

波動乱流理論を用いた海洋内部波の研究

東京大学大学院 理学系研究科 地球惑星科学専攻 大貫陽平 (Yohei Onuki)

Department of Earth and Planetary Science, Graduate School of Science, The University of Tokyo

1 はじめに

回転成層流体中において重力とコリオリ力を復元力として生じる波動を一般に慣性重力波と呼ぶ。海洋中には大気からの強制や海底地形上を流れる潮汐流によって絶えず慣性重力波が生じており「海洋内部波」と呼ばれている。流体中の波動はその散逸の際に密度混合を伴うため、海洋内部波の散逸量の時空間的な分布の推定が地球科学的に大きな意味をもつ。特に潮汐周期に連動して生じる比較的波長の長い内部波 ($\sim 150\text{km}$, 傾圧潮汐) は、深海の密度混合を支配する主要なエネルギー源であり、各国で長年研究が進められている。近年では大型計算機を用いた高解像度海洋数値モデルによって傾圧潮汐の発生・伝播過程を高精度で再現することが可能となったが、傾圧潮汐の散逸過程については定量化が十分になされていない。そこで本研究では、波動間の弱非線形相互作用を記述する波動乱流理論の手法を用いて、傾圧潮汐の減衰率の全地球的な空間分布を推定した。その結果、中低緯度において波動間相互作用による傾圧潮汐の減衰が顕著であることを示し、これまでの観測研究を定量的に支持する結果を得た。また密度成層の構造や水深が減衰率に与える影響を考察し、亜熱帯循環の存在が減衰率の東西非一様性を作り出す可能性について言及した。

本稿では上記の研究についてまず理論的背景を説明した後、数値的な解析手法及び解析結果とその解釈について述べる。

2 運動学的方程式

波動乱流理論とは波数成分間の弱非線形な相互作用で生じるエネルギーのやりとりを統計的に計算し、スペクトルの時間発展を考察するものである。その基礎方程式は運動学的方程式と呼ばれ、様々な媒質中の波動に対して方程式の導出や解析が行われている^[1]。回転成層流体に対しても多くの先行研究が存在し、無限一様成層あるいは二層系の問題に対して考察が進められてきた^[2-4]。本研究ではこれらの手法を拡張して地理学的な問題へと応用するために、任意の深さと密度構造を持つ系に適用可能な運動学的方程式を導入する。

波動乱流における定式化は変分法を用いて導かれることが多い。導出過程で行われる汎関数微分の定義は考える関数空間によって異なる。一般の測度空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ においてディラックのデルタ δ を $\forall x, y \in \Omega$ と Ω 上の有界な関数 f に対して

$$\int f(x)\delta(x, y)\mu(dx) = f(y) \quad (1)$$

を満たすものとして定義する。この時 Ω 上の汎関数 $\mathcal{F}: f \rightarrow a \in \mathbb{C}$ に対する微分を、形式的に

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta f(x)} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}[f(y) + \epsilon \delta(y, x)] \right|_{\epsilon \rightarrow 0} \quad (2)$$

と定める。本研究では先行研究と異なり非一様な媒質中の波動乱流を扱うため上記の点に注意が必要となる。

f 面上で全水深 D 一定の回転成層流体を考える。座標系として水平方向にオイラー座標 $\mathbf{r} = (x, y)$ 、鉛直方向にはラグランジュ座標 Z を用いて $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{r}, Z)$ を定義する。各点での密度 ρ は鉛直座標のみに依存し $\rho(Z)$ は既知の関数とする。静止状態での密度面の位置 Z に対する密度面変位を $\eta(\mathbf{x}, t)$ とし、層厚偏差を $\gamma \equiv \partial \eta / \partial Z$ と定義する。水平境界条件は無限遠で $\mathbf{u}, \gamma$ とともに 0 とする。流体の圧縮性は無視し静水圧近似を用いる。従属変数を水平流速 $\mathbf{u} \equiv (u, v)$ と層厚 γ とし、まとめて $\mathbf{v} \equiv (\mathbf{u}, \gamma)$ と表記する (図 1)。

空間座標系における測度を $\mu(dx) = \rho(Z)dx$ と定義する。このとき、任意の物理量 $\mathcal{F}[\mathbf{v}]$ の時間発展はハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \int \left\{ \frac{1}{2}(1 + \gamma)|\mathbf{u}|^2 + g\gamma\mathcal{V}\gamma \right\} \mu(dx) \quad (3)$$

を用いて、非正準形式の方程式

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \{\mathcal{F}, \mathcal{H}\} \quad (4)$$

$$\equiv \int \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{v}(\mathbf{x})} \mathcal{J} \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}(\mathbf{x})} \mu(d\mathbf{x}) \quad (5)$$

$$\mathcal{J} \equiv \begin{bmatrix} 0 & q & -\partial_x \\ -q & 0 & -\partial_y \\ -\partial_x & -\partial_y & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

で表せる^[5]。ここで、演算子 $\mathcal{V} \equiv \int_{-D}^z \cdot dZ$ と渦位 $q \equiv (f + \nabla^\perp \cdot \mathbf{u}) / (1 + \gamma)$ を定義した。ハミルトニアン¹の第一項は運動エネルギーを、第二項は有効位置エネルギーを表す。

