

Phase reduction approach to traveling pulses in reaction-diffusion systems¹

京都大学大学院理学研究科 物理学教室 中尾 裕也²

位相縮約法はリミットサイクル振動子系を解析するための有効な手法である。本稿では、従来の低次元力学系のリミットサイクル解に対する位相縮約法を、無限次元力学系である偏微分方程式のリミットサイクル解に拡張することを試みる。これを用いて、ふたつの結合した1次元リング上の反応拡散系の進行パルス間に生じる位相ロック現象を解析する。

1 背景

非平衡散逸系においては、定常状態が不安定化すると、ごく自然に自励振動(リズム)が生じる。リズム間の相互作用が生み出す集団ダイナミクスは、ミクロな細胞内の現象からマクロな気象海洋現象まで、実世界の様々な系において、重要な意義を持ち得る。位相縮約法は、2変数以上の力学系により記述される規則的なリミットサイクル振動を、その位相変数のみを用いて記述するための系統的な近似法である。低次元のリミットサイクル振動子に対する位相縮約法については、1967年のWinfreeの先駆的な論文以来、多くの研究が行われ、良く確立されている[1, 2]。この方法により、様々な結合ネットワークを持つリミットサイクル振動子系の詳しい数理解析が可能となり、それらの興味深い集団ダイナミクスが明らかにされてきた。特に、大域結合した多数の振動子が相互同期してマクロな集団リズムを示す「集団同期転移現象」は良く知られており、実験的にも確認されている。本稿では、従来の低次元力学系のリミットサイクルに対する位相縮約法を、無限次元の相空間を持つ反応拡散系のリミットサイクル解に拡張することを試みる。

2 低次元リミットサイクル振動子の位相縮約

まず、低次元リミットサイクル振動子の位相縮約法について簡単に述べる。系の状態を表すベクトル $\mathbf{X}(t)$ の従う常微分方程式 $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ が、周期 T の安定なリミットサイクル解 $\mathbf{X}_0(t) = \mathbf{X}_0(t+T)$ を持つとする。リミットサイクル上に適当に位相の原点をとり、系がこの点を通過する時刻を $t=0$ 、状態を $\mathbf{X}_0(0)$ とする。この点から出発して t 時間発展した系の状態 $\mathbf{X}_0(t)$ の位相 ϕ を、時間 t と同一視することにより、 $\phi(t) = t \pmod{T}$ と定義する。これにより、リミットサイクル軌道に対しては常に $\dot{\phi}(t) = 1$ となる。以下、リミットサイクル上の状態を、位相 ϕ の関数とし

¹本稿は、北海道大学の柳田達雄氏と、海洋研究開発機構の河村洋史氏との共同研究によるものである。

²E-mail: nakao@ton.scphys.kyoto-u.ac.jp

て, $\mathbf{X}_0(\phi)$ と表す. さらに, リミットサイクル $\mathbf{X}_0(\phi)$ のベイスンに属し, いずれこのリミットサイクルに漸近する状態点 $\mathbf{X}(t)$ に対して, 位相 $\phi \in [0, T]$ を与える関数 (アイソクロン) $\phi(\mathbf{X})$ を, 常に $\dot{\phi}(\mathbf{X}(t)) = \nabla_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X})|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) = 1$ を満たすように定義することができる [1, 2]. これにより, 位相の定義がリミットサイクル近傍にも拡張される.

