{4\pi} \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \varphi''(kx - \omega t) \cdot \frac{1}{\omega} \quad \text{--- (19)}$$

これを上記の (16) の  $j_y$  に等しいとおけば

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left( \frac{c}{\omega} \right) \varphi''(kx - \omega t) \\ & = -\frac{e}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-v_x t, v_x) dv_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^2 n}{mc} \varphi(kx - \omega t) \cdot P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(v_x)}{kv_x - \omega} dv_x \\
& - \frac{e^2 n}{mc} P \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\{k(x - v_x t)\} \frac{g(v_x)}{kv_x - \omega} dv_x
\end{aligned}
\quad \text{-----(19a)}$$

この(19a)の各項は  $(kx - \omega t)$  の関数でなくともならない。そこで

$$G = G_1 + G_2$$

且つ

$$\begin{aligned}
G_1(x - v_x t, v_x) &= A \delta\left(v_x - \frac{\omega}{k}\right) \varphi\{k(x - v_x t)\} \\
\frac{e}{c} G_2(x - v_x t, v_x) &= - \frac{e^2 n}{mc} \varphi\{k(x - v_x t)\} \frac{g(v_x)}{kv_x - \omega}
\end{aligned}$$

とおき、積分は Cauchy の主値をとるものとする

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_1 dv_x = A \varphi\left\{k\left(x - \frac{\omega}{k} t\right)\right\} = A \varphi(kx - \omega t)$$

$$\begin{aligned}
\frac{e}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} G_2 dv_x &= - \frac{e^2 n}{mc} P \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\{k(x - v_x t)\} \cdot \\
& \quad \cdot \frac{g(v_x)}{kv_x - \omega} dv_x
\end{aligned}$$

であるから (19a) 式は

$$\frac{1}{4\pi} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \varphi''(kx - \omega t) \left(\frac{c}{\omega}\right)$$

$$= -\frac{e}{c} A \varphi(kx - \omega t)$$

$$\left[ + \frac{e^2 n}{mc} \varphi(kx - \omega t) P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(v_x)}{kv_x - \omega} dv_x \right] \quad (20)$$

とたずる。これは

[11頁, 注, 参照]

$$\varphi''(kx - \omega t) = B \varphi(kx - \omega t)$$

のときだけ変数分離可能である。故に

$$\varphi(\xi) = \sin \lambda \xi, \text{ 又は } \cos \lambda \xi$$

の場合にはあり得ないことになる。

### (6) 一般の非線形波動方程式

$E_y(x, t)$  の関数形に対して何も仮定しないものとする。

$$\begin{cases} c_1 = x - v_x t \\ c_2 = v_y + \frac{e}{m} \int_0^t E(c_1 + v_x \tau, \tau) d\tau \\ \quad = v_y + S \end{cases}$$

といて

$$v_y = v_y^* - S$$

$$S = \frac{e}{m} \int_0^t E(x - v_x t + v_x \tau, \tau) d\tau$$

とおく。

電流  $j_y$  に対して下記の値をとる。ここで、やはり

$$\frac{\partial(v_x, v_y^*, v_z)}{\partial(v_x, v_y, v_z)} = 1$$

であることを注意する。

$$\begin{aligned} j_y &= -\frac{e}{c} \iiint v_y F(x - v_x t, v_y + S, v_x, v_z) \cdot \\ &\quad \cdot dv_x dv_y dv_z \\ &= -\frac{e}{c} \iiint v_y^* F(x - v_x t, v_y^*, v_x, v_z) \cdot \\ &\quad \cdot dv_x dv_y^* dv_z \\ &\quad + \frac{e}{c} \iiint S F(x - v_x t, v_y^*, v_x, v_z) \cdot \\ &\quad \cdot dv_x dv_y^* dv_z \\ &= -\frac{e}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - v_x t, v_x) dv_x \\ &\quad + \frac{e}{cn} \int_{-\infty}^{+\infty} S g(x - v_x t, v_x) dv_x \end{aligned}$$

すなわち

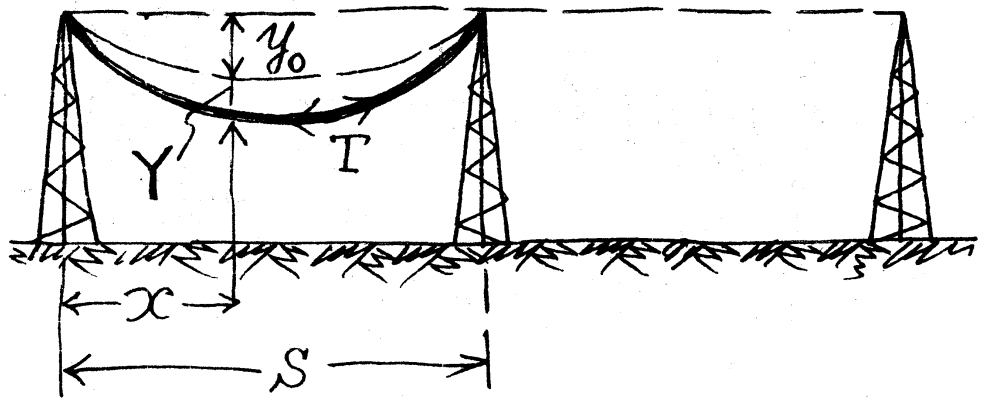
$$\begin{aligned} j_y &= -\frac{e}{c} G_0(x, t) \\ &\quad + \frac{e}{cn} \int_{-\infty}^{+\infty} g(v_x) dv_x \cdot \int_0^t E_y[x - v_x(t-\tau), \tau] d\tau \end{aligned}$$

— (21)

この値を波動(電磁)方程式(18)に代入すれば

$E_y(x, t)$  に対し 汎関数的波動方程式が得られる。  $G, g$  は分布関数  $F$  の線形汎関数であり、式 (18) + (21) は終局においては  $E$  に対する非線形の波動方程式となっている。

### (7) 工学上における非線形波動方程式の例 (送電線の電線の振動)



$E$  = 弾性係数,  $A$  = 電線の断面積,  $T$  = 張力

$$T \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{w}{g} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{T - T_0}{T_0} w$$

$$T = T_0 + \frac{AE}{2S} \int_0^S \left[ \left\{ \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial y_0}{\partial x} \right\}^2 - \left( \frac{\partial y_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

$w$  = 電線の重量 / 単位長さ。

[注]. p. 9, (20)式において,  $\square$  内の項は  $\int G_2 dV_x$  と cancell されて, 消失する。

## 参考文献

- (1) W. F. Ames, Non-linear Partial Differential Equations in Engineering, 1965, Academic Press.
- (2) T. L. Saaty, Modern Nonlinear Equations, 1967, McGraw-Hill Co.
- (3) A. Jeffrey-T. Taniuti, Nonlinear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics, 1964, Academic Press.
- (4) 鬼頭, 工学における偏微分方程式の応用例, 数理解析研究所講究録, 51, 1968, 京都大学数理解析研究所.

〈以上〉