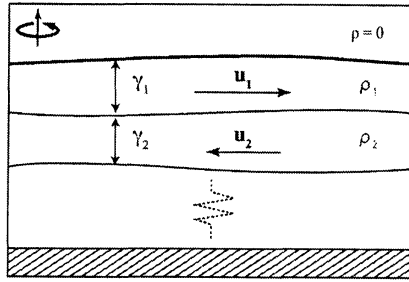


図 1: 回転成層流体の模式図。本研究では水平方向にオイラー座標系、鉛直方向には密度を基準に決めたラグランジュ座標系を導入して考察する。 γ は等密度面間の層の厚さ (層厚) の偏差を表す変数である。

回転成層流体の運動は、ロスビー数 $Ro \equiv U/fL \ll 1$ の条件下で波動モードと渦モードに分離することができる。波動モードはコリオリ力と重力を復元力として、周波数 $\omega \leq f$ の時間スケールで振動する成分であり慣性重力波を意味する。渦モードはコリオリ力と圧力傾度力がバランスして慣性重力波よりも緩やかな時間スケールで変動する成分であり地衡流を意味する。前者は渦位の変動を伴わず、後者は渦位の分布によって規定される。今回の研究では慣性重力波のみを対象とするため全ての点で $q = f$ という拘束条件を課して渦モードを除去する。このとき、水平流速ポテンシャル $\phi \equiv \Delta^{-1} \nabla \cdot \mathbf{u}$ を導入してポアソン括弧を正準形式

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\} = \int \left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\gamma(\mathbf{x})} \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\phi(\mathbf{x})} - \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\gamma(\mathbf{x})} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\phi(\mathbf{x})} \right) \mu(d\mathbf{x}) \quad (7)$$

に書き換えることができる。対応するハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \int \left\{ \frac{1}{2} (1 + \gamma) |\nabla\phi + f \nabla^\perp \Delta^{-1} \gamma|^2 + g \mathcal{V} \gamma \right\} \mu(d\mathbf{x}) \quad (8)$$

である^[6]。拘束条件 $q = f$ によって、渦度と層厚とが $\nabla^\perp \cdot \mathbf{u} = f\gamma$ で結びつけられることを利用した。正準方程式において一般に、ハミルトニアンの二次の項は線形項を、三次以上の項は非線形項を表す。そこで二次の成分 $\mathcal{H}_2$ を独立な振動モードに分解することを考える。まずエルミート演算子 $\mathcal{D} \equiv \mathcal{V} + \mathcal{V}^*$ を定義して $\mathcal{H}_2$ を標準二次形式

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} \int \left\{ -\phi \Delta \phi + \gamma (-f \Delta^{-1} + g \mathcal{D}) \gamma \right\} \mu(d\mathbf{x}) \quad (9)$$

に書き換える。成層流体内の微小振幅波は鉛直方向に構造関数展開することで独立な浅水波に分離することができるが、ここで定義した $\mathcal{D}$ はそうした鉛直構造関数を固有ベクトルとしてもつ演算子である。対応する固有値 $\bar{D}_0 > \bar{D}_1 > \bar{D}_2 > \dots$ は各モードの等価深度を意味し、波の分散関係に影響する因子となる。最大固有値 $\bar{D}_0$ は順圧モードに対応するが本研究では考えないこととする。演算子 $\mathcal{D}$ の固有ベクトル $\Psi(Z, m)$ と水平方向のフーリエ変換を用いて ϕ と γ を

$$\phi = \int \hat{\phi} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Psi(Z, m) \mu(dp), \quad \gamma = \int \hat{\gamma} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Psi(Z, m) \mu(dp) \quad (10)$$

と直交関数展開する。ここでモード空間 $p \equiv (\mathbf{k}, m) \in (\mathbf{R}^2, \mathbf{N})$ における測度を $\mu(dp) = \rho_c \tilde{D}_m d\mathbf{k} / (2\pi)^2$ と定義した。定数 ρ_c の選び方は任意であるが、海水の標準的な密度と考えることにする。さらに複素変数 $a(p)$ を

$$a(p) = 2^{-1/2} \left\{ \frac{(f^2 + g\tilde{D}_m k^2)^{1/4}}{k} \hat{\gamma}(p) + \frac{ik}{(f^2 + g\tilde{D}_m k^2)^{1/4}} \hat{\phi}(p) \right\} \quad (11)$$

と定義する。物理的には、 $a(\mathbf{k}, m)$ と $a(-\mathbf{k}, m)$ は逆方向に位相伝播する成分を表している。以上の変換によってハミルトニアン $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3$ およびポアソン括弧は

$$\mathcal{H}_2 = \int \omega(p) a(p)^\dagger a(p) \mu(dp) \quad (12)$$

$$\mathcal{H}_3 = \frac{1}{2} \iiint \left\{ V_{123} a_1^\dagger a_2 a_3 \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) + U_{123} a_1 a_2 a_3 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \right\} \mu(dp_1) \mu(dp_2) \mu(dp_3) + c.c. \quad (13)$$