さて, この振動子に $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{p}(t)$ という形で弱い摂動 $\mathbf{p}(t)$ を与えた場合, その位相ダイナミクスは, $\dot{\phi}(\mathbf{X}(t)) = \nabla_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X})|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)} \cdot \dot{\mathbf{X}}(t) = 1 + \nabla_{\mathbf{X}}\phi|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)} \cdot \mathbf{p}(t)$ より, 最低次の近似で, $\dot{\phi}(t) = 1 + \mathbf{Z}(\phi(t)) \cdot \mathbf{p}(t)$ に従う. ここで定義した $\mathbf{Z}(\phi) = \nabla_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X})|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(\phi)}$ は位相感受関数と呼ばれるリミットサイクルの性質を特徴づける重要な量で, アイソクロン $\phi(\mathbf{X})$ のリミットサイクル軌道上の状態 $\mathbf{X}_0(\phi)$ での勾配であり, 実験的には系を弱い外力で摂動することにより測定できる. この位相感受関数 $\mathbf{Z}(\phi)$ について, 数学的には Malkin(-Izhikevich-Hoppensteadt) の定理が知られている [2]. すなわち, $\mathbf{Z}(\phi)$ は, 非摂動系 $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ のリミットサイクル $\mathbf{X}_0(\phi)$ まわりの Jacobi 行列を $D\mathbf{F}(\mathbf{X}_0(\phi))$ として, 方程式 $d\mathbf{Z}(\phi)/d\phi = -\{D\mathbf{F}(\mathbf{X}_0(\phi))\}^T \mathbf{Z}(\phi)$ の $\mathbf{Z}(0) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}_0(0)) = 1$ を満たす初期条件から出発した周期解で与えられる. ここで, Jacobi 行列の右肩の T は転置を表す. この方程式を積分すれば, 直接数値シミュレーションによらずに $\mathbf{Z}(\phi)$ を求めることができる.

3 反応拡散系のリミットサイクル振動の位相縮約

無限次元力学系のリミットサイクル振動の例として, 周長 L の 1 次元リング上の反応拡散系

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X}(x, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{X} \quad (1)$$

の定常進行パルス解 $\mathbf{X}_0(x, t) = \mathbf{X}_0(x, t + T)$ を考えよう. 周期 T はパルスがリングを一周する時間であり, その間に位相 (リング上での位置) $\phi(t)$ は $\dot{\phi}(t) = 1$ に従って 0 から T まで単調に増加する. 以下, 実際の数値計算では, FitzHugh-南雲 (FHN) 方程式 $\mathbf{X}(x) = (u(x), v(x))$, $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (u(u - \alpha)(1 - u) - v, \tau(u - \gamma v))$, $D = \text{diag}(\kappa, 0)$ ($\alpha, \tau, \gamma, \kappa$ は実パラメータ) を例に用いる. 常微分方程式の場合と同様に, 偏微分方程式 (1) のリミットサイクル解をパルスの位相 ϕ を用いて $\mathbf{X}_0(x; \phi)$ と表し, 位相縮約する. 進行パルス解 $\mathbf{X}_0(x; \phi)$ は適度に安定で, ある瞬間に弱い摂動を受けて変形しても, やがて元の形状に復帰すると仮定する. ただし, 元の形状に復帰した後のパルスの位相 ϕ' は, 叩かれずにそのまま進行したパルスの位相 ϕ とは一般に異なり, それらの差 $\phi' - \phi$ が摂動への位相応答となる. この位相応答は, 位相感受関数と摂動の積として求まるはずである.

位相縮約法を定式化するためには, 常微分方程式の場合と同様に, 式 (1) のリミットサイクル解 $\mathbf{X}_0(x; \phi(t))$ に収束するような空間パターン $\mathbf{X}(x, t)$ に対し, その位相を与えるアイソクロン $\phi\{\mathbf{X}(x, t)\} \in [0, T]$ が必要となる. そのような汎関数を一般的に求めるのは困難だが, $\mathbf{X}_0(x; \phi(t))$ に十分近い空間パターン $\mathbf{X}(x, t) \simeq \mathbf{X}_0(x; \phi(t))$ については, その局所近似を

$$\phi\{\mathbf{X}(x, t)\} = \phi(t) + [\mathbf{Q}(x; \phi(t)), \mathbf{X}(x, t) - \mathbf{X}_0(x; \phi(t))] \quad (2)$$

で与える事ができる. ここで, $[\mathbf{A}(x), \mathbf{B}(x)] = \int_0^L \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{B}(x) dx$ はリング上の内積で, ベクトル関数 $\mathbf{Q}(x; \phi)$ は, 反応拡散系 (1) の周期解 $\mathbf{X}_0(x; \phi)$ のまわりでの線形化演算子を $\hat{L}(x; \phi)$, その随伴演