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\} = -i \int \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta a(p)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a^\dagger(p)} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a(p)} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta a^\dagger(p)} \right) \mu(dp) \quad (14)$$

と書ける。係数 $\omega(p) \equiv (f^2 + \tilde{D}_m k^2)^{1/2}$ は各成分の固有周波数であり、結合定数 V, U は $\mathbf{k}, \tilde{D}, \Psi$ の複雑な関数となる。三次の成分に含まれる δ 関数は、波数成分間で相互作用が行われる条件を表している。この条件は媒質が水平方向に一様であることに起因する。今回の系では媒質が鉛直方向に不均質であるため、鉛直モードについては相互作用条件が存在しない。その代わりに結合定数 V, U に含まれる $\int \rho(Z) \Psi(Z, m_1) \Psi(Z, m_2) \Psi(Z, m_3) dZ$ という因子が鉛直モード間の相互作用の強さを規定する。

さて対応する運動方程式

$$\frac{\partial a(p_1)}{\partial t} = -i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a(p_1)^\dagger} \quad (15)$$

は線形項と非線形項を含んでいる。ここで二つの仮定として

- 線形項に比べて非線形項が微小であり摂動展開が可能である (弱非線形近似)。
- 波の各固有成分の位相は摂動の最低次において無相関である (乱雑位相近似)。

とする。すると、スペクトルの統計的な時間発展を記述する運動学的方程式が導出できて^[1,7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} = & \sum_{m_2, m_3} \iint \left\{ I_{123} (n_2 n_3 - n_1 n_2 - n_1 n_3) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \right. \\ & \left. - 2I_{213} (n_1 n_3 - n_1 n_2 - n_2 n_3) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \delta(\omega_2 - \omega_1 - \omega_3) \right\} d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \end{aligned} \quad (16)$$

と書かれる。ここで統計平均 $\langle \cdot \rangle$ を導入し $n\delta(p_1, p_2) \equiv \langle a(p_1) a(p_2) \rangle$ によってアクション密度 n を定義し、結合係数 I を再定義した。アクション密度は単位面積水柱内のエネルギー E と $E = (2\pi)^{-2} \sum_m \int \omega(p) n(p) d\mathbf{k}$ の関係にある。周波数についての δ 関数は三成分間で非線形共鳴が生じる条件を表している。積分は $\mathbf{R}^4$ の空間内で定義されているが、3つの δ 関数によって一次元多様体 (共鳴多様体) 上での積分に帰着できる。運動学的方程式は形式的に

$$\frac{\partial n(p_1)}{\partial t} = -\nu n(p_1) + F[n(p_2), n(p_3)] \quad (17)$$

と書くことができる。すると、第一項はアクション密度の線形的な減衰を表し、第二項は他の二波からのアクション密度の獲得を表すと解釈できる。ここで定義した

$$\begin{aligned} \nu \equiv & \sum_{m_2, m_3} \iint \left\{ I_{123} (n_2 + n_3) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \right. \\ & \left. + 2I_{213} (-n_2 + n_3) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \delta(\omega_2 - \omega_1 - \omega_3) \right\} d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \end{aligned} \quad (18)$$

は時間の逆数の次元を持ち、スペクトル成分 $n(p_1)$ の時間減衰率を表すものである。エネルギースペクトル $E(p)$ とアクションスペクトル $n(p)$ は成分毎に比例関係にあるため、アクションスペクトルの減衰率はエネルギースペクトルの減衰率と見なすこともできる。以降は傾圧潮汐成分に対する減衰率 ν を計算する。

3 運動学的方程式の数値積分

長波長の傾圧潮汐は急峻な海底地形上で発生したのち、海洋中を数千 km にわたって伝播しながら他成分の波と相互作用をしてエネルギーを消費していく^[8]。そのエネルギーの減少速度を決めるのが(18)式である。被積分関数にあるアクション密度は傾圧潮汐と相互作用する背景場成分のものであり、減衰率は傾圧潮汐のエネルギー自体には依存しない。海洋内部において流速と密度擾乱がもつエネルギースペクトルは長年の海洋観測の研究対象でもあり、特に内部波の主要な励起源から遠く離れた外洋域ではスペクトルの形状が海域によらず普遍的な形状に保たれていることが知られている。ここでは、Munk によって定義された経験的なスペクトル^[9]を用いて(18)式の数値積分を行い、傾圧潮汐の減衰率を推定する。

標準的な背景スペクトルは水平方向に等方的な形式で定義されている。そこで水平波数 $\mathbf{k}$ を極座標系 (k, θ) に書き換える。アクション密度 $n(k, m)$ が偏角 θ に依らないことと、 $\int \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d\theta_1 d\theta_2 = S^{-1}$ (S は k_1, k_2, k_3 を三辺にもつ三角形の面積) の関係式を利用して(18)式を

$$\nu = \frac{1}{\pi} \sum_{m_2, m_3} \int \left\{ \frac{\omega_3 I_{123}}{2Sc_3^2 k_3} (k_3 n'_2 + k_2 n'_3) \Big|_{\omega_2 < \omega_1} + \frac{\omega_3 I_{213}}{2Sc_3^2 k_3} (-k_3 n'_2 + k_2 n'_3) \Big|_{\omega_2 > \omega_1} \right\} dk_2 \quad (19)$$