算子 $\hat{L}^\dagger(x; \phi)$ をとして、随伴方程式

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{Q}(x; \phi) = -\hat{L}^\dagger(x; \phi) \mathbf{Q}(x; \phi) \quad (3)$$

の $\mathbf{Q}(x; 0) = \mathbf{u}^\dagger(x; 0)$ を満たす初期条件から出発した周期解である。ここで、 $\mathbf{u}^\dagger(x; 0)$ は $\hat{L}^\dagger(x; 0)$ のゼロ固有関数で、この関数 $\mathbf{Q}(x; \phi)$ が反応拡散系 (1) の位相感受関数となる。この結果は、通常の低次元リミットサイクル振動子に対するものの一般化であり、 $\mathbf{Q}(x; \phi)$ が満たすべき式 (3) は、前述した常微分方程式に対する Malkin の定理 [2] の直接的な拡張となっていることが分かる。

さて、リミットサイクル解を $\mathbf{X}_0(x; \phi(t))$ を持つ反応拡散系が

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X}(x, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{X} + \mathbf{p}(x, t) \quad (4)$$

のように弱い時空摂動 $\mathbf{p}(x, t)$ を受けた状況を考えよう。解の概形は非摂動解からあまり変化せず $\mathbf{X}(x, t) \simeq \mathbf{X}_0(x; \phi(t))$ で、位相 $\phi(t)$ のみが変わると考えて、そのダイナミクスを求める。上記の位相感受関数 $\mathbf{Q}(x; \phi(t))$ を使うと、常微分方程式の場合と同様に、最低次の位相方程式は

$$\dot{\phi}(t) = 1 + [\mathbf{Q}(x; \phi(t)), \mathbf{p}(x, t)] \quad (5)$$

となり、弱い摂動を受けた反応拡散系を、その非摂動リミットサイクル解の近傍で、位相方程式に縮約できる。図 (a) に FHN 方程式の位相原点での定常パルス解 $\mathbf{X}_0(x; \phi = 0)$ とその位相感受関数 $\mathbf{Q}(x; \phi = 0)$ の u 成分を示す。なお、この系では空間並進対称性により、 $\phi \neq 0$ での $\mathbf{X}_0$ と $\mathbf{Q}$ は単にこれをシフトしたものとなる。興味深いことに、位相感受関数は波束の前方に振動成分を持つ。

4 ふたつの結合した反応拡散系の進行パルス間に生じる同期現象

文献 [3] で解析された相互に結合したふたつの反応拡散系

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X}^A(x, t) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}^A) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{X}^A + \epsilon \{ \mathbf{X}^B(x, t) - \mathbf{X}^A(x, t) \}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X}^B(x, t) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}^B) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{X}^B + \epsilon \{ \mathbf{X}^A(x, t) - \mathbf{X}^B(x, t) \} \end{aligned} \quad (6)$$

の進行パルス間に生じる同期現象を考えよう。系 A, B は安定な進行パルス $\mathbf{X}_0^{A,B}(x; \phi(t))$ を示しているとする。前章の結果より、これらの結合反応拡散系を、以下の結合位相方程式系に縮約できる：

$$\dot{\phi}^A(t) = 1 + \epsilon \Gamma(\phi^B - \phi^A), \quad \dot{\phi}^B(t) = 1 + \epsilon \Gamma(\phi^A - \phi^B). \quad (7)$$

ここで $\phi^A(t)$ と $\phi^B(t)$ はそれぞれの進行パルスの位相であり、今の場合、単にそれらのリング上での位置に対応する。関数 $\Gamma(\phi^A - \phi^B) = [\mathbf{Q}(x; \phi^B), \mathbf{X}_0(x; \phi^A)]$ および $\Gamma(\phi^B - \phi^A) = [\mathbf{Q}(x; \phi^A), \mathbf{X}_0(x; \phi^B)]$ は、進行パルス間の実効的な相互作用を与える位相結合関数であり、今の場合、系が空間並進対称性を持つので、 Γ は位相差 $\psi = \phi^B - \phi^A$ のみの関数となる [1, 2]。