と書き換える。ここで $c_m = \sqrt{g\tilde{D}_m}$ である。式(19)の積分は共鳴多様体上で行う。共鳴多様体は共鳴条件及び三角不等式

$$\omega(p_1) - \omega(p_2) - \omega(p_3) = 0 \text{ or } \omega(p_2) - \omega(p_1) - \omega(p_3) = 0 \quad (20)$$

$$|k_1 - k_2| < k_3 < |k_1 + k_2| \quad (21)$$

の解として定義される。共鳴条件(20)は

$$k_3 = F(k_2) \equiv \left[\{\omega_1 - \omega_2(k_2)\}^2 - f^2 \right]^{1/2} c_3^{-1/2} \quad (22)$$

と変形でき、三角不等式(21)は四次の代数不等式に帰着できる。変数 k_2 の積分区間は代数不等式の解として幾何学的に決定でき、区間の端点は代数方程式を数値的に解くことで得る。アクション密度は波数空間内の動径方向に積分して $n' = 2\pi n$ と再定義した。

背景スペクトルの具体形は

$$n(k, m) = \frac{E_0}{\rho_c} C c_m \omega(k, m)^{-p-1} H(m) \quad (23)$$

$$\left[H(m) = \frac{(m^2 + m_*^2)^{-1}}{\sum_m (m^2 + m_*^2)^{-1}}, \quad C = 2f^{p-1} B \left(\frac{p-1}{2}, \frac{1}{2} \right)^{-1} \right] \quad (24)$$

と設定する($B(\cdot, \cdot)$ はベータ関数)。観測によれば、海洋内部各点でのエネルギー密度はその場の浮力周波数 N に概ね比例することが明らかとなっている。そこで、鉛直積算エネルギーを $E_0 = E_c \int N dZ$ と定める。以上定義したスペクトルは定数パラメータとして p, m_*, E_c を含む。これらはそれぞれ周波数スペクトルの形状、鉛直モードスペクトルの形状、系全体のエネルギーの総量を決めるパラメータである。基準値としては先行研究^[10]に倣い $p = 2, m_* = 10, E_c = 5.7 \times 10^2 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ とする。計算結果のパラメータへの依存性については後述する。

計算に必要な水深と密度構造の情報については、それぞれ地球科学分野のオープンデータベースである ETOPO と World Ocean Atlas を用いる。地球上において 500m 以深の全海域を緯度経度 1° 格子に分割し、各領域内での ETOPO の地形データ ($1/60^\circ$ 格子) を平均して水深を定義する。World Ocean Atlas から得た全海洋の水温と塩分データをスプライン補間して鉛直 1024 層のデータに置き換えた後、海洋表面から下方向に海水の圧縮性を考慮した中立密度を計算していく。こうして得たデータを基にして

$$\mathcal{D}\Psi(Z, m) = \tilde{D}_m \Psi(Z, m) \quad (25)$$

の固有値問題を数値的に解き、構造関数と等価深度を求める。これらの情報は分散関係と結合定数を通じて計算結果に寄与する。潮汐成分としては、最も主要な周波数成分である M_2 分潮 (周期 12.42 時間) の鉛直第 1~5 モード波を対象とし、背景スペクトルは鉛直 128 モードまで計算に含める。波数積分は各共鳴多様体を 1024 分割して数値積分した。

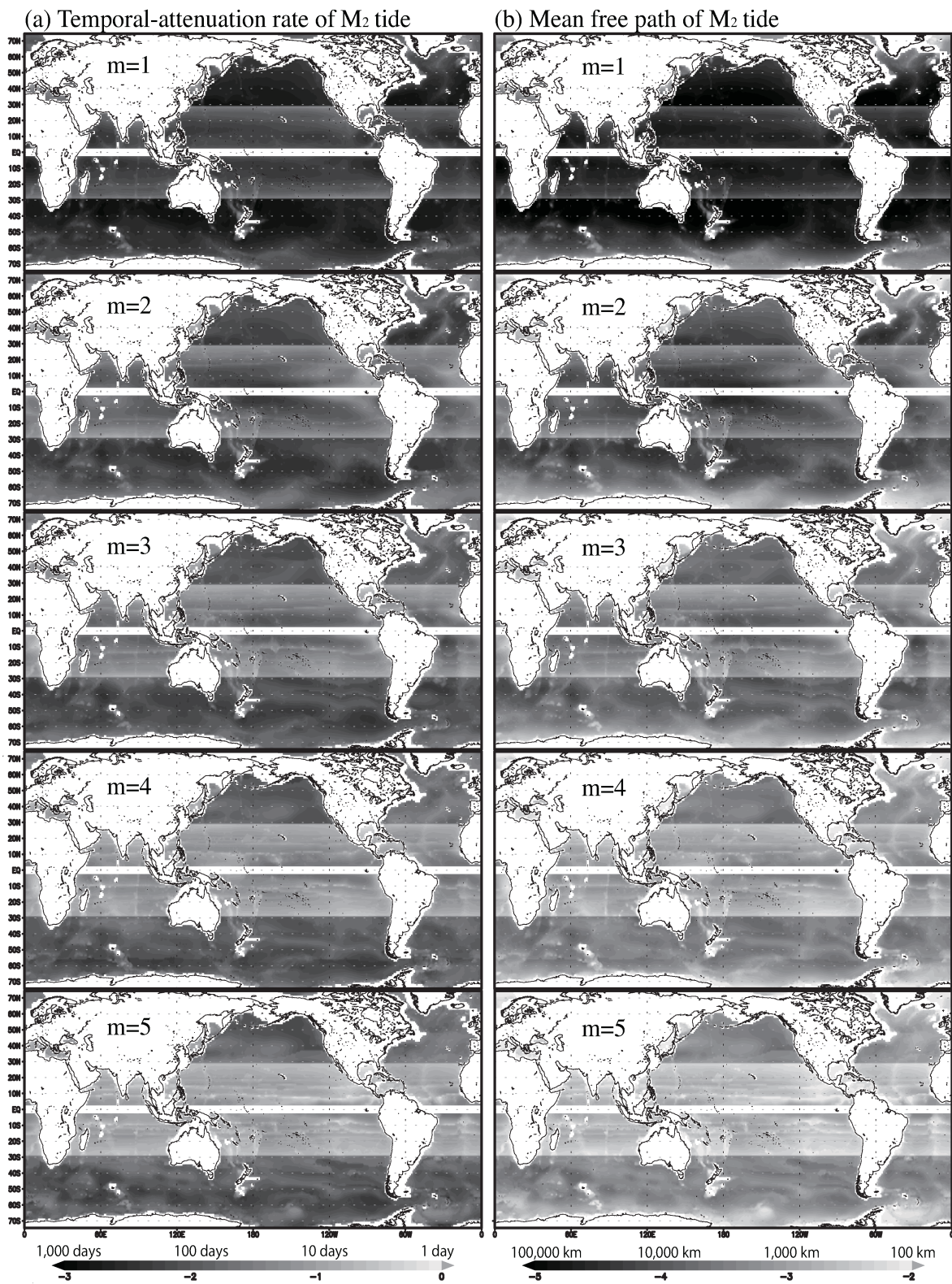


図 2: (a) 鉛直第 1~5 モードの M_2 分潮波の時間減衰率 ($\log_{10}(\nu \cdot \text{days})$)。カラーバー上部には対応する e-folding time を記載している。(b) M_2 分潮波の距離減衰率 ($\log_{10}(\lambda \cdot \text{km})$)。カラーバー上部の値は平均自由行程を表す。

4 計算結果

計算によって得た傾圧潮汐の時間減衰率を図2(a)に示す。この結果から特筆すべき点は北緯と南緯それぞれ29°を境に減衰率が急変していることである。この緯度は潮汐周波数 ω_T と慣性周波数 f が $\omega_T = 2f$ の関係式を満たす臨界緯度(28.9°)に対応する。コリオリパラメータ f は緯度によって異なるため、臨界緯度より低緯度側では

$$\omega_T = \omega_2 + \omega_3 \quad (26)$$

を満たす2成分 ω_2, ω_3 が存在するが、高緯度側では存在できない。このことが共鳴の発生の有無を決めて臨界緯度における減衰率の急変をもたらしている。条件式(26)によって起こる相互作用は parametric subharmonic instability (PSI) と呼ばれる。高次モードになるに従って減衰率は増大していく。この時も臨界緯度で減衰率が急変する性質は変わらない。しかし、低次モード波は減衰率の高い領域が臨界緯度付近に集中しているのに対して、高次モード波は低緯度領域においても減衰率が高いことが分かる。

次に波動間相互作用による減衰の定量的な評価として、時間減衰率 ν を傾圧潮汐の固有群速度 c_g で割って距離減衰率 $\lambda = \nu/c_g$ を計算する。物理的には λ^{-1} を波の平均自由行程とも解釈できる。この結果は図2(b)である。やはり臨界緯度を境に値の急変が見られる。傾圧潮汐の群速度は極に近付くにつれて小さくなるため、臨界緯度から遠くはなれた高緯度側では平均自由行程が短くなる。但しこの海域における運動学的方程式の妥当性には疑問が残る。このことは6節で議論する。時間減衰率よりも距離減衰率の方が鉛直モードへの依存性がより顕著である。これは、群速度は概ね鉛直モードに反比例するため時間減衰率の増加と群速度の減少の双方の効果によって高次モード波の平均自由行程が急激に短くなるためである。臨界緯度よりも赤道側では、第5モード波は数百 km 以内に減衰する。すなわち、高次モードの傾圧潮汐はほとんどのエネルギーが海山の近傍で散逸して遠方へ伝播しないことを意味する。一方、第1モード波の平均自由行程は臨界緯度付近で数千 km を示している。但し、実際の平均自由行程はこれよりもさらに短い可能性が高い。その理由も6節で述べる。より高緯度側での平均自由行程は数万 km から 10 万 km のスケールであり、これは波動間相互作用による減衰をほとんど受けないことを意味する。傾圧潮汐の減衰メカニズムは、波動間相互作用の他に地形による散乱や渦との相互作用が考えられ、高緯度における他の物理過程の相対的な重要性を示唆している。