上で得たふたつの位相方程式の差をとると、位相差 ψ は $d\psi(t)/dt = -\epsilon \Gamma_a(\psi)$ に従うことが分かる。ここで $\Gamma_a(\psi) = \Gamma(\psi) - \Gamma(-\psi)$ は位相結合関数の反対称成分であり、そのゼロ点より位相

ロック位置が分かる. 図 (b) に図 (a) の結果より求めた FHN 方程式の位相結合関数 $\Gamma(\psi)$ の反対称成分 $\Gamma_a(\psi)$ を示す. この数値計算に用いたパラメータでは, 進行パルス $X_0(x; \phi)$ や位相感受関数 $Q(x; \phi)$ は振動的なテールを持ち, 対応して $\Gamma_a(\psi)$ も複雑な形状を持つため, 図 (c) に示すように, ふたつの進行パルスが異なる様々な位相差でロックすることが予想される. 図 (d,e) に示すように, これは反応拡散系 (6) の直接数値シミュレーションによって実際に確かめられる.

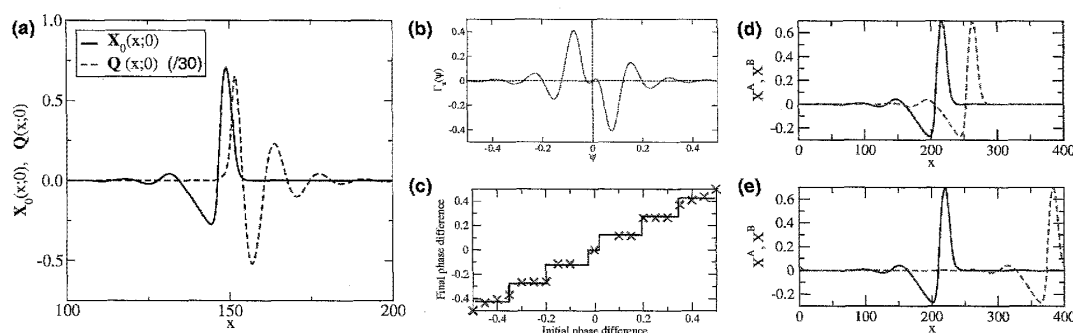


図 1: (a) FitzHugh-南雲方程式の進行パルス $X_0(x; \phi = 0)$ と位相感受関数 $Q(x; \phi = 0)$ の u 成分. (b) 位相結合関数の反対称成分 $\Gamma_a(\psi)$. 図 (a) より計算. (c) 定常な位相差. 図 (b) より求めた値と直接数値シミュレーション結果の比較. (d),(e) 結合した FitzHugh-南雲方程式間の進行パルスの異なる位相差でのロック状態. 図 (c) に示すように, 他にも様々な位相差でロックされる.

5 まとめ

無限次元の相空間を持つ反応拡散系のリミットサイクル解への位相縮約法の拡張についてごく簡単に述べた. 従来, そのような系の進行パルス解は, 主に界面ダイナミクスによるアプローチを用いて扱われてきた. これに対し, 我々の枠組みは, 空間連続並進対称性を持たない状況にも適用でき, その点においては, 従来法に対して有利な可能性がある. 例えば, 本稿で扱ったような反応拡散系の並進対称な進行パルス解だけでなく, 局在振動パルス解の同期現象なども扱う事ができる. 詳細については追って報告する予定である.

謝辞: 研究会を主催して頂いた世話人の皆様に, 深く感謝いたします. 本研究は, 科研費 (22684020) と JST-CREST プログラムによって部分的にサポートされました.

参考文献

- [1] A.T. Winfree, “The geometry of biological time” (2nd ed.), Springer, New York, 2001; Y. Kuramoto, “Chemical oscillations, waves, and turbulence”, Springer, Berlin, 1984.
- [2] F.C. Hoppensteadt & E.M. Izhikevich, “Weakly Connected Neural Networks”, Springer, New York, 1997; E.M. Izhikevich, “Dynamical Systems in Neuroscience”, MIT, Cambridge, 2007.
- [3] H. Suetani, T. Yanagita, & K. Aihara, Int. J. Bif. Chaos **18**, 2289 (2008); T. Yanagita, H. Suetani, & K. Aihara, Phys. Rev. E **78**, 056208 (2008).