臨界緯度付近での減衰率をより詳しく見るために、太平洋の北緯 28.5° における時間減衰率を切り出す(図3)。対応する地点での水深と密度躍層の深さを同時に描いている。この図から、浅海域や密度躍層の浅い海域で減衰率が大きくなることが分かる。特に 28.5° という緯度は海洋の亜熱帯循環域に対応しており、この海域では地球の自転と曲率の影響によって東西で密度躍層に傾きが生じて東側で躍層が浅くなる性質がある。そのため、西太平洋に比べて東太平洋で減衰率が大きくなる。この傾向は南太平洋や大西洋でも同様である。

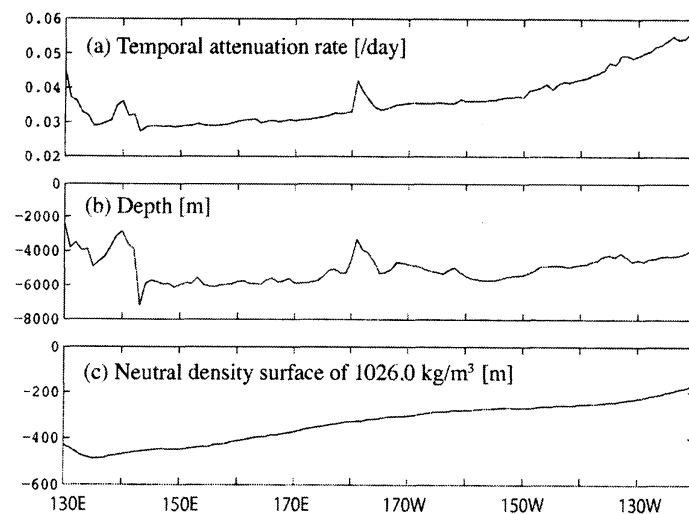


図3: 太平洋北緯28.5度線に沿った(a)傾圧潮汐の時間減衰率、(b)全水深、(c)中立密度1026kg/m³の等密度面の深さ。(c)はこの海域の密度躍層の深さに相当する。

5 観測及び数値実験との比較

内部波の減衰過程を観測によって直接捉えることは困難だが、傾圧潮汐の減衰に伴う他成分波の励起と乱流スケールでのエネルギー散逸は観測器によって調査することが可能である。今世紀に入り、日比谷紀之氏(東京大)らの直接観測によって、傾圧潮汐エネルギーの卓越する海域における乱流エネルギー散逸率が臨界緯度を境に急変することが初めて見出された^[11]。その後様々な研究によってPSIメカニズムによる傾圧潮汐の散逸過程の検証が図られてきた^[12,13]が、現実のスペクトルデータや密度構造を考慮した散逸量の定量的な議論は十分になされてこなかった。そうした中で本研究は、波動乱流理論を基にして減衰率のグローバルマッピングという地理学的成果を与えた。特に臨界緯度付近での急速な減衰が示されたことは、観測研究との整合性から重要である。

本研究ではさらに、密度成層が減衰率に与える影響について運動学的方程式を用いた計算結果の妥当性を検証するために数値実験を行った。水深と密度構造について北緯28.5°の西太平洋と東太平洋を模して設定を行い、初期に標準スペクトル場に加えられた傾圧潮汐エネルギーが時間とともに減衰する過程を再現した。数値モデルにはMIT General Circulation Modelを使用し、三次元静水圧 Boussinesq 方程式系において $\partial_y = 0$ とした鉛直準二次元的な設定を施した。水平領域は鉛直第1モード傾圧潮汐の一波長分の長さに定め、周期境界条件を用いた。下部境界は平坦でfree slipとし、上部は自由表面とした。標準スペクトル場を予め10日間積分した後に第1モード傾圧潮汐の流速場と層厚偏差を線形に重ね合わせて初期条件とし、そこから50日間積分した。西太平洋と東太平洋それぞれのケースにおいて背景スペクトル場の波の初期位相をランダムに変えて16回計算を行い、傾圧潮汐成分のエネルギーについてアンサンブル平均を取った。

傾圧潮汐成分のエネルギーの時系列を図4に示す。運動学的方程式に基づく計算から予想された通り、東太平洋で急速な減衰が見られる。この結果の解釈にはいくつかの注意が必要である。まず、今回行った数値実験は鉛直準二次元的モデルであり、三次元で定式化された運動学的方程式とはそもそも対象とする系が異なる。次にモデル領域は有限であり、実験では傾圧潮汐を一波長しか解像できていない。そのためモデル内で再現される波動間相互作用は領域の有限性の影響を強く受ける^[14]。一方で運動学的方程式は水平方向に無限領域を仮定している。さらに、運動学的方程式を用いた計算では背景場スペクトルを固定して考えたが、数値実験では傾圧潮汐がエネルギーを失うに伴い他成分のエネルギースペクトルは変動してしまう。このように、運動学的方程式と数値実験では問題設定に様々な相違がある。しかし「密度構造が波動間相互作用に与える影響」という点に関しては両方で共通の傾向を示しており、太平洋の東西で傾圧潮汐の減衰率に差が出るという仮説を支持している。この点において、数値実験の結果が運動学的方程式を用いた研究の裏付けとなっている。さらに、実験結果から得られるのは傾圧潮汐の時間減衰率に関する知見だが、傾圧潮汐の群速度についても東太平洋の方が遅いため、距離減衰率に換算すると東西でさらに明瞭な差が生じることになる。

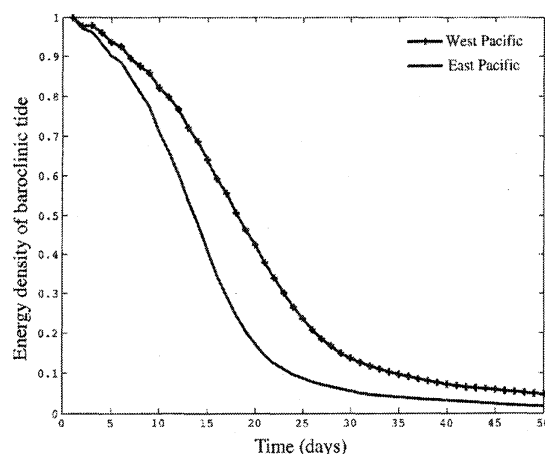


図4: 数値実験により計算された、標準スペクトル中での傾圧潮汐エネルギーの時系列。西太平洋と東太平洋のそれぞれの設定において、初期スペクトルの位相をランダムに変えて16回の実験を行いアンサンブル平均を取った。縦軸は初期エネルギーが1となるよう規格化されている。

6 考察と議論

運動学的方程式を用いた計算の結果には、いくつか議論すべき点が含まれている。まず、運動学的方程式を導出する上で仮定した弱非線形近似と乱雑位相近似の妥当性である。弱非線形近似が成立するためにはその十分条件として、運動学的方程式から計算されるスペクトル成分の変動の時間スケールがその成分の固有周期よりも長くないといけない。本研究に先立ち行った、スペクトル全領域を対象とした運動学的方程式の数値積分の結果によると、弱非線形近似は低周波数あるいは鉛直低次モード波に対しては成立しているが、高周波数の鉛直高次モード波に対しては成立しない。この事実に基づいて考えると、臨界緯度から低緯度側での PSI による相互作用に対しては弱非線形近似が成立するが、高緯度側では近似の条件が満たされなくなる。すなわち、図 2(b) に示されている高緯度での傾圧潮汐の急速な減衰は信頼性が低い。実際、観測や数値実験でも高緯度域での傾圧潮汐の波動間相互作用による急速な減衰は報告されていない。

もう一方の近似である乱雑位相近似については、近年海洋学者の間でその妥当性が疑問視されている。具体的には乱雑位相近似は PSI の効果を過小評価させる原因であると見なす声がある^[13]。しかし筆者は、本研究の問題設定では乱雑位相近似は概ね妥当であると考えている。エネルギースペクトルの過渡的な時間発展を考える際には乱雑位相近似の条件が崩れるが、強制と散逸の釣り合った定常状態における波数成分間のエネルギーの移動を扱う際には、弱非線形性が乱雑位相近似の正当性を支持することになる。この問題は根が深く、詳細に議論するには運動学的方程式の導出過程を追って伝播関数の漸近評価の妥当性に触れる必要がある^[15]。本稿ではこれ以上詳しくは述べない。

運動学的方程式の数値積分の結果は、背景スペクトルの定数パラメータ p, m_* , E_c に強く依存する。まず、背景波のエネルギーの総量を決めるパラメータ E_c は、傾圧潮汐の減衰率に線形に寄与する。すなわち、背景波のエネルギーを 2 倍にすれば減衰率は 2 倍速くなる。次に、周波数スペクトルと鉛直モードスペクトルの形状をそれぞれ決めるパラメータ p と m_* の値に対して減衰率がどのように依存するのかを図 5 に示す。この計算は緯度 28.5° で標準的な水深と密度成層を仮定して行った。パラメータ p と m_* が双方大きくなるほど減衰率も大きくなる。パラメータ p が大きいということは低周波数側 (慣性周波数 f 付近) にエネルギーが偏ることを意味し、パラメータ m_* は大きいということは鉛直高次モード側にエネルギーが広がることを意味する。すなわち、鉛直高次モードの近慣性波のエネルギーが傾圧潮汐の減衰率を強く左右することになる。減衰の最も顕著な臨界緯度では高次モード近慣性波のエネルギーが他の緯度帯よりも遥かに高いことが観測から明らかとなっており^[11]、図 2 及び図 3 の結果はそうした海域の減衰率を過小評価していることになる。潮汐エネルギーの散逸量分布を精密に推定していくためには、海域毎に測定したエネルギースペクトルを基に減衰率を計算する必要がある。これは非常に道のりの長い問題だが、本研究ではそうした将来研究の足がかりとなるであろう。

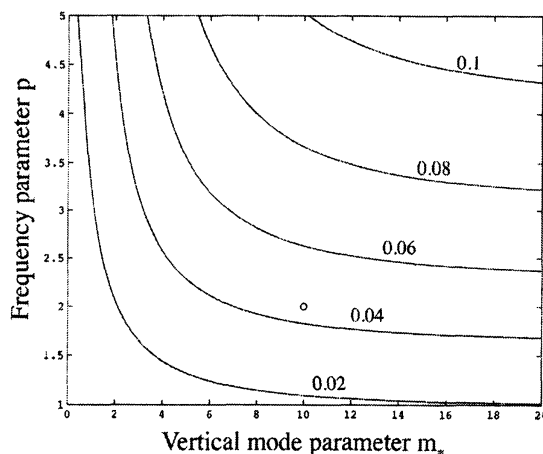


図 5: 背景場のスペクトルパラメータ p, m_* に対する傾圧潮汐の時間減衰率 ν [1/day] の依存性。緯度 28.5° で標準的な水深と密度成層を仮定し、鉛直第 1 モードの M_2 分潮を対象としている。白丸は前述の計算設定で採用した標準的なパラメータの値を示している。

最後に。本研究は傾圧潮汐の減衰過程として弱非線形的な波動間相互作用による効果を定量的に扱った。現実の海洋では、この他に波の強非線形的な効果、地形による波の散乱、渦との相互作用、境界層での散逸等の物理過程が関係していると考えられる。これらのうち渦との相互作用については本研究と同様な運動学的方程式に基づいた計算式を導くことが可能となるため、計算式の導出と数値解析を今後の課題としたい。

研究を進めるにあたりご指導頂いた日比谷紀之教授(東京大)、セミナーで様々な議論をして頂いた早稲田卓爾教授(同)、相木秀則氏(海洋研究開発機構)、本研究集会にて特に貴重なアドバイスを頂いた田中光宏教授(岐阜大)、横山直人助教(京都大)、研究発表を行うにあたって取り計らい頂いた村重淳教授(茨城大)にこの場を借りて感謝申し上げる。本研究は日本学術振興会特別研究員研究奨励費の助成を受けて行われた。

参考文献

- [1] Zakharov V. E., L'vov V. S., and Falkovich G. *Kolmogorov Spectra of Turbulence I - Wave Turbulence*. Springer, 1992.
- [2] Müller P., Holloway G., Henyey F., and Pomphrey N. Nonlinear interactions among internal gravity waves. *Reviews of Geophysics*, Vol. 24, No. 3, pp. 493–536, 1986.
- [3] Lvov Y. V., 横山直人. 海洋内部重力波のエネルギースペクトル形成機構. 数理解析研究所講究録, No. 1594, pp. 40–54. 「非線形波動現象の数理と応用」, 2008.
- [4] 田中光宏. 2層流体における表面波から界面波への非線形エネルギー輸送に関する数値的研究. 数理解析研究所講究録, No. 1946, pp. 67–75. 「非線形波動現象のメカニズムと数理」, 2014.
- [5] Bokhove O. Eulerian variational principles for stratified hydrostatic equations. *Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol. 59, No. 9, pp. 1619–1628, 2002.
- [6] Lvov Y. and Tabak E. G. A hamiltonian formulation for long internal waves. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 195, No. 1–2, pp. 106–122, 2004.
- [7] Hasselmann K. Feynman diagrams and interaction rules of wave-wave scattering processes. *Reviews of Geophysics*, Vol. 4, No. 1, pp. 1–32, 1966.
- [8] Niwa Y. and Hibiya T. Estimation of baroclinic tide energy available for deep ocean mixing based on three-dimensional global numerical simulations. *Journal of Oceanography*, Vol. 67, No. 4, pp. 493–502, 2011.
- [9] Munk W. Internal waves and small-scale processes. In Warren B. A. and Wunsch C., editors, *Evolution of Physical Oceanography*, chapter 9. The MIT Press, 1981.
- [10] Olbers D. and Eden C. A global model for the diapycnal diffusivity induced by internal gravity waves. *Journal of Physical Oceanography*, Vol. 43, No. 8, pp. 1759–1779, 2013.
- [11] Hibiya T. and Nagasawa M. Latitudinal dependence of diapycnal diffusivity in the thermocline estimated using a finescale parameterization. *Geophysical Research Letters*, Vol. 31, No. 1, 2004. L01301.
- [12] MacKinnon J. A., Alford M. H., Sun O., Pinkel R., Zhao Z., and Klymak J. Parametric subharmonic instability of the internal tide at 29°N. *Journal of Physical Oceanography*, Vol. 43, No. 1, pp. 17–28, 2013/01/25 2013.
- [13] Young W. R., Tsang Y.-K., and Balmforth N. J. Near-inertial parametric subharmonic instability. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 607, pp. 25–49, 7 2008.
- [14] Nazarenko S. *Wave Turbulence*. Lecture Notes in Physics. Springer, 2011.
- [15] Yokoyama N. Wave turbulent statistics in non-weak wave turbulence. *Phys. Lett. A*, Vol. 375, pp. 4280–4287, 2011.